

**GLOBAL STRUCTURE
ANALYSIS OF MECHANISM
MOTION PERFORMANCE**

机构运动性能全局结构分析

赵登峰 著



科学出版社

机构运动性能全局结构分析

赵登峰 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

传统的机构分析问题是求解机构运动过程中运动和受力参数随时间的变化历程,而机构全局性能分析则探讨机构性能的全局分布特征及其表达,以及性能全局分布特征随机机构结构参数的演化过程。本书拟用奇异理论、几何拓扑学、群论等现代数学理论为基本数学工具,探讨建立适合计算机处理的机构性能全局分析理论和方法。

本书的内容分为基础篇和应用篇:基础篇讨论了机构奇异性特性及其机构学意义,用奇异条件对机构参数空间划分的方法,以及简化各机构参数空间划分过程和划分结果的方法;应用篇介绍了平面机构、球面机构、一般空间机构等机构类型的全局性能分析。

本书可供对机构学感兴趣的科研工作者、研究生、机械工程技术人员阅读,也可作为高年级机械工程专业的大学生扩展机构学知识的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

机构运动性能全局结构分析/赵登峰著. —北京:科学出版社, 2017.6
ISBN 978-7-03-052968-8

I. ①机… II. ①赵… III. ①机械-机构学-研究 IV. ①TH11

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 119715 号

责任编辑:邓 静 张丽花 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:吴兆东 / 封面设计:迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2017 年 6 月第一次印刷 印张:12 1/4

字数:300 000

定价:88.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229; 010-64034315

前 言

传统的机构分析问题是在机构的构件连接关系、构件尺寸及驱动条件都已确定的前提下,求解机构运动过程中各运动参数和受力随时间的变化历程,其理论基础十分完备、分析方法也相当成熟,即便是同时考虑构件的变形、运动副的摩擦、碰撞接触等比较困难的复杂机构分析问题,众多的计算机辅助机构分析软件都能很好地解决。然而,机构分析领域中涉及机构全局性能分析的以下两方面问题,目前仍然没有得到很好地解决。

(1)对于给定的机构,计算机即便是求解了所有的运动参数和性能参数,但这些参数的数据量极大,人们仍然难以从中获得所需的整体认识。这些有关参数整体分布的知识对实际工作常常十分重要,而目前计算机所能提供的辅助认识手段仍十分有限。

(2)机构的运动性能参数的分布状况还会随着构件尺寸的变化而演变,这种演变过程可能是渐变的,也可能发生突变,正是这种突变现象产生了机构的尺度分类,而目前的机构分析软件所能提供的分析手段更为有限。

本书拟用奇异理论、几何拓扑、群论等现代数学理论为基本数学工具,探讨建立适合计算机处理的机构性能全局分析理论和方法,使人们能在把握机构性能的全局分布及随结构尺寸演化过程的基础上开展机构的综合与设计工作。本书的内容分为基础篇和应用篇两部分。

(1)基础篇:包括第1~4章,介绍机构运动性能分析所涉及的数学工具及其在机构性能全局分析中的应用。第1章为绪论,概述运动性能全局分析的基本内容、基本方法和数学工具。第2章是奇异性分析方面的理论,讨论机构约束方程的各种奇异性条件,以及这些奇异性条件所对应的机构学意义。第3章是几何拓扑理论,讨论约束方程的奇异性条件对机构的结构空间、运动空间和解空间的划分方法、划分结果的表达方法,以及从划分结果中提取感兴趣的机构性能全局分布特征的方法。第4章是机构的对称性分析,以机构约束方程的对称性为基础,探讨简化各机构参数空间划分过程和划分结果的方法。

(2)应用篇:包括第5~7章,介绍不同类型机构的运动性能全局分析方法和目前的主要分析结论。所分析的机构类型依次为平面机构、球面机构、一般空间机构。前两类机构目前的研究相对充分,系统性也较强。而空间机构较复杂,目前的研究不够充分,本书仅给出了若干典型空间机构的研究结果。

