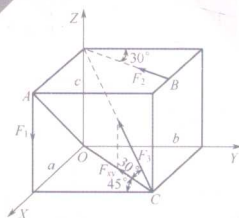


高等学校教育教材

应用理论力学

曾祥延 编著



Applied Theoretical Mechanics



中国轻工业出版社

全国百佳图书出版单位

高等学校教育教材

应用理论力学

曾祥延 编著

 中国轻工业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

应用理论力学/曾祥延编著. —北京: 中国轻工业出版社, 2017. 4

高等学校教育教材

ISBN 978-7-5184-1225-9

I. ①应… II. ①曾… III. ①理论力学—高等学校—教材 IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 311577 号

内容提要

本教材讲授的内容与一般理论力学教材相同, 而内容的编排改变了传统理论力学将内容划分为静力学、运动学和动力学分别进行讲授的做法, 按理论力学所研究的机械运动的类别进行内容的划分和编排。每章讲述一种机械运动的分析研究方法, 包括对该种机械运动的描述与分析, 以及应用定理、定律对该种机械运动进行受力分析和计算的方法步骤。所研究的物体的机械运动有平衡 (静止或作匀速直线运动)、平行移动、定轴转动、平面运动和定点运动等。

本教材可作为工科大学、职业学院机械、土木工程、水利、电机等专业理论力学的教学用书, 也可供有关专业的工程技术人员参考。

责任编辑: 李建华 责任终审: 劳国强 封面设计: 锋尚设计
版式设计: 宋振全 责任校对: 燕杰 责任监印: 张可

出版发行: 中国轻工业出版社 (北京东长安街 6 号, 邮编: 100740)

印刷: 北京君升印刷有限公司

经销: 各地新华书店

版次: 2017 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

开本: 787 × 1092 1/16 印张: 24

字数: 550 千字

书号: ISBN 978-7-5184-1225-9 定价: 68.00 元

邮购电话: 010-65241695 传真: 65128352

发行电话: 010-85119835 85119793 传真: 85113293

网址: <http://www.chlip.com.cn>

Email: club@chlip.com.cn

如发现图书残缺请直接与我社邮购联系调换

160379J2X101ZBW

前言

传统的理论力学教材一般将理论力学划分为静力学、运动学和动力学三部分分别进行讲授。内容编排围绕定理、定律进行，大约是每章讲述一个定理或定律及其应用。这样安排理论体系完整、结构严谨，但过分偏重理论分析，没有突出理论力学的应用性，这对于着重技术应用的机械、土木工程等工科专业的教学是不够合理的。本教材为了突出理论力学在工程技术上的应用，按理论力学所研究的机械运动的类别进行内容的划分和编排，每章讲述一种机械运动的分析与研究，包括该种机械运动的描述与分析，及应用相关定理、定律对其进行受力分析与计算的方法步骤。这样编排使学生知道每章内容研究解决什么问题，学习目的明确将使学生的学习兴趣大为增加。鉴于本教材内容安排上的这些特点，故取名为《应用理论力学》。

本教材教学内容还有如下特点：（1）摒弃从概念出发研究问题的方法，在分析推导定理、定律过程中引出概念。（2）将滑动摩擦力和滚动摩擦力偶看作约束反力，在约束与约束反力中作介绍。考虑摩擦的物体平衡问题放在一般物体平衡问题中，通过例题介绍其求解的方法。（3）工程中一些常见的动力学问题如碰撞、振动等集中放在最后一章讲述。

本教材承华南建设学院副教授王则楚审阅，提出了不少宝贵的意见，特此致谢。

本教材编写时参考了一些优秀的理论力学教材，并选用了其中的部分图表、例题和习题。在此特向这些教材的编者一并致谢。

限于水平，本书难免有错漏之处，望读者不吝指正。

作者

2016年6月

目 录

绪言	1
第一章 力和物体的受力分析	3
第一节 力的作用效应和力的基本性质	3
一、力的作用效应	3
二、力的基本性质	4
第二节 力的投影及其计算	6
一、力在坐标轴上的投影	6
二、力在平面上的投影	7
三、力在直角坐标轴上的投影	7
四、力与力在直角坐标轴投影的关系	8
第三节 力矩和力偶	9
一、力矩	9
二、力偶	13
第四节 力的种类	16
一、分布力和集中力	16
二、主动力和约束反力	17
第五节 物体的受力分析	29
习题	32
第二章 力系的简化与合成	35
第一节 汇交力系的合成	35
一、汇交力系合成的几何法	35
二、汇交力系合成的解析法	37
第二节 力偶系的合成	38
第三节 平面一般力系的简化与合成	40
一、力的平移定理	40

