时代云图
SHI DAI YUN TU

理工社®

【张宇数学教育系列丛书】

2018 张宇概率论与数理统计9讲

张宇○主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

SHI DAI YUN TU
理工社®

【张宇数学教育系列丛书】

张宇 概率论与数理统计9讲

张宇○主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

张宇概率论与数理统计 9 讲 / 张宇主编．—北京:北京理工大学出版社,2017.1

ISBN 978－7－5682－3603－4

Ⅰ.①张…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料　②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 000639 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(总编室)
　　　　　(010)82562903(教材售后服务热线)
　　　　　(010)68948351(其他图书服务热线)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司
开　　本 / 787 毫米×1092 毫米　1/16
印　　张 / 14
字　　数 / 349 千字
版　　次 / 2017 年 1 月第 1 版　2017 年 1 月第 1 次印刷
定　　价 / 32.80 元

责任编辑 / 高　芳
文案编辑 / 胡　莹
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前言

PREFACE

在 2017 版前言中，我讲过，概率论与数理统计在考研中有两大核心问题：一是求分布，二是作估计. 恰巧，在 2017 考研大题中，第一道大题考的是求分布，第二道大题考的是作估计，共计 22 分.

本书在 2017 版的基础上，做了如下修订：

一，在第 2 讲中增加了“分布函数的应用——求概率”这个知识点，提醒读者注意；

二，选取了 2017 考研真题中的难题作为本书例题，给读者提供详解；

三，增加、修改了第 2,3,5,8,9 讲中的八个重要例题和习题；

四，修订了上一版中的瑕疵.

本书在 2017 考研中涵盖了所有考点，命题思路完全一致，这令作者感到欣慰. 希望本书能够继续帮助复习考研和立志提高大学数学水平的读者实现目标.

张宇

2017 年 1 月 于北京

张宇数学教育系列丛书详细说明

书名	主要内容	适用阶段
张宇带你学系列 (高等数学(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	体现了本科教学要求与考研要求的差异,列出了章节学习的知识体系,给出了所有课后习题的全面解析,精选了不同数量的经典例题.	大一大二学生课后习题复习及考研基础阶段
全国高校期末考试过关必备与高分指南系列 (高等数学(微积分)(上、下册)、线性代数、概率论与数理统计,共4册)	以教育部大学数学课程指导委员会编写的教学大纲为依据,以教育部全国硕士研究生招生考试数学考试大纲为参考,设置了全国高校考试通用的必考点精讲以及考试试题,命题具有通用性.	大一大二学生期末复习及考研基础阶段
张宇高等数学18讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中高等数学部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题组组长参与.	基础阶段
张宇线性代数9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中线性代数部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.	基础阶段
张宇概率论与数理统计9讲	以考试大纲、历年真题和主流教材为依据,诠释考研数学中概率论与数理统计部分的全部考点,配以优秀的例题、习题和全部详细答案.原命题人参与.	基础阶段
张宇考研数学题源探析经典1000题 (数学一、数学二、数学三)	以考研命题所使用的所有题目源头为依据,精心挑选和编制了1000道左右高仿真练习题,题目与考研无缝接轨,综合性强,由易到难,利于考生复习过程中对知识点逐层加深理解.原命题组组长参与.	基础阶段+强化阶段
张宇考研数学真题大全解 (数学一、数学二、数学三)	囊括考研数学命题以来所有考研真题,给读者提供原汁原味的实考题,有效掌握命题方向及解题思路.原命题组组长参与.	强化阶段
考研数学命题人终极预测8套卷 (数学一、数学二、数学三)	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(上).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段
张宇考研数学最后4套卷 (数学一、数学二、数学三)	全国唯一一本考研命题人和辅导专家通力合作、全程亲自编写的冲刺模拟卷(下).实战演练,积累经验,查漏补缺,科学预测,并配有部分重点难题讲解视频.原命题组组长与命题成员参与.	冲刺阶段

注:主编张宇将在每本书正式出版时在微博发布最新封面,市面上其他任何同名图书均非张宇所写,请考生注意鉴别.出版日期见封四.

以上书籍新浪微博答疑地址:@张宇考研图书交流论坛 http://weibo.com/yuntubook/

张宇新浪微博:@宇哥考研 http://weibo.com/zhangyumaths/

导学

PREAMBLE

——如何探究随机现象背后的客观规律

本书是继《张宇高等数学 18 讲》《张宇线性代数 9 讲》之后的第三本教材，至此，我写给读者朋友们的考研数学 36 讲已经齐全了.