在基础篇中,不打算完整地介绍所涉及的基础理论,仅选择机构运动性能全局分析所涉及的理论知识,并按照本书分析的特定需要进行内容的组织和编排。在应

用篇中力求按统一的方法处理各种机构的全局性能分析问题，形成完整统一的理论体系。

西南科技大学曾国英老师和马国鹭老师参与了本书的大量编写工作，并提出了许多宝贵的意见；研究生兰彪同学的研究工作对本书第 7 章的编写有很大帮助；研究生李宽同学的研究工作对本书第 4 章的编写有很大帮助。作者对他们的工作表示衷心感谢。

本书属于国家自然科学基金资助项目“机构运动性能全局分析方法研究”（编号 51375410）的研究成果之一，作者在此对国家自然科学基金委员会的资助表示衷心感谢。

衷心期待广大同行和读者对本书的疏漏和不足提出批评指正。

作 者

2017 年 2 月

目 录

基 础 篇

第 1 章 绪论	1
1.1 机构描述参数的基本定义	2
1.2 机构运动性能全局结构分析的基本内容	5
1.2.1 解空间拓扑的突变分析	5
1.2.2 解空间的结构分析	6
1.2.3 解空间划分的突变分析	7
1.3 基本方法及数学工具	7
1.3.1 机构参数空间的划分条件	7
1.3.2 机构参数空间的划分方法	8
1.3.3 机构参数空间的划分过程及结果的化简与分析	10
第 2 章 机构奇异性分析	12
2.1 有关机构参数微分和奇异性的基本定义	12
2.1.1 机构参数微分基本定义	12
2.1.2 参数微分向量的线性变换	14
2.1.3 约束方程奇异性的基本定义	14
2.2 机构奇异点的特性分析	15
2.2.1 α 正则点的特性分析	15
2.2.2 α 奇异点特性分析	17
2.2.3 α 奇异点的局部性态演变分析	18
2.2.4 α 奇异条件的形式	21
2.3 奇异性的机构学意义	23
2.3.1 全奇异($U_{\alpha}=U$)与解空间拓扑突变	23
2.3.2 等约束奇异($U_{\alpha}=F$)与机构解空间的奇异划分条件	24
2.3.3 过约束奇异($U_{\alpha}>F$)与解空间中的奇异点集	26
2.3.4 亚约束奇异($U_{\alpha}<F$)与工作空间的性态突变	28
2.4 解空间的划分方式突变	28
2.5 机构约束方程奇异性分析举例	30