二、平面一般力系向一点简化	41
三、平面一般力系简化的结果	42
四、合力矩定理	43
第四节 空间一般力系的简化与合成	45
一、空间一般力系向一点简化	46
二、空间一般力系的简化结果	47
三、空间力系的合力矩定理	49
第五节 物体重心的计算	49
一、计算物体重心位置的一般公式	50
二、确定物体重心位置的实验方法	55
三、质心、重心和质心的关系	56
习题	56
第三章 物体处于平衡状态时的受力分析计算	60
第一节 物体在汇交力系作用下平衡时的受力分析计算	60
一、汇交力系的平衡条件和平衡方程	60
二、物体在汇交力系作用下平衡时的受力分析计算	61
第二节 物体在力偶系作用下平衡时的受力分析计算	65
一、力偶系的平衡条件和平衡方程	65
二、物体在力偶系作用下平衡时的受力分析计算	65
第三节 物体在平面一般力系作用下平衡时的受力分析计算	66
一、平面一般力系的平衡条件和平衡方程	66
二、平面平行力系的平衡方程	67
三、物体在平面一般力系作用下平衡时的受力分析计算	68
第四节 物体在空间一般力系作用下平衡时的受力分析计算	81
一、空间一般力系的平衡条件和平衡方程	81
二、空间平行力系的平衡方程	82
三、物体在空间一般力系作用下平衡时的受力分析计算	82
习题	85
第四章 质点运动的分析计算	97
第一节 质点运动的描述	97
一、点运动的矢径表示法	97
二、点运动的直角坐标表示法	98
三、点运动的弧坐标表示法	105
第二节 质点动力学问题的分析计算	110
一、应用质点运动微分方程计算质点的动力学问题	110
二、应用达朗伯原理计算质点的动力学问题	117

习题	119
第五章 刚体平动的分析计算	125
第一节 刚体平动的描述	125
一、工程中物体的平行移动	125
二、刚体平动的运动特性	125
三、刚体平动可归结为点的运动来研究	126
第二节 刚体平动动力学问题的计算	127
一、动量定理	127
二、质心运动定理	130
三、质点系的达朗伯原理	131
四、刚体平动的动力学问题计算	133
习题	136
第六章 刚体定轴转动的分析计算	140
第一节 刚体定轴转动运动的描述	140
一、刚体定轴转动时其位置的确定	140
二、刚体定轴转动运动变化的描述——角速度和角加速度	141
三、定轴转动刚体上各点速度和加速度	144
四、泊松 (Poisson) 公式	149
第二节 刚体定轴转动动力学问题的计算	149
一、动量矩定理	150
二、刚体定轴转动微分方程	152
三、刚体转动惯量的计算	153
四、定轴转动刚体惯性力系的简化	158
五、刚体定轴转动动力学问题的计算	160
六、定轴转动刚体轴承附加动反力的计算	163
习题	169
第七章 质点相对不同参考系运动的分析计算	173
第一节 动点相对不同参考系运动速度的计算	173
第二节 动点相对不同参考系加速度的计算	179
一、牵连运动为平动时动点加速度的计算	179
二、牵连运动为转动时动点加速度的计算	180
第三节 质点在非惯性参考系运动时动力学问题的计算	185
一、质点相对运动微分方程	185
二、质点在非惯性参考系中运动时动力学问题的计算	187
习题	193

