中级微观经济学

（第二版）

主编　李毅　张树民

西南财经大学出版社

中级微观经济学

（第二版）

主编　李毅　张树民

西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

中级微观经济学／李毅，张树民主编．—2版．—成都：西南财经大学出版社，2017.1

ISBN 978－7－5504－2788－4

Ⅰ.①中…　Ⅱ.①李…②张…　Ⅲ.①微观经济学　Ⅳ.①F016

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第001533号

中级微观经济学(第二版)

主编：李毅　张树民

责任编辑：胡莎

封面设计：杨红鹰

责任印制：封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028－87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	12.25
字　　数	240千字
版　　次	2017年1月第2版
印　　次	2017年1月第1次印刷
印　　数	1—2000册
书　　号	ISBN 978－7－5504－2788－4
定　　价	25.00元

前　言

伴随中国改革开放后持续快速的经济增长，中国经济学教育的现代化也取得了重大进展。进入21世纪，西南财经大学确定中级微观经济学为研究生基础课程，并以“规范化、国际化”为目标，将其作为重点课程加以建设。该课程经过十余年的建设，取得了一些成果和经验，本教材就是这一课程建设的具体反映。

便于教学使用是我们编写本教材的核心思路。为此，本教材具有了如下特征：①摒弃一些教材章节过多、过于分散的弊病，把全部内容归纳为15章，非常适合在一学期之内教授或学习中级微观经济学课程使用。②很多教师在教学中发现，课堂讲授时间不够。实际上，更有效率的教学方式是课堂教学和课后学习相结合。但这就需要所选择的教材表述准确，叙述详尽，易于理解。本教材恰好按照此要求编写而成。③一个最终拿到经济学博士学位的人在求学过程中可能依次学习过微观经济学、中级微观经济学和高级微观经济学三门课程。这就要求为中级微观经济学课程编写的教材的内容必须适中，能够使初学过微观经济学的人有所收获，而又可为准备学习高级微观经济学的人提供必需的基础。本教材就按此要求编写而成。④掌握中级微观经济学的重要方法是做一些必要的练习。为此，我们专门编写了本教材的配套读物《中级微观经济学学习指南》。本教材每章后面的课后思考题都在该学习指南中作为例题给出了详细的分析过程。

本书已在2008年出了第一版。本书一经推出，受到了广大读者的欢迎，但也有很多读者指出了其中的错误和不足。在此基础上，本书作者做了相应的调整和修改。在修改时我们做了如下考虑：①尽量保持第一版的风格，仍然分为15章，难度也大致保持不变。②对个别知识点做了调整，对一些错误的地方做了修正。③对应的《中级微观经济学学习指南》也做了相应调整，并删减了部分不合适宜的题目，增加了一些新的题目。

本教材第一版的编写分工如下：李毅负责第一章至第六章，张树民负责第七至第十二章，吴开超与屈改柳负责第十三至第十五章。第二版的修改由李毅完成。在这里特别需要指出的是，第一版中的主编之一张树民同志因病于2010年去世，这本书的形成曾经凝聚了他大量心血，这次改版也算对他在天之灵的告慰。

本教材的编者长期从事此课程的教学工作，积累了丰富的经验和教学素材。实际上，本教材就是在我们教学讲义的基础上整理而成的。但是，我们必须向以下教材

的作者致谢。长期以来,这些优秀的教材都是我们基础知识和思想灵感的源泉。这些教材包括:《微观经济学:现代观点》《微观经济理论:基本原理与扩展》,等等,请恕我们不在此一一列举。

由于水平所限,也可能由于疏忽所致,教材中的错误之处可能难以避免,敬请读者批评指正,并提供宝贵的修改意见。

编　者

2016年12月于光华园

目 录

第一章 最优化方法 ………………………………………… (1)

第一节 集合和函数的基本概念 ……………………………… (1)
第二节 微分和求导 ……………………………………………… (2)
第三节 最优化 …………………………………………………… (5)
复习思考题 ………………………………………………………… (9)

第二章 偏好与效用 ………………………………………… (10)

第一节 商品与预算集 …………………………………………… (10)
第二节 偏好与无差异曲线 ……………………………………… (13)
第三节 效用函数 ………………………………………………… (19)
复习思考题 ………………………………………………………… (23)