第 3 章 机构参数空间的奇异划分 35

3.1 机构参数空间划分的基本定义 35

3.1.1 划分条件的基本定义 35

3.1.2 划分几何体的基本术语 37

3.1.3 几何体的定向表达 39

3.1.4 线性空间中的划分 41

3.2 参数空间的划分方法 43

3.2.1 组合求解遍历法 43

3.2.2 几何拓扑划分法 46

3.2.3 蒙特卡洛法 48

3.3 划分结果的常用分析方法 50

3.3.1 几何体分析的基本方法 50

3.3.2 参数空间的拓扑常量 53

第 4 章 机构的对称性分析 56

4.1 群论基础 56

4.1.1 群的定义和基本性质 56

4.1.2 子群及其陪集 58

4.1.3 共轭元素类 59

4.1.4 共轭子群、正规子群、商群 60

4.1.5 直积群和半直积群 61

4.2 机构分析中的变换群 61

4.2.1 机构变换群的若干定义 62

4.2.2 机构中常见的对称性及其变换群 63

4.3 机构变换群的应用 67

4.3.1 基本划分区域的确定 67

4.3.2 参数空间划分条件的分类 71

4.3.3 参数空间划分结果的分类 72

应 用 篇

第 5 章 平面机构的全局性能分析 75

5.1 平面单环机构的奇异性 75

5.1.1 平面单环机构的约束方程 75

5.1.2 平面单环机构的全正则特性分析 76

5.1.3	平面单环机构的奇异特性分析	79
5.1.4	不同 α 奇异条件的机构学意义	81
5.2	平面单环机构的对称性	82
5.2.1	约束方程的对称性及其变换群	83
5.2.2	结构空间和解空间划分条件的对称性	84
5.3	平面单环机构的尺度分类	86
5.3.1	结构空间的基本分析区域	86
5.3.2	结构空间划分条件的缩减	89
5.3.3	结构空间划分方法	90
5.3.4	结构空间的划分结果及分析	91
5.4	平面单环机构解空间的奇异划分	95
5.4.1	运动空间的基本区域	95
5.4.2	解空间的划分方法	97
5.5	平面单环机构解空间全局特性分析	101
5.5.1	平面单环机构解空间的拓扑结构	102
5.5.2	平面单环机构的可动性分析	103
5.5.3	运动路径的全局规划及奇异位形规避	105
5.6	平面单环机构工作空间的全局特征分析	106
5.6.1	工作空间的求解方程及其一般特性	106
5.6.2	四杆机构工作空间的类型及形态演化	109
5.6.3	五杆机构工作空间的类型	113
5.7	平面多环机构简介	115
5.7.1	平面多环机构的约束方程及其对称性	115
5.7.2	平面多环机构的奇异性分析	118
第 6 章	球面机构的全局性能分析	121
6.1	球面单环机构的奇异性	121
6.1.1	球面单环机构的约束方程	121
6.1.2	球面单环机构的全正则特性分析	123
6.1.3	球面单环机构约束方程的奇异特性分析	126
6.1.4	不同 α 奇异条件的机构学意义	129
6.2	球面单环机构的对称性	130
6.2.1	约束方程的对称性及其变换群	131
6.2.2	结构空间划分条件的对称性	134
6.2.3	解空间划分条件的对称性	135

6.3	球面单环机构的尺度分类	136
6.3.1	结构空间的基本区域	136
6.3.2	结构空间的划分条件及划分方法	137
6.3.3	结构空间的划分结果及分析	139
6.4	球面单环机构解空间的全局特性	143
6.4.1	运动空间的基本区域	143
6.4.2	解空间的划分条件及划分方法	144
6.4.3	解空间的划分及性能分析结果	147
6.5	球面单环机构的工作空间的特征	152
6.5.1	工作空间的求解方程及其一般特性	152
6.5.2	球面四杆机构工作空间的类型及形态突变	154
6.5.3	五杆机构工作空间的类型	158
第 7 章	一般空间机构的全局性能分析	160
7.1	一般空间机构的约束方程	160
7.1.1	单环空间机构的基本构件和约束方程	160
7.1.2	单自由度简单的单环空间机构	162
7.2	单自由度简单空间机构的奇异性分析	164
7.2.1	全正则运动位置的机构特性	164
7.2.2	奇异运动位置的机构特性	165
7.3	结构空间的奇异划分条件	166
7.3.1	圆环-圆环机构的结构空间划分条件	167
7.3.2	圆柱-圆环机构的结构空间划分条件	168
7.3.3	圆锥-圆环机构结构的划分条件	169
7.3.4	圆球-圆环机构结构的划分条件	170
7.3.5	其他相贯线机构的结构空间划分条件	170
7.4	单自由度简单空间机构的结构空间划分	171
7.4.1	简单三结构参数的情况	172
7.4.2	圆锥-圆球机构结构空间划分	172
7.4.3	圆环-圆球机构结构空间划分	174
7.5	圆环-圆环机构结构空间划分的初步结果	177
7.5.1	含截距参数组的划分条件整体特性分析	178
7.5.2	含环半径结构参数组的划分条件整体分析	180
参考文献		184

基 础 篇

第 1 章 绪 论

传统的机构分析问题是在机构的构件连接关系、构件尺寸及受力条件都已确定的前提下，求解机构运动中各运动参数和受力随时间的变化历程，或者是求解不同机构运动位置处机构性能参数(如压力角、运动解耦性等)。传统的机构分析是建立在运动学、动力学基础之上的工程科学问题，其理论基础十分完备，分析方法也相当成熟，即便是同时考虑构件的变形、运动副的摩擦、碰撞接触等比较困难的复杂机构分析问题，众多的计算机辅助机构分析软件都能很好地解决。借助计算机的强大数值计算能力，传统机构分析得到十分普遍的应用，也解决了许多实际工程问题。然而在机构分析领域中，下面的两方面问题仍然是目前的计算机辅助机构分析软件无力解决的问题。