一提到概率论与数理统计，很多读者以为是研究随机现象的，正如读者所熟知的——概率论起源于赌博——帕斯卡和费马绞尽脑汁去帮助人们思考如何研究赌博中的赌金分配问题；还有读者干脆更加具体化地把这门课看做是玩排列组合的智力游戏. 以上认识，都没有抓住这门学问的核心——诚然，赌金分配也好，排列组合也罢，都是概率统计中的内容，但是它们都不是核心——**如何利用微积分工具研究随机现象背后的客观规律性，才是这门课程的核心.**

以上所述，道出了这门课的**两大关键：一是概率统计的研究思想；二是研究概率统计的工具——微积分.**

一、概率统计的研究思想

何谓概率统计的研究思想？本书中将会讲到众多概率论、统计学的思想方法，这些思想方法是这门课程的灵魂，读者一定要认真学习、体会并将它们内化为自己的能力. 在此我仅举一个简单但是重要的例子——**天上掉馅饼**——希望读者对于这门课里的知识，不仅要知其然，更要知其所以然.

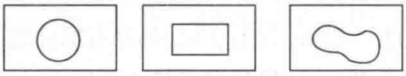
假设明天早上 9:00，天上会掉一个馅饼（当做质点）到你所在学校的操场上，请你用食堂的饭盆去接（如下图）.

两个问题：一是你站在哪里接呢？二是你要带多大的饭盆和什么形状的饭盆呢？认真思考后，不难得出如下结论.

第一个问题的答案是：站在何处去接馅饼都可以. 这里就要求读者懂得一个重要思想——**等可能性思**

想——我们没有任何理由认为这个馅饼更有可能落在操场区域中的某个位置，只好认为它落在此区域中的任何位置都具有相等的可能性. 这个思想在很多问题中都有重要应用，比如说：一个袋子中有10个同质球，其中有1个白球，9个黑球，现在请你从该袋子中随机取出一球，问取出的球是白球的概率. 我们会毫不犹豫地回答：十分之一. 这里用到的就是这个思想：由于球是同质的，我们没有任何理由认为取到某一个球更具有可能性，只好认为取到10个球中任何一球都具有等可能性，所以取到白球的概率自然是十分之一.

第二个问题的答案是：你所带的饭盆大小至关重要，但是是什么形状却无关紧要. 为什么？因为馅饼落在操场区域的任何位置都具有等可能性，于是，读者容易想到，如果饭盆的面积是操场面积的千分之一，那么你接到馅饼的概率就是千分之一；如果饭盆的面积是操场面积的二分之一，那么你接到馅饼的概率也就是二分之一；如果，我是说如果，你的饭盆面积和操场面积一样大，那么毫无疑问，馅饼就是你的了. 至于你是用圆形、还是矩形、甚至是奇形怪状的(如下图)，真是随你了(这里要注意一点：如果你的饭盆面积和操场面积一样大，你的饭盆和操场形状自然是一样的，这是特殊情况). 这里又可以把第一个问题所述的等可能性等价地，或者说更加专业地描述为：**馅饼落到操场区域的任意子区域上的概率与该子区域的面积大小成正比**.



以上所述涉及**求概率的几何概型**这一重要知识点.

于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

称随机试验(随机现象)的概率模型为**几何概型**，如果：

(1)样本空间(基本事件空间)Ω是一个可度量的几何区域；

(2)每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样，即样本点落入Ω的某一可度量的子区域S的可能性大小与S的几何度量成正比，而与S的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果S_A是样本空间Ω的一个可度量的子区域，则事件$A=\{$样本点落入区域$S_A\}$的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}.$$

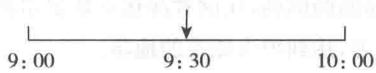
由上式计算的概率称为A的**几何概率**.

需要指出的是，上述问题是考研重点，是命题人手里的“香饽饽”.

二、研究概率统计的工具——微积分

当然，不要以为只懂了概率统计的思想，就能够游刃有余，畅通无阻. 这里还涉及计算的问题——大多数数学问题是要算出来的——微积分在概率统计的发展过程中起到了极为重要的作用.