第三章 效用最大化和支出最小化 ………………………… (24)

第一节 效用最大化 ……………………………………………… (24)
第二节 支出最小化 ……………………………………………… (30)
复习思考题 ………………………………………………………… (34)

第四章 比较静态和福利分析 ……………………………… (35)

第一节 收入变化和价格变化分析 ……………………………… (35)
第二节 收入效应和替代效应 …………………………………… (37)
第三节 弹性 ……………………………………………………… (42)
第四节 消费者福利变化的度量 ………………………………… (45)
复习思考题 ………………………………………………………… (47)

第五章 具有初始禀赋的消费者行为 ……………………… (48)

第一节 基本理论 ………………………………………………… (48)
第二节 劳动供给的选择 ………………………………………… (54)

第三节　跨期选择 ………………………………………………（56）
复习思考题 ………………………………………………（60）

第六章　不确定条件下消费者行为选择 ………………………………（61）

第一节　基本概念 ………………………………………………（61）
第二节　期望效用函数 ……………………………………………（62）
第三节　不确定性条件下的最优选择 ……………………………（66）
复习思考题 ………………………………………………（69）

第七章　生产者行为理论 ………………………………………………（70）

第一节　生产技术 ………………………………………………（70）
第二节　成本最小化 ……………………………………………（74）
第三节　利润最大化 ……………………………………………（80）
复习思考题 ………………………………………………（84）

第八章　完全竞争市场局部均衡与福利 ………………………………（85）

第一节　市场均衡 ………………………………………………（85）
第二节　资源配置与市场福利 ……………………………………（91）
复习思考题 ………………………………………………（95）

第九章　完全竞争市场一般均衡与福利 ………………………………（96）

第一节　交换 ………………………………………………（96）
第二节　生产 ………………………………………………（105）
第三节　生产与交换 ……………………………………………（109）
复习思考题 ………………………………………………（112）

第十章　垄断 ………………………………………………（113）

第一节　线性定价模型 ……………………………………………（113）
第二节　价格歧视 ………………………………………………（116）
第三节　自然垄断及治理 …………………………………………（122）
复习思考题 ………………………………………………（124）

第十一章　寡头市场 ………………………………………………（125）

第一节　合作的寡头——卡特尔模型 ……………………………（126）

第二节　竞争的寡头模型 …………………………………………… (128)
第三节　无限次重复性的相互作用与默契合谋 ………………………… (133)
复习思考题 …………………………………………………………… (135)

第十二章　博弈论基础 ……………………………………………… (136)

第一节　完全信息静态博弈 ………………………………………… (137)
第二节　完全信息动态博弈 ………………………………………… (144)
复习思考题 …………………………………………………………… (151)

第十三章　外部性和公共物品 ……………………………………… (152)

第一节　生产的外部性 ……………………………………………… (152)
第二节　消费的外部性 ……………………………………………… (157)
第三节　公地的悲剧 ………………………………………………… (162)
第四节　公共物品 …………………………………………………… (163)
复习思考题 …………………………………………………………… (168)

第十四章　不对称信息 ……………………………………………… (170)

第一节　次品市场的逆向选择 ……………………………………… (170)
第二节　文凭信号模型 ……………………………………………… (173)
第三节　道德风险与激励 …………………………………………… (174)
第四节　保险市场 …………………………………………………… (176)
复习思考题 …………………………………………………………… (180)

第十五章　社会福利与公共选择 …………………………………… (181)

第一节　社会选择 …………………………………………………… (181)
第二节　社会福利函数 ……………………………………………… (183)
第三节　公平配置 …………………………………………………… (186)
复习思考题 …………………………………………………………… (187)

第一章　最优化方法

在现代经济学中，会用到一些数学知识，特别是最优化的方法。本章会对本教材用到的一些数学工具加以简单的介绍，特别是关于函数、微积分和最优化理论的相关知识。我们在介绍数学知识的时候，更多的是注重对经济学的应用，不追求数学的完整性和严谨性。