(1) 给定一个构件连接关系、构件尺寸及驱动条件都已确定的机构，即便是计算机求解了机构任意位置处的所有运动参数和性能参数，但这些运动和性能参数的整体分布状况仍然需要分析者自己进行判断，稍复杂的机构常常使人们坠入如云似雾的数据海洋，难以获得人们所需的整体认识。这些有关参数整体分布的知识对实际工作常常十分重要，而目前计算机所能提供的辅助认识手段仍十分有限。

(2) 机构的运动和性能参数的分布状况会随着构件尺寸的变化而演变，这种演变过程可能是逐渐演变的，也可能发生突变，正是这种突变现象产生了机构的尺度分类。运动和性能参数随机构尺度演变整体状况对机构设计者来说也是十分重要的，而计算机目前所能提供的辅助手段很有限，通常仅能支持 1~2 个构件尺寸变化时局部有限范围内的变化分析。目前的机构分析软件也都提供了尺寸参数的优化手段，也解决了许多实际工程问题，但这样的数值优化仅能进行局部优化，且优化过程是计算机数值迭代过程，在人们对机构的认识水平提高上的助益十分有限。

机构运动性能的全局分析问题是机构的构件连接关系确定的前提下，探讨机构的运动参数范围的整体结构、运动性能参数在整个运动参数范围内的分布特征及其随构件尺寸参数的演变的全过程。机构运动性能的全局分析以拓扑学、奇异分岔理论、群论等现代数学理论为基础，探讨适合机构性能全局分析要求的计算机辅助

分析方法, 它将使人们能在系统完整地把握机构运动性能特征的全局结构及其随机机构尺寸变化的演变规律的条件下开展机构尺度综合与分析工作。

本章首先介绍与机构运动性能全局结构分析有关的基本概念和术语, 然后介绍机构运动性能全局结构分析的基本内容和基本方法。

1.1 机构描述参数的基本定义

从数学的角度处理机构分析与综合问题时, 首先要确定描述机构的运动参数和结构参数; 然后确定这些参数之间的相互联系, 也就是约束方程; 最后采用各种分析手段对约束方程进行分析, 获得所需要的结论。为了采用现代数学方法统一处理这些问题, 介绍以下四个贯穿本书始终的基本定义。

1. 运动空间

由机构运动过程中随时间而变化的机构参数所构成的实数空间。这些参数能完全确定机构的运动位置, 典型的运动参数是各运动副的运动参数, 以及不同构件上各关键点的相对位置参数等, 究竟选取哪些参数则应取决于分析目的。运动参数空间中任意一点的坐标表示为

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \dots, u_U) \quad (1-1)$$

式(1-1)唯一地确定了机构的运动位置。这里 U 为运动参数的数目, 也是运动空间的维数, 也就是说机构的运动空间为 U 维实数空间 $\boldsymbol{R}^U$ 。

2. 结构空间

由机构运动过程中保持不变的机构参数所构成的实数空间。这些参数能完全确定机构的结构, 且应该是相互独立的。典型的结构参数是各构件的尺寸参数。结构空间中任意一点的坐标表示为

$$\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_V) \quad (1-2)$$

式(1-2)唯一地确定了整个机构的结构。这里 V 为结构参数的数目, 也是结构空间的维数, 也就是说机构的结构空间为 V 维实数空间 $\boldsymbol{R}^V$ 。

结构空间与运动空间的积空间称为全空间, 其坐标点用 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ 表示。此外, 还可以根据分析的需要对这些参数进行其他形式的划分, 如运动参数(空间)可分为主动参数(空间)、被动参数(空间), 全空间可分为角度参数(空间)和线性参数(空间)等。

3. 约束方程

运动空间参数和结构空间参数所必须满足的相互制约关系。典型的约束方程由

机构的几何约束关系构成,当然也可以包含其他非几何约束关系。机构运动性能的全部特征均可以通过分析约束方程的特性而获得。将全部约束方程组织为列矩阵形式为

$$f(u, v) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2, \dots, u_U; v_1, v_2, \dots, v_V) \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_U; v_1, v_2, \dots, v_V) \\ \vdots \\ f_F(u_1, u_2, \dots, u_U; v_1, v_2, \dots, v_V) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1-3)$$