第八章 刚体平面运动的分析计算	199
第一节 刚体平面运动的描述	199
一、刚体平面运动概述	199
二、平面运动刚体上各点速度的计算	202
三、平面运动刚体上各点加速度的计算	209
第二节 刚体平面运动动力学问题的计算	212
一、质点系相对于质心的动量矩定理	212
二、刚体平面运动微分方程	213
三、刚体平面运动惯性力系的简化	214
四、例题	215
习题	218
第九章 刚体定点运动的分析计算	223
第一节 刚体定点运动的描述	223
一、绕定点转动刚体位置的确定	223
二、定点运动刚体角速度和角加速度	225
三、定点转动刚体上各点的速度和加速度	228
第二节 刚体定点运动动力学问题的计算	231
一、赖柴定理	231
二、刚体绕定点转动的微分方程	232
三、规则进动时外力矩的表达式	235
四、陀螺力矩的表达式	236
五、例题	237
第三节 陀螺仪的基本特性及其应用	240
一、万向支架支承的陀螺仪的运动微分方程和技术方程	240
二、陀螺仪的基本特性	242
三、陀螺仪的应用	247
习题	248
第十章 物体系统运动的分析计算	252
第一节 物体系统运动分析计算之一——综合应用有关定理	253
第二节 物体系统运动分析计算之二——应用动能定理和机械能守恒定律	257
一、动能定理	257
二、力的功的计算	259
三、刚体动能的计算	266
四、机械能守恒定律	268
五、例题	270

第三节 物体系统运动分析之三——应用动力学普遍方程和拉格朗日方程	279
一、虚位移原理	279
二、动力学普遍方程	287
三、拉格朗日方程	288
四、例题	291
习题	295
第十一章 应用专题	303
第一节 碰撞的分析计算	303
一、碰撞简介	303
二、碰撞的分析计算	306
第二节 流体动压力的计算	316
第三节 变质量物体运动的分析计算	320
第四节 机械振动的分析计算	324
一、机械振动概述	324
二、单自由度系统自由振动的分析计算	326
三、用能量法计算振动系统的固有圆频率	331
四、阻尼对自由振动影响的分析	335
五、单自由度系统受迫振动的分析计算	338
六、二自由度系统振动的分析计算	347
七、多自由度系统振动简介	358
八、自激振动简介	361
习题	363
参考文献	374

绪 言

我们知道,宇宙中一切物体都处于运动状态。而物体的机械运动——物体空间位置随时间的变化,则是物体最基本、最简单的运动。小至小鸟的飞翔、人的行走,常见的汽车的行驶、轮船的航行、火箭的发射,大至地球的自转、行星绕太阳的公转等都是物体的机械运动。人们在长期的生活和生产活动中,通过观察、实验和分析推理,逐渐认识了物体机械运动的一些一般性的规律。在古代,我国劳动人民就懂得应用斜面、杠杆和滑车等工具。我国古代伟大的学者墨翟在其著作《墨经》中,就对力的定义和杠杆的平衡提出了正确的见解。在欧洲,随着商业、生产技术的发展,至16、17世纪,德国学者约翰·开普勒提出了行星运动三定律;意大利科学家伽利略用实验手段确定了自由落体规律;英国科学家牛顿更在前人学说的基础上提出了动力学的三个基本定律。至18、19世纪,随着工业革命的兴起和生产的需求,科学家们运用数学分析的方法研究机械运动的规律,陆续提出了“虚位移原理”“达朗伯原理”“拉格朗日方程”等,更进一步揭示了物体机械运动的一般规律,从而形成了研究物体机械运动一般规律的科学——理论力学。

理论力学是以伽利略、牛顿建立的基本定律为基础的,属于古典力学的范畴。20世纪初发展起来的相对论力学和量子力学说明古典力学的应用范围是有局限性的,它不适用于研究运动速度接近光速的物体的运动,也不能用于研究微观粒子的运动。但在一般的工程技术问题中,物体是宏观的,而且其运动速度远远小于光速,古典力学不但适用,而且分析计算结果是足够精确的。因此理论力学在现代工程技术中仍得到广泛的应用。

在工程实际中,作机械运动的物体是多种多样的。为了找出机械运动的一般规律,我们必须从众多繁杂的具体物体运动中找出其共性,抓住其主要矛盾,略去次要因素,把作机械运动的物体抽象为力学模型来研究。在理论力学课程中,我们经常接触到的力学模型是质点、质点系和刚体。当我们研究炮弹、地球卫星等的运行轨迹时,考虑到炮弹、卫星等的大小与其运动的范围相比非常地小,就忽略其形状大小,把它们都看作具有一定质量的点来研究。实践表明,这样抽象简化了计算,而且计算结果足够精确。理论力学就把研究对象中可以不考虑其形状大小的物体看作有一定质量的几何点,称为质点。由有限个或无限多个质点相互联系组成的系统称为质点系。在实际问题中,当物体不能看作单个质点时,可把其看成是由许多质点组成的质点系。质点系中,部分质点或全部质点之间的距离可变化的质点系称为可变质点系。如流体、机械中的机构就是典型的可变质点系。质点系中,任意两点之间的距离不变的质点系称为不变质点系。在工程实际中,当物体受力后的变形与其本身的尺度相比很小,在研究某些问题时忽略其变形