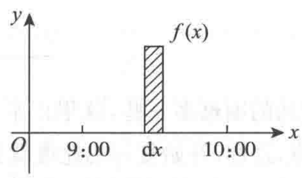
接着“一”那里的例子，我再提一个“类似”的问题. 假如给出一个信息：明天我会在9:00—10:00之间到达教室. 读者马上要将其理解为“我在9:00—10:00之间的任意时刻到达教室是等可能的”，很好. 那么，请问我在9:00—9:30之间到达教室的概率是多少？答案是二分之一，也很好. 那么，请问我在9:30这个时刻正好到达教室的概率是多少？答案是？读者可能会发现一个奇怪的答案：概率是0. 是的，你回答的没有错. 假设9:00—10:00的时刻为一个时间轴，这可以看做一个有长度的数轴，如下图所示. 但是9:30这个时刻是一个点——一个点是没有长度的——所以，由上面提供的几何概率的公式计算得到答案0.



“我在 9:30 到达教室”这件事情明明可以发生，可是其概率算出来竟然是 0，这不能不说是一种遗憾——这是数学上的遗憾——通俗说来，按照我们上面讲的几何概型的方法，这个事件的概率是**“测不出来的”**.

测不出来可不行，非得测怎么办？微积分前来施以援手了.

将 9:30 这个点再往下走一个增量——9:30＋$\mathrm{d}x$，于是，我们就可以用 $f(x)\mathrm{d}x$ 这个面积的大小来表示这件事情发生的概率了. 这涉及随机变量的**均匀分布**这个重要知识点.



于是，在本书中你会看到如下定义与公式.

如果随机变量 X 的概率密度或分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad \text{或 } F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\leqslant x<b,\\ 1, & b\leqslant x,\end{cases}$$

则称 X 在区间 (a,b) 上服从**均匀分布**，记为 $X\sim U(a,b)$.

【注】 区间 (a,b)，可以是闭区间 $[a,b]$；几何概型是均匀分布的实际背景. 用几何概率计算事件概率时已假设点在区域内服从均匀分布. 几何概率可以用均匀分布计算.

同样需要指出，我在此处中所讲到的这个直观且深刻的知识点是考研重点.

我认为，读者若能贯彻以上两大关键——既能够学懂概率统计的思想方法，又能够熟练使用微积分工具，这门课程一定可以学好.

三、关于本书

本书是由各位作者在多年讲授概率论与数理统计课程和考研辅导课程的讲稿基础上修改、扩充、完善而来的.

本书各位作者曾经分别参与考研数学命题、中国人民大学相关教材、高等教育出版社《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》概率论与数理统计部分的编写、浙江大学《概率论与数理统计(第四版)》的《习题全解与考研指导》的编写、高等教育出版社《考研数学历年真题解析》的编写和审定等，这些工作对于本书的形成具有重要意义. 期间，清华大学谭泽光教授与作者进行了很多交流，给予作者很多帮助，特别表示感谢.

现在，在北京理工大学出版社的大力支持下，作者将概率论与数理统计课程按照考研数学考试大纲的要求，细分为 9 讲，称为《张宇概率论与数理统计 9 讲》，奉献给读者，供考研究生的读者和有志于提高概率论与数理统计学习水平的读者们参考.

本书每一讲由“内容精讲”“例题精解”“习题精练”三部分组成，所有习题都配有详细解答过程，供读者参考.

“内容精讲”全面准确地阐述了本科教学基本要求和考研数学大纲中概率论与数理统计所有知识点的内涵和外延，读者一定要认真研读，并在做题后温故知新.

“例题精解”通过精心挑选或者命制的例题，让读者深化对数学知识的理解，并把它们内化成自己的解题能力，这部分内容建议读者反复练习，达到炉火纯青的地步.

“习题精练”给读者留下了作业：独立完成这些优秀的试题，既检验自己的学习成果，又培养自己独立做题的能力，且能够查漏补缺、增长见识.

如何使用好本书并做好数学的学习和复习呢？我提四个建议.

(1)坚持不懈，细水长流

老一辈的京剧表演艺术家常讲：“一天不练功，只有我知道；三天不练功，同行也知道；一月不练功，观众全知道.”复习数学，我们建议读者也一定要这样，捧着这本书，每天都要看内容，每天都要做题目，坚持不懈，细水长流，便可水到渠成.