第一节　集合和函数的基本概念

集合是指由所有对象组成的全体，集合中的每一个对象称为元素。通常用 X 表示集合，用 x 表示集合中的元素。在经济学中用的最多的集合就是实数集 R，有时候我们也会用到正实数集 R^+。在经济学中往往要用到 n 维的实数集 R^n 和 n 维正实数集 R^n_+。比如，在本教材中经常用到的由两种商品组成的商品集 $X=\{x \mid x=(x_1,x_2),x_1 \geqslant 0,x_2 \geqslant 0\}$ 就是一个二维实数集。

在经济分析中有一类集合显得非常重要，这类集合为凸集。若集合 X 中的任意两点 x^a,x^b，对每一个 $t \in [0,1]$，点 $x^t=tx^a+(1-t)x^b$ 也属于集合 X，则称 X 为凸集。

现在以一个二维集合为例来看看凸集。如果 $X=\{x \mid x=(x_1,x_2)\}$ 是凸集，那么意味着对于任意两点 $x^a=(x_1^a,x_2^a) \in X$ 和 $x^b=(x_1^b,x_2^b) \in X$，点 $x^t=(tx_1^a+(1-t)x_1^b, tx_2^a+(1-t)x_2^b) \in X$。图 1－1 是关于凸集的直观图示：

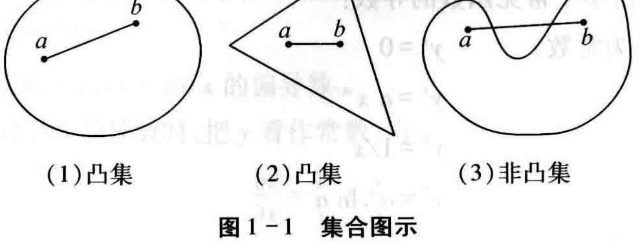

图 1－1　集合图示

在图 1－1 中，(1)、(2)都是凸集，而(3)不是。从图形上判别一个集合是不是凸集，就看这个集合中任意两点的连线是否都在这个集合内。如果在集合内，那么这个

集合就是凸集,否则就不是。

函数是指数学中的一种对应关系。具体说,设 X 是一个非空集合,Y 是一个非空数集,f 是对应法则,若对 X 中的每个 x,按对应法则 f,使 Y 中存在唯一的一个元素 y 与之对应,则称对应法则 f 是 X 上的一个函数,记作 $y=f(x)$,称 X 为函数 $f(x)$ 的定义域,集合 $\{y|y=f(x),x\in X\}$ 为其值域(值域是 Y 的子集),x 叫作自变量,y 叫作因变量,习惯上也说 y 是 x 的函数。

本教材中常用的函数是一元函数 $y=f(x)$ 和二元函数 $y=f(x_1,x_2)$。这些函数在数学中都属于显函数,因为 y 都可以由 x 显性表示出来。还有一类函数称为隐函数,即 y 没有由 x 显性表示出来,其一般形式为 $F(x,y)=0$。

第二节　微分和求导

微分和求导在经济学中的运用非常广泛。在本教材中,用得最多的是一元函数和二元函数的求导和微分,而且经济学中求导一般不超过二阶,因此这里重点讲解一元函数和二元函数的一阶导数和二阶导数。

一、一元函数的导数和微分

假设一元函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的附近 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 内有定义,当自变量的增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时,函数值的增量 $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ 与自变量增量比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的极限存在且有限,就说函数 f 在 x_0 点可导,并称之为 f 在 x_0 点的一阶导数(或变化率)。若函数 f 在定义域内的每一点都可导,便得到一个在定义域上的新函数,记作 $f'(x)$, f', y' 或者 dy/dx,称为 f 的导函数,简称为导数。函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义为:曲线在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线的斜率。

$y=f(x)$ 的微分表示为 dy, $dy=f'(x)dx$。

下面给出经济学中常见函数的导数:

(1) $y=C$ (C 为常数)　　$y'=0$

(2) $y=x^a$　　$y'=a\,x^{a-1}$

(3) $y=\ln x$　　$y'=1/x$

(4) $y=a^x$　　$y'=a^x\ln a$

特别地

$y=e^x$　　$y'=e^x$

以下是函数的和、差、积、商的求导法则:

(1) $y = f(x) + g(x)$ 　　　$y' = f'(x) + g'(x)$

(2) $y = f(x) - g(x)$ 　　　$y' = f'(x) - g'(x)$

(3) $y = f(x)g(x)$ 　　　$y' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

(4) $y = f(x)/g(x)$ 　　　$y' = [f'(x)g(x) - f(x)g'(x)]/g^2(x)$

复合函数的求导法则：

$y = f(g(x))$ 　　　$y' = f'(g(x))g'(x)$

反函数的求导法则：

如果 $y = f(x)$ 的反函数为 $x = h(y)$，则有

$$f'(x) = \frac{1}{h'(y)} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dy}$$

一元函数 $y = f(x)$ 的一阶导数是求导的基础，必须熟练掌握。接下来，我们讨论一元函数的二阶导数。一元函数的一阶导数实际上也是自变量 x 的函数，所以可以对一阶导数再次求导，就可以得到一元函数的二阶导数，我们记为 y''，$f''(x)$，d^2y/dx^2。

同样我们可以得到二阶全微分 $d^2y = f''(x)dx^2$。

直观来看，二阶导数就是变化率的变化率，在曲线上就是斜率的变化率。实际上二阶导数的大小可以用来表征函数或图形的凹凸性。关于函数的凹凸性，后面的章节有专门的介绍。

二、二元函数的导数和微分

（一）一阶偏导数和一阶全微分

设有二元函数 $y = f(x_1, x_2)$，因此 y 的变化由 x_1，x_2 的变化所引起，这时对二元函数求导就有两个导数，我们称为一阶偏导数。具体而言，y 对 x_1 的一阶偏导数是指当 x_2 保持不变时，y 的变化量 Δy 与 x_1 的变化量 Δx_1 的比值的极限，记为 $\partial y/\partial x_1$，$\partial f/\partial x_1$，f_1' 或 f_1。同理，我们也可以得到 y 对 x_2 的一阶偏导数，记为 $\partial y/\partial x_2$，$\partial f/\partial x_2$，f_2' 或 f_2。

计算一阶偏导数的方法很简单，只要把其他变量看作常数，剩下的就相当于对要求的自变量求一阶导数。

例 1：　求函数 $z = x/y + y\ln x$ 的偏导数。

解：　求 z 对 x 的偏导数时，把 y 看作常数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{y}{x}$$

同理有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \ln x$$

一阶偏导数在经济学中有很强的经济解释。经济学中边际的概念就是用一阶偏导数来表示的。经济学中边际的概念是指在保持其他条件不变的情况下,自变量的变化对因变量变化的影响,这正好对应着数学中一阶偏导的定义。例如经济学中的边际效用无非就是效用函数的一阶偏导,资本的边际收益就是总收益函数对资本量的一阶偏导。

偏导数是指其他变量不变时,某个自变量变化对因变量变化的影响。但因变量变化往往是由多个自变量变化所引起的,为了说明这种情况,就有了全微分的概念。二元函数 $y=f(x_1,x_2)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

例 2: 求例 1 中函数的全微分。

解: 根据例 1 的结果有

$$\mathrm{d}z=\left(\frac{1}{y}+\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(-\frac{x}{y^2}+\ln x\right)\mathrm{d}y$$

有了二元函数的偏导数和全微分,我们就可以求解隐函数的导数。

设有隐函数 $F(x,y)=0$,实际上这里隐含着 y 是 x 的函数,那么 y 对 x 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{(\partial F/\partial x)}{(\partial F/\partial y)}$$

证明: 因为 $F(x,y)=0$

两边求全微分 $\mathrm{d}F(x,y)=0$,即

$$\partial F/\partial x\mathrm{d}x+\partial F/\partial y\mathrm{d}y=0$$

变形后得到上述结论。

(二)二阶偏导数和二阶全微分

二元函数 $y=f(x_1,x_2)$ 的二阶偏导数一共有四个,分别是 y 对 x_1 的二阶偏导数,记为$\partial^2 y/\partial x_1^2$, f''_{11}或f_{11};y 对 x_2 的二阶偏导数,记为$\partial^2 y/\partial x_2^2 f''_{22}$或$f_{22}$;$y$ 对 x_1 和 x_2 的二阶混合偏导数,记为$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$, f''_{12}或f_{12};y 对 x_2 和 x_1 的二阶混合偏导数,记为$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}$, f''_{21}或f_{21}。

杨氏定理: 若$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}$和$\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}$连续,则两者相等,即