并不影响问题分析计算的精度,而且使所研究的问题变得简单明确,往往就不考虑物体的变形,把其看作受力不变形的物体来研究。这些被假定为受力不变形的物体就是不变质点系,理论力学称之为刚体。例如研究炮弹在飞行过程中的旋转运动时,就不能再把它看作质点,必须把它看作具有一定形状大小的质点系来研究。而炮弹在飞行过程中会受到空气的阻力而发生变形,但此变形和炮弹的尺寸相比非常之微小,对炮弹旋转运动的影响小到可以忽略不计。故在研究炮弹飞行过程中的旋转运动时,就不考虑炮弹由空气阻力产生的变形,实际上就把炮弹看作受力不变形的物体——刚体来研究。实际物体受力后的变形与其原尺度相比大多是微小的,研究其机械运动时很多情况下可看作刚体。理论力学的研究对象主要是刚体。本课程中,如不加特别说明,在研究物体的机械运动时,所讲的物体均为刚体。

学习理论力学,掌握物体机械运动的客观规律,我们就能深刻地理解机械运动的现象,在生产和建设中运用这些规律,解决在建筑工程、机械制造、交通运输,以至人造卫星、宇宙飞船发射等提出的理论力学问题。如为什么如果地面无摩擦力,我们寸步难行?芭蕾舞演员旋转时收拢双臂就会急促地旋转,这是什么原因?为使电机转子在10s内由静止加速至1000r/min,需对其施加多大的力矩?为什么汽车碰撞时会产生巨大的破坏力?人坐车时使用安全带能减少车碰撞时对人的伤害,是什么原因?人造地球卫星最小需达到多大的速度才能绕地球运行?其绕地球运动的轨迹是如何计算出来的?学习理论力学,掌握和运用物体机械运动的规律,这些问题都可以得到解答。当然,工程技术中存在大量复杂的力学问题,不是单靠理论力学知识就能解决的,但在解决这些问题时,理论力学的知识是不可缺少的。

理论力学为许多后继课程如材料力学、结构力学、弹性理论、流体力学和机械原理等提供机械运动的基础知识,故学好理论力学将为学习这些课程做好准备。对于不少专业的学生来说,理论力学是他们首先接触的一门专业技术基础课。在这门课程中,学生们将接触到一些不太复杂的实际工程技术问题,学习到如何根据问题的性质和计算精度的要求,抓住主要因素,略去次要因素,建立恰当的“力学模型”,然后应用基本原理去分析解决问题。这将为学习专业课和解决复杂的工程技术问题打下基础。

第一章 力和物体的受力分析

学习和研究理论力学，首先要建立起清晰的力的概念，认识力的基本性质和力的种类，懂得对物体进行受力分析的方法。

第一节 力的作用效应和力的基本性质

一、力的作用效应

力是物体之间相互的机械作用，这种作用使物体的运动状态发生变化或使物体变形。力使物体运动状态发生变化称为力的运动效应或外效应，力使物体发生变形称为力的变形效应或内效应。如图 1-1 (a) 所示，起重机用钢拉杆提升重物。钢拉杆给重物一个拉力 T ，使重物由静止开始向上作加速运动，这是拉力 T 的运动效应或外效应。与此同时，钢拉杆本身也受到一对拉力 T' 和 T'' 的作用而发生伸长变形，这是拉力 T' 和 T'' 的变形效应或内效应，如图 1-1 (b) 所示。理论力学主要研究力的运动效应。