(2)不求初速，但求加速

一开始读数学书，总会吃力一些，遇到的困难多一些，这很正常，我们不要畏难，应该扎扎实实地把每一处不懂的地方弄懂，把每一个难点攻克，这样，开始复习的速度就会慢一些. 但是，只要能够坚持，复习了一定的内容之后，你便会发现，复习速度不断提高，理解能力和解题能力都会显著增强. 这符合数学学习的规律，请读者把握住.

(3)独立思考，定期检验

复习一个知识，先要读基本的概念、定理和公式，然后看例题，再去做习题. 只有通过做题，才能知道自己是否真正掌握了这个知识. 一定不要翻着答案做题，稍有不会就看答案，这样效果不好. 读者先不要看答案，自己独立地去做，调动起自己所有的知识储备，看能不能做出来，做出来了，自然很好，即使做不出，时间也没有白费，其他的知识在你脑子里过了一遍，也是一种复习. 只是要注意，如果全力以赴也未做出题目，看完答案后要好好总结经验. 在复习完一节、一章和整个课程的不同阶段，都要定期地通过做题来检验自己的复习水平和效果.

(4)吸取教训，善于总结

人没有不犯错误的，尤其在学习数学的过程中，做错题，不会做题，是再平常不过的了. 人们常说：“失败是成功之母”，就是这个意思. 我们常告诉学生：如果一位复习备考的学生遇到不会的题、做错的题，可能会有两种态度，一种态度是消极的，题目不会做，心情不好，自暴自弃，复习效率大打折扣；一种态度是积极的，题目做不出，正是找到了自己复习的薄弱环节，找到了自己的不足之处，正是遇到了自己提高、进步的机会，我们当然支持后面一种态度，这才是正确的态度. 所以，希望在考研复习的过程中，读者准备一个笔记本，通过不会做或者做错的题目，认真分析自己到底问题出在哪里，哪些知识还复习不到位，吸取教训，多做总结，这样的笔记日积月累，对提高你的数学水平，是有极大帮助的.

我要再次感谢前考研数学命题组的老专家们，他们功底深厚、德高望重，给予本书很大的支持和帮助.
我无意用“水平有限”作为遁词，诚心接受读者和同行专家的批评指正.

作为考研数学 36 讲的最后一本书，我把在微博上的一段话作为结尾送给读者：只有你真心实意对待数学，数学才会真心实意回报于你. 万不要虚情假意，万不要急功近利，数学很聪明，不会被骗到. 对人、对事，均应如此.

张宇

2017 年 1 月　于北京

目录
CONTENTS

9讲

▶ 第1讲

随机事件和概率

考试要求	科目	考试内容
了解	数学一	样本空间(基本事件空间)的概念
	数学三	
理解	数学一	随机事件的概念　概率、条件概率的概念
	数学三	事件独立性的概念　独立重复试验的概念
会	数学一	计算古典型概率和几何型概率
	数学三	
掌握	数学一	事件的关系及运算　概率的基本性质
		概率的加法公式、减法公式、乘法公式、全概率公式、贝叶斯(Bayes)公式
	数学三	用事件独立性进行概率计算　计算有关事件概率的方法

内容精讲

一、随机事件与样本空间

1. 随机试验

我们称一个试验为**随机试验**,如果它满足以下三个条件:

(1)试验可以在相同的条件下重复进行;

(2)试验所有可能结果是明确可知道的,并且不止一个;

(3)每一次试验会出现哪一个结果,事先不能确定.

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的,为方便起见,将随机试验简称为**试验**,并用字母 E 或 $E_1,E_2,\cdots$表示.

【注】 在不少情况下,我们不能确切知道某一随机试验的全部可能结果,但可以知道它不超出某个范围.这时,也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果.例如,我们需要记录某个城市一天的交通事故数量,则试验结果将是非负数 x.我们无法确定 x 的可能取值的确切范围,但可以把这范围取为$[0,+\infty)$,它总能包含一切可能的试验结果,尽管我们明知某些结果,如 $x>10\ 000$ 是不会出现的.我们甚至可以把这范围取为$(-\infty,+\infty)$也无妨.这里就有了一定的数学抽象,它可以带来很大的方便.