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1}\text{或}f_{12}=f_{21}$$

二阶(偏)导数在经济学中都是表示变化率的变化率,在经济学中就可以用二阶(偏)导数来表示边际的变化率,比如用来表示边际效用递减或者边际成本递增等。

我们也可以得到二阶全微分,用 d^2y 表示,代表 y 的一阶全微分后的再次全微分

$$d^2y = f_{11}d\,x_1^2 + 2f_{12}dx_1\,dx_2 + f_{22}d\,x_2^2$$

证明：　　$dy = \partial y/\partial x_1 dx_1 + \partial y/\partial x_2 dx_2 = f_1 dx_1 + f_2 dx_2$

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy) \\ &= (f_{11}\,dx_1 + f_{12}\,dx_2)dx_1 + (f_{21}\,dx_1 + f_{22}\,dx_2)dx_2 \\ &= f_{11}dx_1^2 + f_{12}dx_1\,dx_2 + f_{21}\,dx_1 dx_2 + f_{22}dx_2^2 \end{aligned}$$

根据杨氏定理,最后得到

$$d^2y = f_{11}dx_1^2 + 2f_{12}dx_1\,dx_2 + f_{22}dx_2^2$$

(三)齐次函数

若函数 $y=f(x_1,x_2)$ 对于任意的 $t>0$,有 $f(tx_1,tx_2)=t^kf(x_1,x_2)$,则称函数 $y=f(x_1,x_2)$ 为 k 次齐次函数。在经济学中,常用的齐次函数为零次齐次函数和一次齐次函数。

齐次函数中有一个很重要的定理——欧拉公式在经济学中非常有用,介绍如下:

欧拉公式：　若 $y=f(x_1,x_2)$ 是 k 次齐次函数,则有

$$f_1\cdot x_1 + f_2\cdot x_2 = kf(x_1,x_2)$$

证明：　因为 $f(tx_1,tx_2)=t^kf(x_1,x_2)$

两边同时对 t 求导,得

$$\frac{\partial f(tx_1,tx_2)}{\partial(tx_1)}x_1 + \frac{\partial f(tx_1,tx_2)}{\partial(tx_2)}x_2 = k\,t^{k-1}f(x_1,x_2)$$

令 $t=1$,则上式变为

$$f_1\cdot x_1 + f_2\cdot x_2 = kf(x_1,x_2)$$

当 $k=1$, $f_1\cdot x_1+f_2\cdot x_2=f(x_1,x_2)$;

当 $k=0$, $f_1\cdot x_1+f_2\cdot x_2=0$。

第三节　最优化

在经济学中,经常要碰到效用最大化、成本最小化、利润最大化等问题,这些问题都是要求极(最)大值或极(最)小值,统统都可以归结为最优化问题。现在我们就来学习一些基本的最优化的方法。

一、无约束的最优化

(一)一元函数的最优化

一元函数的最优化问题比较简单,但对后面的最优化问题有很强的启示,我们先讨论最大化问题 max $y=f(x)$。

我们知道，当上式实现最大化时，必须满足一阶条件和二阶条件，一阶条件是必要条件，二阶条件是充分条件。

一阶条件：当 x^* 为最优解时，有 $f'(x^*)=0$

二阶条件：当 x 为 x^* 时，$d^2y<0$，即 $f''(x^*)<0$

$f''(x)<0$ 实际上要求函数为凹函数。

对于最小化问题 $\min y=f(x)$。

一阶条件：当 x^* 为最优解时，有 $f'(x^*)=0$

二阶条件：当 x 为 x^* 时，$d^2y>0$，即 $f''(x^*)>0$

$f''(x)>0$ 实际上要求函数为凸函数。

(二)二元函数的最优化

对于最大化问题 $\max y=f(x_1,x_2)$。

一阶条件：当(x_1^*,x_2^*)为最优解时，有

$$f_1(x_1^*,x_2^*)=f_2(x_1^*,x_2^*)=0$$

二阶条件：当 x 为(x_1^*,x_2^*)时，有 $f_{11}<0$ 且 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$