实践证明，力对物体的作用效应决定于力的三个因素：①力的大小；②力的方向；③力的作用点。力的大小反映了物体间相互的机械作用强度，可以用力的运动效应或变形效应来度量。力的方向指静止质点在该力作用下开始运动的方向。力的作用点是指物体发生相互机械作用的接触点。实际上两物体接触处是有一定大小的面，如果这个面面积很小，则可将其抽象为一个点，称为力的作用点。过力的作用点沿力的方向画出的直线称为力的作用线。由于力有大小、方向且两个力的合成服从平行四边形加法，故力是矢量。力可以用一帶有箭头的线段表示，如图 1-2 所示，线段的长度按一定比例表示力的大小，线段的方位和箭头的指向表示力的方向，线段的始端（或末端）表示力的作用点。今后我们在一般书写时，通常用宋体大写字母上加箭头作为力的矢量符号，如 $\vec{F}$ ；在

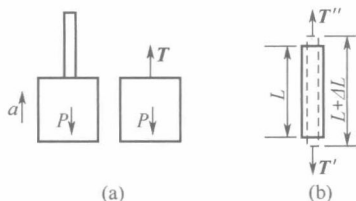


图 1-1

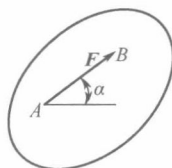


图 1-2

本书中, 则用黑体大写字母表示力矢量。力的大小则用宋体大写字母表示。

国际单位中, 力的单位是牛顿 (N) 或千牛顿 (kN)。

当物体受到多个力的作用, 作用于物体的一群力称为力系。诸力作用线在同一平面内的力系称为平面力系, 否则称为空间力系。诸力作用线汇交于一点的力系称为汇交力系。诸力作用线彼此平行的力系称为平行力系。诸力作用线任意分布的力系称为一般力系或任意力系。诸力作用线在同一平面内任意分布的力系称为平面一般力系或平面任意力系。诸力作用线在空间任意分布的力系称为空间一般力系或空间任意力系。

当一个力对物体的作用效应与一个力系相同, 称这个力为力系的合力, 此力系中的各力称为合力的分力。当两个力系对同一物体的作用效应相同, 称这两个力系为等效力系。当一个力系作用于物体并使该物体处于平衡状态, 称这个力系为平衡力系。

二、力的基本性质

力有如下基本性质, 这些性质是静力学公理。

1. 二力平衡原理

受两力作用的刚体处于平衡状态的必要充分条件是这两个力大小相等、方向相反, 作用线相同, 如图 1-3 所示。

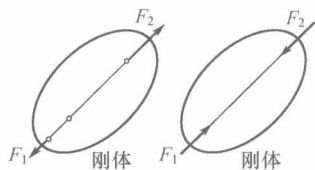


图 1-3

由此原理可知, 两个大小相等、方向相反且作用线共线的力构成最简单的平衡力系。在两个力作用下处于平衡状态的物体称为二力体, 如该物体为杆件, 则称为二力杆。如图 1-1 (b) 所示的钢拉杆, 忽略钢拉杆的重量, 该杆在力 T' 、 T'' 的作用下处于平衡状态, 由二力平衡原理

可知力 T' 、 T'' 必定大小相等、方向相反、作用线相同。反之, 如力 T' 、 T'' 的大小相等、方向相反、作用线相同, 则由二力平衡原理可知该钢拉杆处于平衡状态。当钢拉杆在二力 T' 、 T'' 作用下处于平衡状态时, 称钢拉杆为二力杆。

应用此原理需要注意的是, 该原理只适用于刚体。

2. 加减平衡力系原理

在作用于刚体的力系上增加或减去任何平衡力系不改变原力系对刚体的作用效应。

此原理也只适用于刚体。对于变形体来说, 增加或减去一个平衡力系, 会改变变形体各处的受力状态, 将引起其外效应和内效应的变化。

由以上两个原理可导出如下重要推论。

推论 力在刚体上的可传性: 作用在刚体上的力可以沿其作用线任意移动, 而不改变它对刚体的作用效应。

证明: 设有力 F 作用在刚体上的 A 点, 如图 1-4 (a) 所示。在其作用线上任一点 B 增加一组平衡力 F' 和 F'' , 且令 $F' = -F'' = F$ 。根据加减平衡力系原理, 力 F 与三个力 F 、 F' 、 F'' 等效, 如图 1-4 (b) 所示。此时注意到, 在这三个力中, 力 F 和 F'' 构成一平衡力