式中, F 为约束方程的数目,机构是要运动的,故总应满足 $F < U$ 。

4. 解空间

约束方程在运动空间中的解集。显然,在非奇异情况下,解空间是嵌入运动空间中的可定向流形,其维数 $D=U-F$,这也是机构的自由度。

机构的运动参数、结构参数以及约束方程的具体形式的选择,完全取决于分析目的和分析者的个人偏好,不论如何选择都是从不同侧面对机构及其运动情况的反映。但隐藏在其背后的解空间整体的拓扑结构,不会因参数的选择和方程的形式而改变。

解空间是机构运动性能分析的核心,机构的全部运动参数和性能参数都只有在解空间中才有定义,当然也就只有在解空间中才存在讨论其分布特征的必要。传统的机构分析理论分析机构的位置、速度、加速度等运动参数及受力,可以看作解空间局部微分特性的分析。机构运动性能的全局分析则是分析机构运动性能在解空间中的整体分布特征,以及随结构参数演变的全过程。

解空间的整体拓扑结构一般都不会像运动空间和结构空间那样仅仅是普通的实数空间,约束方程的不同性质可能使解空间具有十分复杂的整体拓扑结构,特别是解空间的维数较高(或机构自由度较大)时,解空间整体拓扑结构的复杂性超过人们的想象。解空间的整体结构分析是机构全局性能分析的最基本内容,若将机构的所有运动看作精彩的表演,解空间就是其演出的舞台。

图 1-1(a)所示为简单的单自由度空间机构,由三个构件,通过两个圆柱副和一个球面副连接而成。作为一个简单的示例,为了避开复杂且不必要的数学推导,这里假定两圆柱副的轴线保持垂直。如图 1-1(b)所示,该机构球面副中心轨迹为两圆柱的相贯线,这一点有助于我们理解该机构的全局运动性质的演化。改变机构及运动副的组成,球面副中心的轨迹也可实现圆锥面、圆环面、球面之间的相贯线。