现在来证明二阶条件：

当(x_1^*,x_2^*)满足一阶条件时，并不一定能实现 y 的最大化，必须要满足二阶条件才能使 y 取得最大值，二阶条件的要求是 $d^2y<0$。

$$\begin{aligned} d^2y &= f_{11}d\,x_1^2+2f_{12}dx_1\,dx_2+f_{22}d\,x_1^2 \\ &= f_{11}\left(dx_1+\frac{f_{12}}{f_{11}}\right)^2+\frac{f_{11}f_{22}-f_{12}^2}{f_{11}}(dx_2)^2 \end{aligned}$$

要 $d^2y<0$ 就必须要有

$$f_{11}<0\text{ 且}(f_{11}f_{22}-f_{12}^2)/f_{11}<0$$

即

$$f_{11}<0\text{ 且 }f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$$

因为 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2=\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$，所以二阶条件也可以写成

$$f_{11}<0\text{ 且 }\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}>0$$

经济学中，$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix}$ 被称为海塞行列式，用 H 表示。

对于最小化问题 $\min y=f(x_1,x_2)$。

一阶条件：当(x_1^*,x_2^*)为最优解时，有

$$f_1(x_1^*,x_2^*)=f_2(x_1^*,x_2^*)=0$$

二阶条件：当 x 为 (x_1^*, x_2^*) 时，有 $f_{11}>0$ 且 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$，或者

$$f_{11}>0 \text{ 且 } \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} >0$$

（三）函数的凹凸性

当函数为凹函数时，函数可以取得最大值；当函数为凸函数时，函数可以取得最小值，如图 1－2 所示：

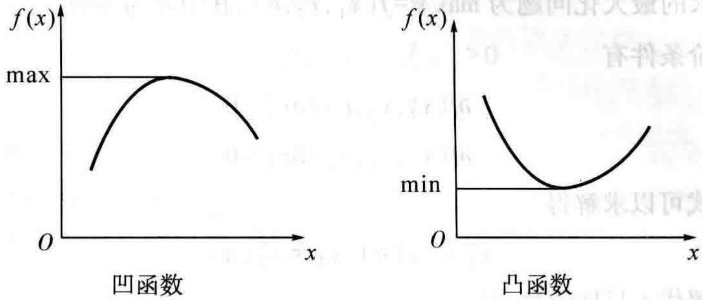

图 1－2　凹、凸函数的最值

现在我们就给出函数凹凸性的定义：

$$\text{函数 } y=f(x_1,x_2)$$

定义 1：　对于任意两点 $x^a=(x_1^a,x_2^a)$ 和 $x^b=(x_1^b,x_2^b)$，

如果 $\theta f(x_1^a,x_2^a)+(1-\theta)f(x_1^b,x_2^b)\leqslant f[\theta x_1^a+(1-\theta)x_1^b,\ \theta x_2^a+(1-\theta)x_2^b]$，那么 $f(x_1,x_2)$ 为凹函数。

如果 $\theta f(x_1^a,x_2^a)+(1-\theta)f(x_1^b,x_2^b)\geqslant f[\theta x_1^a+(1-\theta)x_1^b,\ \theta x_2^a+(1-\theta)x_2^b]$，那么 $f(x_1,x_2)$ 为凸函数。

其中 $\theta\in[0,1]$。当不等于严格成立时，称 $f(x_1,x_2)$ 为严格凹（凸）函数。

从图形上看，当曲线上任意两点的连线都在曲线的下方时，函数为凹函数。当曲线上任意两点的连线都在曲线的上方时，函数为凸函数，如图1－3所示。

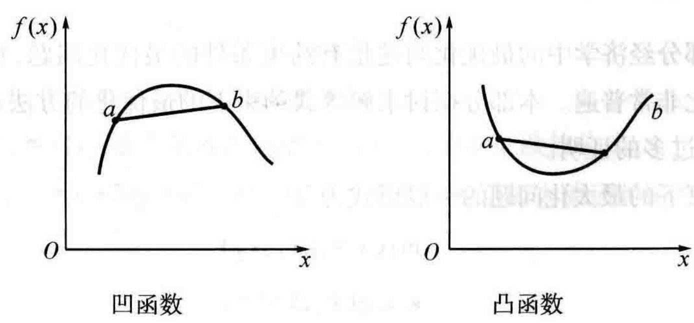

图 1－3　凹、凸函数的判定

定义2： 当函数 $y=f(x_1,x_2)$ 可导时，

若 $f_{11}<0$ 且 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$，则 $f(x_1,x_2)$ 为凹函数。