系, 根据加减平衡力系原理, 可去掉这两个力。去掉力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}''$ 后, 剩下的力 $\boldsymbol{F}'$ 与力 $\boldsymbol{F}$ 、 $\boldsymbol{F}'$ 、 $\boldsymbol{F}''$ 三个力等效, 而 $\boldsymbol{F}$ 、 $\boldsymbol{F}'$ 、 $\boldsymbol{F}''$ 三个力又与力 $\boldsymbol{F}$ 等效的, 故作用在刚体上 B 点的力 $\boldsymbol{F}'$ 与原作用于 A 点的力 $\boldsymbol{F}$ 等效, 即力 $\boldsymbol{F}$ 从作用点 A 沿作用线移到了任一点 B , 如图1-4(c)所示。

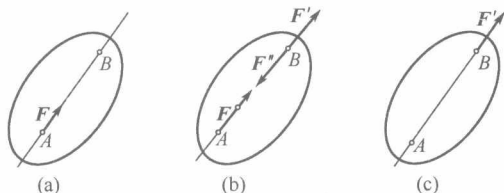


图 1-4

3. 力的平行四边形定律

作用在物体同一点的两个力可以合成为一个合力, 合力的作用点在同一点, 合力的大小和方向由这两个力为邻边构成的平行四边形的对角线来决定。图1-5(a)所示力的这个性质也称为力的平行四边形法则, 写成矢量表达式为

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 \quad (1-1)$$

即合力矢 $\boldsymbol{R}$ 等于两个分力矢 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的矢量和。

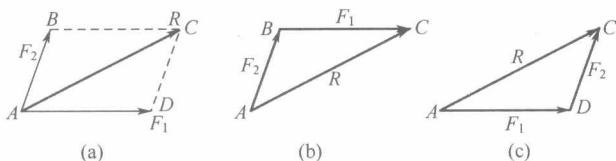


图 1-5

由图1-5(a)可看出。为求力 $\boldsymbol{F}_1$ 与 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力 $\boldsymbol{R}$, 其实不必将整个平行四边形画出, 只须作出 $\triangle ABC$ 或 $\triangle ADC$ 即可作出表示合力 $\boldsymbol{R}$ 的对角线 AC 。即可用下述方法作出合力 $\boldsymbol{R}$: 先作出表示力矢 $\boldsymbol{F}_2$ 的有向线段 AB , 再过 B 点作表示力矢 $\boldsymbol{F}_1$ 的有向线段 BC , 连接 AC , 则有向线段 AC 表示合力 $\boldsymbol{R}$; 或作出有向线段 AD 表示力矢 $\boldsymbol{F}_1$, 再过 D 点作有向线段 DC 表示力矢 $\boldsymbol{F}_2$, 连接 AC , 则有向线段 AC 表示合力 $\boldsymbol{R}$ 。这种求两个共点力合力的方法称为力的三角形法则, 如图1-5(b)(c)所示。

由力的这个性质可以得到如下推论。

推论 三力平衡汇交定理: 刚体在三个力的作用下平衡, 如其中两个力的作用线相交于一点, 则第三个力的作用线必通过该交点, 且三个力的作用线在同一平面上。

证明: 如图1-6(a)所示, 设刚体在三个力 $\boldsymbol{F}_1$ 、 $\boldsymbol{F}_2$ 、 $\boldsymbol{F}_3$ 的作用下处于平衡

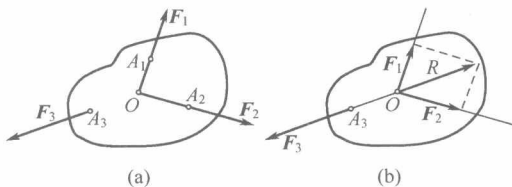


图 1-6

状态, 其中 F_1 和 F_2 的作用线相交于 O 点。根据力的可传性, 将力 F_1 和 F_2 沿其作用线分别移到 O 点, 根据力的平行四边形定律, 求出它们的合力 R , 如图 1-6 (b) 所示。显然, 刚体在 R 和 F_3 作用下平衡。根据二力平衡原理, R 与 F_3 作用在同一直线上, 即 F_3 的作用线必定通过 O 点。另外, R 与 F_1 、 F_2 在同一平面, 故 F_3 与 F_1 、 F_2 也在同一平面。