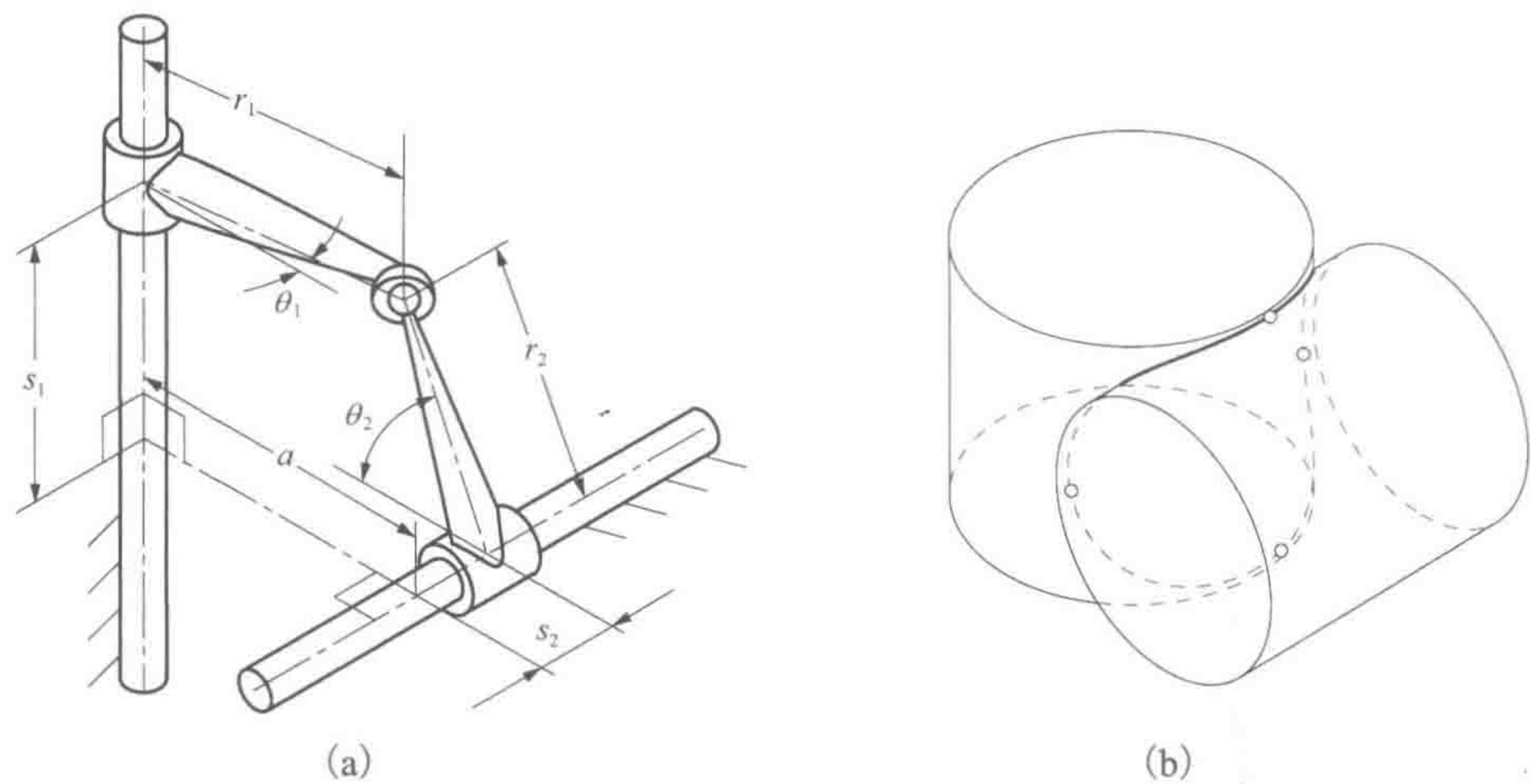


图 1-1 简单空间机构举例

尽管结构空间和运动空间的参数选择具有很大的灵活性，可以根据具体问题的分析要求灵活选择，但是必须能完整地表达机构的结构和机构的运动位置。对于图 1-1 (a) 所示机构，表 1-1 给出了三种机构描述参数的选取方案。

表 1-1 示例机构的典型机构描述参数选取方案

	方案 1	方案 2	方案 3
结构空间	(r_1, r_2, a)	(r_1, r_2, a)	(r_1, r_2, a)
运动空间	$(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2)$	(x, y, z)	(θ_1, θ_2)
约束方程	$\begin{bmatrix} r_1 \sin \theta_1 - s_2 \\ r_2 \sin \theta_2 - s_1 \\ r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 - a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} x^2 + y^2 - r_1^2 \\ (y - a)^2 + z^2 - r_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2 - a = 0$
解空间	维数 $D_s=1$ ；拓扑结构有空集、单圆、双圆三种；奇异位形数目有 4、8、12、16 四种		

方案 1：选取运动空间参数为 $\mathbf{u}=(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2)$ ，其中 θ_1 和 θ_2 分别为两圆柱副的相对角度位移， s_1 和 s_2 分别为两圆柱副的线性位移。

方案 2：选取运动空间参数为 $\mathbf{u}=(x, y, z)$ ，它们为球面副的中心坐标。

方案 3：选取运动空间参数仅为 $\mathbf{u}=(\theta_1, \theta_2)$ 。

三种方案中结构空间参数均选为 $\mathbf{v}=(r_1, r_2, a)$ ，其中， r_1 、 r_2 为两可动构件上球面副中心到圆柱副中心线的距离， a 为机架上圆柱副的中心距。

方案 1 的约束条件为两可动构件的半球面副中心坐标重合，约束方程的数目 $F=3$ ；方案 2 的约束条件为半径 r_1 和 r_2 约束限制，约束方程的数目 $F=2$ ；方案 3 的约束条件为中心距约束，约束方程的数目 $F=1$ 。

该解空间的维数和机构自由度为 1，解空间的整体结构随着结构参数变化会发生突变，可能的拓扑结构有空集、单圆、双圆三种情况。试着设想一下当机构的自由度为 2 或 3 时，解空间的整体拓扑都可能会有哪些情况。