2. 随机事件

在一次试验中可能出现,也可能不出现的结果称为**随机事件**,简称为**事件**,并用大写字母 A,B,C 等表示.为讨论需要,将每次试验一定发生的事件称为**必然事件**,记为Ω.每次试验一定不发生的事件称为**不可**

能事件，记为$\varnothing$.

【注】 随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性，这门学问正是要研究这种规律性，读者应在研究这门课程后，对此有较为深刻的认识.

3. 样本空间

随机试验每一个最简单、最基本的结果称为**基本事件**或**样本点**，记为ω. 基本事件(或样本点)的全体称为**基本事件空间**(或**样本空间**)，记为Ω，即$\Omega=\{\omega\}$. 随机事件A总是由若干个基本事件组成，即A是Ω的子集，$A\subset\Omega$. 事件A发生等价于构成A的基本事件有一个发生.

二、事件的关系与运算

1. 定义(关系：包含，相等，相容，对立；**运算**：和(并)、差、交(积))

(1)如果事件A发生必导致事件B发生，则称事件B**包含**事件A(或A被B包含)，记为$A\subset B$.

(2)如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B**相等**，记为$A=B$. A与B相等，事实上也就是说，A与B由完全同样的一些试验结果构成，它不过是同一事件表面上看来不同的两个说法而已.

(3)称"事件A与B同时发生"的事件为事件A与B的**交(或积)**，记为$A\cap B$或AB.

【注】 称"有限个(或可列个)事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$同时发生"的事件为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$的交(或积)，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$\bigcap\limits_{i}^{\infty}A_i$).

(4)若$AB\neq\varnothing$，则称事件"A和B**相容**"；若$AB=\varnothing$，则称"事件A与B不相容"，也叫**互斥**. 如果一些事件中任意两个事件都互斥，则称这些事件是**两两互斥**的，或简称**互斥**的.

(5)称"事件A与B至少有一个发生"的事件为事件A与B的**并(或和)**，记为$A\cup B$.

【注】 称"有限个(或可列个)事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$至少有一个发生"的事件为事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$的并(或和)，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$\bigcup\limits_{i}^{\infty}A_i$).

(6)称"事件A发生而事件B不发生"的事件为事件A与B的**差**，记为$A-B$；称"事件A不发生"的事件为事件A的**逆事件**或**对立事件**，记为$\overline{A}$.

由定义易知　　$A-B=A-AB=A\overline{B}$，$B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing$且$A\cup B=\Omega$.

(7)称有限个(或可列个)事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$构成**一个完备事件组**，如果$\bigcup\limits_{i}^{\infty}A_i=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing$(对一切$i\neq j$).

(8)事件的关系和运算可以用**文氏图**形象地表示出来(见图1-1，题中的矩形表示必然事件Ω).

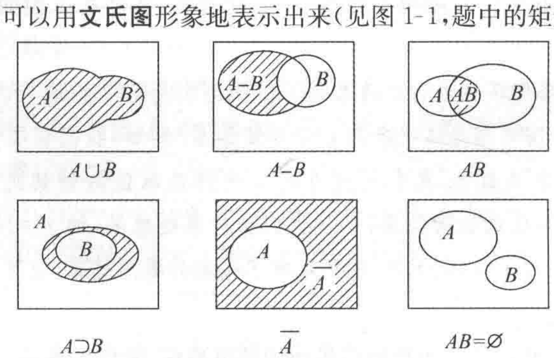


图1-1

2. 事件的关系和运算法则：

(1)吸收律　若 $A\subset B$,则 $A\cup B=B, AB=A$;

(2)交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(3)结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(4)分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup BC=(A\cup B)(A\cup C), A(B-C)=AB-AC$;

(5)对偶律(德摩根律)　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

【注】 (1)事件运算顺序约定为先进行逆运算,而后交运算,最后并或差运算.

(2)事件的关系、运算与集合的关系、运算相当,且具有相同的运算法则,所以我们可以对比着理解记忆,并要学会用集合关系去思考事件关系.

三、概率的概念和基本性质

1. 概率的三种定义

(1)概率的描述性定义

通常我们将随机事件 A 发生的可能性大小的度量(非负值),称为事件 A 发生的**概率**,记为 $P(A)$.