若 $f_{11}>0$ 且 $f_{11}f_{22}-f_{12}^2>0$，则 $f(x_1,x_2)$ 为凸函数。

比较这个定义和前面最优化问题的二阶条件，我们就可以看到，两者是一样的。换句话说，当函数为凹（凸）函数时，函数就自动满足了最大（小）值的二阶条件了。

（四）带参变量的最优化及包络定理

现在要求的最大化问题为 $\max y=f(x_1,x_2,a)$，其中 a 为参数。

根据一阶条件有

$$\partial f(x_1,x_2,a)/\partial x_1=0$$

$$\partial f(x_1,x_2,a)/\partial x_2=0$$

由上两式可以求解得

$$x_1^*=x_1^*(a),x_2^*=x_2^*(a)$$

把最优解代入目标函数，得

$$y^*=f(x_1^*(a),\ x_2^*(a),a)$$

从上式得知最优值实际上是参数 a 的函数，即 $y^*=y^*(a)$，我们把这个函数称为值函数。现在我们想看看参数 a 的变化对值函数的影响，即求 $\mathrm{d}y^*/\mathrm{d}a$。

$$\frac{\mathrm{d}y^*}{\mathrm{d}a}=\left[\frac{\partial f(x_1,x_2,a)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a}+\frac{\partial f(x_1,x_2,a)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a}+\frac{\partial f(x_1,x_2,a)}{\partial a}\right]_{(x_1^*,x_2^*)}$$

由一阶条件可知，前两项为0，则

$$\frac{\partial y^*}{\partial a}=\frac{\partial f(x_1,x_2,a)}{\partial a}\Bigg|_{(x_1^*,x_2^*)}$$

这说明值函数对参变量求导就等于原函数直接对参变量求导，这就是所谓的包络定理。包络定理在今后的章节中大量运用，可以大大简化我们的运算。

二、等式约束下的最优化

很大一部分经济学中的最优化问题是有约束条件的最优化问题，特别是等式约束下的最优化非常普遍。本部分探讨求解等式约束下的最优化的方法和需要满足的条件，不给出过多的证明。

等式约束下的最大化问题的一般形式为

$$\max y=f(x_1,x_2)$$

$$\text{s. t. } g(x_1,x_2)=c$$

求解这个问题的一般方法为拉格朗日乘数法，构造拉格朗日函数

$$L=f(x_1,x_2)+\lambda[c-g(x_1,x_2)]$$

一阶条件为

$$\partial L/\partial x_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$\partial L/\partial x_2 = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda = c - g(x_1, x_2) = 0$$

前面两个等式可以合为一个,即

$$f_1/g_1 = f_2/g_2 = \lambda$$

二阶条件为

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & g_1 & g_2 \\ g_1 & L_{11} & L_{12} \\ g_2 & L_{21} & L_{22} \end{vmatrix} > 0$$

我们把 $\bar{H}$ 称为加边的海塞行列式。

对于等式约束下的最小化问题:

$$\min y = f(x_1, x_2)$$

$$\text{s. t. } g(x_1, x_2) = c$$

构造拉格朗日函数

$$L = f(x_1, x_2) + \lambda[c - g(x_1, x_2)]$$

一阶条件为

$$\partial L/\partial x_1 = f_1 - \lambda g_1 = 0$$

$$\partial L/\partial x_2 = f_2 - \lambda g_2 = 0$$

$$\partial L/\partial \lambda = c - g(x_1, x_2) = 0$$

二阶条件为加边的海塞行列式小于0,即 $\bar{H} < 0$。

复习思考题

1. $u = f(x^2 y, x/y^2)$,求 u 的一阶偏导数和全微分。
2. 求题1中的函数的所有二阶偏导数。
3. 函数 $y = x_1^a x_2^b$ 是否是齐次函数?如果是,请验证欧拉公式。
4. 求函数 $z = x + 2ey - e^x - e^{2y}$ 的极值,并且判断是极大值还是极小值。
5. 求下列问题的解:

$$\max y = x_1^2 x_2$$

$$\text{s. t. } 5x_1 + 2x_2 = 300$$