1.2 机构运动性能全局结构分析的基本内容

机构的运动分析总是以约束方程为唯一的根据。在传统的机构分析中，根据已知的运动参数，由约束方程求出未知运动参数的过程常称为位置分析；约束方程对时间求一阶导数，即可得到速度分析方程，进而可由已知速度参数求出未知的速度参数。以此类推，可以完成位置参数随时间的各阶变化率的分析。再结合力学原理（如虚功方程等），可以完成机构的力学分析。这些内容都是机构分析的传统内容，目前许多商用机构分析软件都可以相当出色地解决这些问题。

与传统的机构分析不同，机构运动性能全局结构分析则是分析运动性能在整个运动参数范围内的分布特征及其随构件尺寸参数的演变的全过程。具体解决三方面问题，其一为解空间拓扑的突变分析，其二为运动及性能参数在解空间中的结构分析，其三为运动及性能参数在解空间中分布方式的突变分析，现分别简述如下。

1.2.1 解空间拓扑的突变分析

构件连接关系已定的机构，随着构件尺度变化，解空间的拓扑结构会发生突变。相应地机构工作空间、构件可动性模式等运动性能的分布也将完全不同，从而形成对机构最自然的尺度分类。这种分类对机构全局性能有着最为深刻的影响，机构所有性能的全局结构都随着解空间拓扑结构突变而突变。

解空间的全部突变条件对高维的结构空间进行划分，将会产生数量众多、维数不同、相互联系的几何体。不同的几何体也对应着不同的机构类型，特别是维数越低的几何体所对应的机构就越奇特。这些几何体及其之间的邻接关系反映了机构的基本尺度类型及其之间的演化关系。机构越复杂其结构空间的划分结果也越复杂，几何拓扑学和群论提供了强有力的化简和处理工具，使我们能够很好地理解和把握不同几何体的联系和转换关系，从而全面地把握机构的尺度类型随机构尺度演化的整体状况。

对于图 1-1(a)所示的简单空间机构，第 7 章的分析表明共有 4 个解空间拓扑突变条件。用这些突变条件对经过对称化简后的结构空间划分之后，产生的几何体有 6 个顶点、9 条线段和 4 个三角形。

4 个三角形对应着以下四种基本类型的机构。

(1) 解空间是空集，构件尺寸使其无法连成封闭的机构，图 1-1(b)所示的两圆柱分离无相贯线。

(2) 解空间的拓扑为单圆, 运动参数 θ_1 和 θ_2 都不能整周运转, 两圆柱部分地相贯, 仅有一条封闭的相贯线。

(3) 解空间拓扑为双圆, 仅 θ_1 都能整周运转, $r_1 < r_2$ 两圆柱完全相贯有两条相贯线。

(4) 解空间拓扑为双圆, 仅 θ_2 都能整周运转, $r_2 < r_1$ 两圆柱完全相贯有两条相贯线。

解空间的整体拓扑特征及演化仅与构件的数目和连接关系有关, 与机构描述参数的选择、机架的改变等因素都无关。

9 条线段对应的机构是这 4 种基本类型过渡类型, 或者是分析区域的边界。顶点对应的是最奇特机构, 一般机构都可以看成这些最奇特机构组合出来的中间类型。几何体的邻接关系完整地反映了各尺度类型机构的相互演化关系。对于复杂机构, 这些复杂邻接关系可以按照几何拓扑学原理, 用计算机辅助分析的方法实现其正确的把握和理解。

自由度为 1 的机构解空间由嵌入运动空间的若干封闭曲线构成。自由度为 2 的机构解空间由嵌入运动空间的若干封闭曲面构成。同样的道理, 自由度为 D 的机构解空间由嵌入运动空间的若干封闭的 D 维流形构成。

1.2.2 解空间的结构分析

构件连接关系和构件尺度均已确定的机构, 其解空间也随之而定。要弄清解空间具有怎样的整体结构及机构运动 and 性能参数在解空间中如何分布等问题, 最直接的方法是将解空间划分成拓扑结构简单的不同区域, 利用几何拓扑学分析方法, 通过分析各区域之间的邻接关系来把握解空间的整体结构。划分条件的确定应该是最有利于机构性能的分析, 本书中主要采用机构各运动参数的奇异条件对解空间进行划分。这样划分的优点如下。