(2)概率的统计性定义

在相同条件下做重复试验,事件 A 出现的次数 k 和总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$,称为事件 A 在这 n 次试验中出现的**频率**. 当试验次数 n 充分大时,频率将“稳定”于某常数 p 的“附近”. n 越大,频率偏离这个常数 p 的可能性越小. 这个常数 p 就称为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)概率的统计性定义实质上是说,用频率 $\frac{k}{n}$ 作为事件 A 的概率 $P(A)$ 的估计. 其直观背景为:某事件出现的可能性大小,可由其在多次重复试验中出现的频率去刻画.

(2)从上述(1)可以看出,频率只是概率的估计,而非概率本身. 也就是说,概率的统计性定义是无法准确给出某事件的概率的. 其重要性主要基于以下两点:

(ⅰ)它提供了估计概率的方法,比如在一批产品中抽取样品,来估计该批产品的合格率(合格率是客观的数据,抽取样品计算出来的合格率,只是一种估计);(ⅱ)它提供了一种检验某结论是否正确的准则,比如,你说某批产品的合格率是 95%,我们做实验,抽取样品进行计算,得出的结果,合格率是 20%,远远低于你所说的 95%这个数据,于是毫不犹豫地拒绝你的结论.

(3)概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω,如果对每一个事件 A 都赋一个确定的实数 $P(A)$,且事件函数 $P(\cdot)$ 满足:

① 非负性:$P(A)\geqslant 0$;

② 规范性:$P(\Omega)=1$;

③ 可列可加性:对任意可列个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$(即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$),有

$$P\left(\bigcup_{i}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(\cdot)$ 为**概率**,$P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

【注】 (1)数学上所说的"公理",就是一些不加证明而承认的前提,上述公理化定义只是界定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质,它不解决具体场合下的概率计算;

(2)概率 $P(\cdot)$是事件的函数;

(3)虽然它不解决具体场合下的概率计算,但是我们却常常用它来判断某事件函数 $P(\cdot)$是否是概率,这种题型在考研试题中也是经常遇到的.

2. 概率的基本性质

由概率的公理化定义,我们可以得到如下的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

性质 3(单调性) 设 A,B 是两个事件,若 $A\subset B$,则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),P(B)\geqslant P(A).$$

性质 4(有界性) 对于任一事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

【注】 $P(A)=0$,不能断言 $A=\varnothing$;$P(A)=1$,不能断言 $A=\Omega$. 其中道理可从前言中悟出.

性质 5(逆事件的概率) 对于任一事件 A,有 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 6(加法公式) 对于任意两事件 A,B,有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

【注】 上式还能推广到多个事件的情况.

(1)设 A_1,A_2,A_3 为任意三个事件,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

(2)对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,可以用数学归纳法证得

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).$$

性质 7(减法公式) $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B})$.

四、古典型概率和几何型概率

下面研究两种非常重要的概率类型:古典型概率和几何型概率.

1. 称随机试验(随机现象)的概率模型为**古典概型**,如果其基本事件空间(样本空间)满足:

(1)只有有限个基本事件(样本点);

(2)每个基本事件(样本点)发生的可能性都一样.

如果古典概型的基本事件总数为 n,事件 A 包含 k 个基本事件,也叫做有利于 A 的基本事件为 k 个,则 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 }A\text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**古典概率**.

2. 称随机试验(随机现象)的概率模型为**几何概型**,如果:

(1)样本空间(基本事件空间)Ω 是一个可度量的几何区域;

(2)每个样本点(基本事件)发生的可能性都一样,即样本点落入 Ω 的某一可度量的子区域 S 的可能性大小与 S 的几何度量成正比,而与 S 的位置及形状无关.

在几何概型随机试验中，如果 S_A 是样本空间 Ω 的一个可度量的子区域，则事件 $A=\{$样本点落入区域 $S_A\}$的概率定义为

$$P(A)=\frac{S_A \text{ 的几何度量}}{\Omega \text{ 的几何度量}}.$$

由上式计算的概率称为 A 的**几何概率**.

【注】 古典概型与几何概型的区别是：基本事件有限、等可能的随机试验为古典概型；基本事件无限且具有几何度量、等可能的随机试验为几何概型.

五、条件概率及与其有关的三个概率公式：乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式

1. 条件概率

设 A,B 为任意两个事件，若 $P(A)>0$，我们称在已知事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的概率为条件概率，记为 $P(B|A)$，并定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}(P(A)>0).$$

【注】 (1)条件概率 $P(\cdot|A)$是概率，概率的一切性质和重要结果对条件概率都适用.