4. 作用力与反作用力定律

两物体相互作用的作用力与反作用力大小相等、作用线相同、指向相反, 分别作用在这两个物体上。

要特别指出的是, 两物体之间的作用力与反作用力是相互依存, 同时出现, 同时消失的, 它们分别作用在不同的物体上。

5. 刚化原理

变形体在某力系作用下平衡, 如将此变形体刚化为刚体, 则其平衡状态不变。

这个原理指出, 变形体平衡时其上作用力所满足的条件服从刚体的平衡条件。这样, 就可利用刚体的平衡条件来处理变形体的平衡问题。

第二节 力的投影及其计算

对力进行分析计算时, 常需计算力的投影。下面介绍力在坐标轴和平面上投影的概念和计算。

一、力在坐标轴上的投影

计算力在坐标轴上的投影, 会遇到力与坐标轴在同一平面和不在同一平面的情况, 下面分别介绍。

1. 力与坐标轴共面时的投影

设有力 F 作用于 A 点, 任一轴 X 轴与力 F 在同一平面内, 如图 1-7 (a) 所示。由力 F 之始端 A 和末端 B 分别向 X 轴作垂线, 垂足 a 、 b 间的距离冠以相应的正负号称为力在 X 轴上的投影, 并用符号 F_x 表示。若由力始端的垂足 a 至其末端的垂足 b 的指向与 X 轴的正向一致, 投影 F_x 取正值, 反之 F_x 取负值, 如图 1-7 (b) 所示。如力 F 的方向与 X 轴正向的夹角为 α , 则投影 F_x 可以表示为:

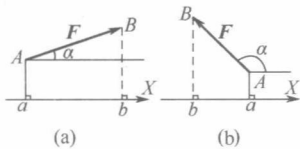


图 1-7

$$F_x = F \cdot \cos\alpha \quad (1-2)$$

式中 F 为力 F 的大小, 恒取正值, $\alpha \in [0, 180^\circ]$ 。

2. 力与坐标轴不共面时投影的计算

如力 F 与 X 轴不共面, 过力的始端 A 和末端 B 分别作与 X 轴垂直的平面 I 和 II 与轴相

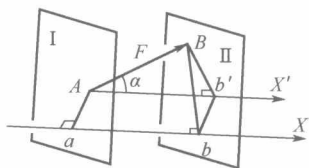


图 1-8

交于 a 和 b ，如图 1-8 所示。 a 、 b 间的距离冠以相应的正负号称为力在 X 轴上的投影 F_x ， F_x 的正负号规定与力和 X 轴共面时相同。

如自 A 点作 X' 轴与 X 轴平行，与过 B 点的垂面 Π 相交于 b' 点。显然有 $Ab' = ab$ ，故力 F 在 X 轴上的投影可表示为

$$F_x = \pm ab = \pm Ab' = F \cdot \cos\alpha$$

式中 α 为力 F 与 X' 轴的夹角。由此可见：“力在相互平行的坐标轴上的投影相等。”根据此结论，当力与坐标轴 X 轴不共面，力在 X 轴上的投影计算不便，而 X' 轴与 X 轴平行，且力在 X' 轴上投影方便计算时，可以通过计算力在 X' 轴上的投影得出力在 X 轴上的投影。

二、力在平面上的投影

如图 1-9 所示，由力 F 的始端 A 和末端 B 分别作平面 M 的垂线，垂足为 a 和 b ，则矢量 $\vec{ab}$ 称为力 F 在平面 M 上的投影，记为 F_M 。 F_M 的大小可按下述方法计算。自 A 点引出与 F_M 平行的直线，力 F 与该直线的来角为 α ，显然 F_M 的大小为：

$$F_M = F \cdot \cos\alpha$$

力在平面上的投影是矢量，又称为投影矢量。

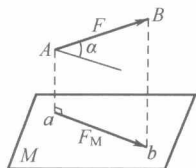


图 1-9

三、力在直角坐标轴上的投影

当已知力 F 与各坐标轴正向之间的夹角分别为 α 、 β 、 γ 时，如图 1-10 (a) 所示，则可直接计算力在各坐标轴上的投影。由式 (1-2) 可得

$$\begin{cases} F_x = F \cos\alpha \\ F_y = F \cos\beta \\ F_z = F \cos\gamma \end{cases} \quad (1-3)$$