例如：

$$P(\overline{B}|A)=1-P(B|A),$$
$$P(B-C|A)=P(B|A)-P(BC|A)$$

等等.

(2)条件概率就是在附加了一定的条件之下所计算的概率. 当说到"条件概率"时，总是指另外附加的条件，其形式可归结为"已知某事件发生了".

2. 乘法公式

如果 $P(A)>0$，则 $P(AB)=P(A)P(B|A)$.

一般地，如果 $P(A_1\cdots A_{n-1})>0$，则 $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1})$.

3. 全概率公式

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega, A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，$P(A_i)>0$，则对任一事件 B，有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n} A_iB, P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i).$$

4. 贝叶斯公式(又称逆概公式)

如果 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i=\Omega, A_iA_j=\varnothing(i\neq j), P(A_i)>0$，则对任一事件 B，只要 $P(B)>0$，就有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)P(B\mid A_i)}(j=1,2,\cdots,n).$$

【注】 (1)要注意 $P(AB)$与 $P(B|A)$的区别：

$P(AB)$是在样本空间为 Ω 时，A 与 B 同时发生的可能性，而 $P(B|A)$则是表示在 A 已经发生的条件下，B 发生的可能性，此时样本空间已缩减，只要题目中有前提条件："在 A 发生的条件下"或"已知 A 发生"等等，均要考虑条件概率.

(2)全概率公式是用于计算某个"结果"B 发生的可能性大小. 如果一个结果 B 的发生总是与某些前提条件(或原因、因素或前一阶段结果)A_i 相联系，那么在计算 $P(B)$时，我们总是用 A_i 对 B 作分解：

$$B=\bigcup_{i}^{\infty} A_i B,$$

应用全概率公式计算 $P(B)$，我们常称这种方法为**全集分解法**. 如果在 B 发生的条件下探求导致这一结果的各种“原因”A_i 发生的可能性大小 $P(A_i|B)$，则要应用贝叶斯公式.

六、事件的独立性和独立重复试验

1. 事件的独立性

(1)独立性定义

①**描述性定义(直观性定义)**　设 A,B 为两个事件，如果其中任何一个事件发生的概率不受另外一个事件发生与否的影响，则称事件 A 与 B **相互独立**. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果其中任何一个或几个事件发生的概率都不受其余的某一个或几个事件发生与否的影响，则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

②**数学定义**　设 A,B 为事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B **相互独立**，简称为 A 与 B **独立**.

【注】 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件，如果对其中任意有限个事件 $A_{i1},A_{i2},\cdots,A_{ik}(k\geqslant 2)$，有

$$P(A_{i1}A_{i2}\cdots A_{ik})=P(A_{i1})P(A_{i2})\cdots P(A_{ik}),$$

则称 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.

考研中常考的是 $n=3$ 的情形. 细致说来，设 A_1,A_2,A_3 为 3 个事件，若

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2), \tag{1.1}$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3), \tag{1.2}$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3), \tag{1.3}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3), \tag{1.4}$$

则称 A_1,A_2,A_3 **相互独立**. 当去掉上述(1.4)式后，称只满足(1.1)(1.2)(1.3)的 A_1,A_2,A_3 **两两独立**. 见例 1.32.

(2)独立性的判定

①**直观性判定**

若试验独立，则其结果必相互独立. 例如：甲、乙各自试验结果相互独立；袋中有放回取球，其结果相互独立等.

②**充要条件**

a. $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立$\Leftrightarrow$任意 $k\geqslant 2$，$P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{k} A_j\right)=\prod\limits_{j=1}^{k} P(A_j)$.

特别地，A,B 独立$\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)$.

若 $0<P(A)<1$，则 A,B 独立$\Leftrightarrow P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B)\Leftrightarrow P(B|A)+P(\overline{B}|\overline{A})=1$.

b. n 个事件相互独立的充要条件是：它们中任意一部分事件换成各自的对立事件所得到的 n 个事件相互独立.

③**必要条件**

a. n 个事件相互独立，则必两两独立，反之不然.

b. n 个事件相互独立，则不含相同事件的事件组经某种运算后所得的事件是相互独立的. 例如，A,B,