式中 F_x 、 F_y 、 F_z 分别为力 F 在 X 、 Y 、 Z 轴上的投影。

力 F 在直角坐标轴上的投影还可以用所谓的“二次投影法”计算。如图 1-10 (b) 所示。力 F 的仰角为 θ ，先将力 F 投影到坐标平面 OXY 上，得到投影矢量 F_{xy} ， F_{xy} 的大小为

$$F_{xy} = F \cos\theta$$

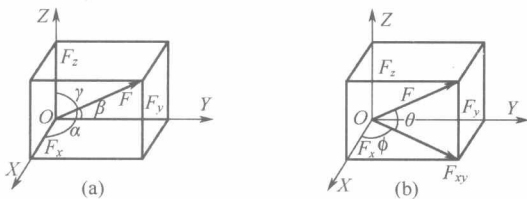


图 1-10

再将 F_{xy} 分别投影到 X 轴和 Y 轴上得到

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos \phi = F \cos \theta \cos \phi \\ F_y &= F_{xy} \sin \phi = F \cos \theta \sin \phi \end{aligned} \quad (1-4)$$

这样的计算方法称为“二次投影法”。至于力 F 在 Z 轴上的投影则为

$$F_z = F \sin \theta$$

四、力与力在直角坐标轴投影的关系

如图 1-11 所示, 当已知力 F 与各坐标轴的正向的夹角分别是 α 、 β 、 γ 时, 将力 F 沿各坐标轴分解为三个分力 F_1 、 F_2 、 F_3 , 即有

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

这三个分力的大小各为

$$\begin{cases} F_1 = F |\cos \alpha| \\ F_2 = F |\cos \beta| \\ F_3 = F |\cos \gamma| \end{cases}$$

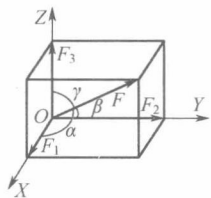


图 1-11

对比上式与式 (1-3) 可知, 力沿坐标轴方向的分力与力在该坐标轴上的投影大小相等, 而且各分力沿坐标轴的指向与力在相应轴上的投影的正负值相关。当力与坐标轴正向的夹角小于 90° , 力在该坐标轴上的投影为正值, 力在该坐标轴方向的分力指向该坐标轴的正向; 当力与坐标轴正向的夹角大于 90° , 力在该坐标轴上的投影为负值, 则力在该坐标轴方向的分力指向与该坐标轴的指向相反。可见力 F 沿直角坐标系三个坐标轴方向的分力与力 F 在相应坐标轴上的投影有如下关系:

$$F_1 = F_x i, F_2 = F_y j, F_3 = F_z k$$

式中 i 、 j 、 k 分别为 X 、 Y 、 Z 轴的单位矢量。这样力 F 可以用如下解析表达式表示

$$F = F_x i + F_y j + F_z k \quad (1-5)$$

当已知力 F 在直角坐标系三个轴上的投影时, 可以由下述各式计算力 F 的大小和方向余弦。

$$\begin{cases} F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ \cos(F, i) = \frac{F_x}{F}, \cos(F, j) = \frac{F_y}{F}, \cos(F, k) = \frac{F_z}{F} \end{cases} \quad (1-6)$$

例 1-1 在图 1-12 中, 长方体三边长分别为 $a = b = \sqrt{3}\text{m}$, $c = \sqrt{2}\text{m}$ 。长方体上作用三个力, 其中 $F_1 = 100\text{N}$, $F_2 = 200\text{N}$, $F_3 = 300\text{N}$ 。求各力在三个坐标轴上的投影。

解: 力 F_1 与 Z 轴平行, 方向相反, 而与 X 轴、 Y 轴垂直, 在 X 轴、 Y 轴上投影为零, 它在各坐标轴上的投影为

$$F_{1x} = 0, F_{1y} = 0, F_{1z} = -F_1 = -100(\text{N})$$

力 F_2 与 X 轴正向的夹角为 120° , 与 Y 轴正向之夹角为 150° , 与 Z 轴垂直, 它在各坐标轴的投影为

$$F_{2x} = F_2 \cos 120^\circ = -100(\text{N})$$