(1) 在划分所产生的各区域内部, 机构各相关运动性能均无奇异地单调过渡, 而任一区域边界上一定对应着某种运动性能奇异性, 这十分有利于通过区域之间的邻接关系, 把握机构运动性能的全局分布。

(2) 这种划分准则是机构尺度分类准则最自然的延伸, 便于和机构尺度分类问题统一进行数学处理和计算机程序设计, 同时也具有严格的数学理论基础。

解空间的奇异划分也会产生众多的、维数不同、包含于解空间中的几何体, 这些几何体之间的相互邻接关系反映了解空间的整体结构, 也从整体上刻画了机构性能的整体分布状况, 从而使得机构运动性能的整体演变清晰地呈现出来。

对于图 1-1(a) 所示的简单空间机构, 如果运动参数中增加球面副中心在物理空间中的位置坐标 (x, y, z) , 则图 1-1(b) 中的圆柱相贯线也就是球面副中心的轨迹, 它也常称为球面副中心的工作空间, 可以将其理解了解空间在普通物理空间的投影。该相贯线上存在四个特殊的关键点, 左右两个是运动参数 s_2 和 θ_1 的极值点, 上下两

个是运动参数 s_1 和 θ_2 的极值点。在机构学理论上称这些关键点所对应的机构运动位置为奇异位形。如果处于极值的运动参数为主动参数, 则为机构的死点, 不能实现正常驱动, 此时其他运动参数运动方向处于不确定状态; 如果处于极值的运动参数为被动参数, 则其他运动参数失去了对极值参数的控制作用。

这四个奇异位形把相贯线分成四段, 每段内部与各运动参数相关的驱动性能均单调变化, 各段之间的邻接关系反映了解空间的整体结构, 同时这种划分及邻接关系也揭示了运动性能的整体分布状况。

1 维解空间的情况是简单的, 几何体仅有 0 维顶点和 1 维线段, 邻接关系也只有顺序地连接并最后封闭为圆形拓扑结构。2 维解空间的情况就要复杂许多, 几何体还会增加 2 维面, 相互邻接关系也更为复杂, 最终的封闭形式也多种多样。解空间维数若进一步增加为 D , 一般来说解空间划分时 $0 \sim D$ 维几何体都会涉及, 几何体邻接关系将会十分复杂, 需借助几何拓扑学方法才能把握和理解其复杂的连接关系, 计算机辅助方法也将成为帮助我们理解这些关系的最有效手段。

1.2.3 解空间划分的突变分析

当结构参数在一定的范围变化时, 解空间的拓扑结构未变, 但对解空间的划分方式可能发生突变(如划分的解空间区域的方式和数目的变化)。这些改变直接对应于机构性能分布性态的突变, 可以作为解空间拓扑分类中的子类。图 1-1(b) 中的球面副中心的轨迹上关键点(机构奇异位形)的数目会随着结构参数的改变发生突变, 可能有 4、8、12 等多种情况, 自然也伴随着对相贯线划分方式和连接顺序的突变。

现代机构分析内容十分广泛, 包括工作空间形态特征、奇异位形分布、运动参数可动性范围、运动解耦等, 还要分析这些特征随结构参数变化的演化规律, 通常这些问题也都十分复杂。本书以机构约束方程和解空间分析为主线, 将各种机构性能全局分析问题联系起来, 运用现代数学工具探讨这些机构性能参数的整体分布特征, 建立完整的理论体系, 使人们能够从整体上把握机构性能特征的演变规律, 极大地拓展人们进行机构分析和综合的视野。

1.3 基本方法及数学工具

前面讨论的三项分析内容中, 每一项都要涉及机构参数空间(结构空间、运动空间、解空间)的划分条件、划分方法、划分过程及结果的简化与分析三方面问题。这三个问题的处理方法和所用的数学工具也各不相同, 下面分别进行简单介绍。

1.3.1 机构参数空间的划分条件

不论是结构空间还是解空间, 其划分准则都源自约束方程的奇异性质, 相应的

划分条件都应该从约束方程的奇异性分析获得,基本数学工具是奇异性理论。对于约束方程非退化的奇异问题,所有奇异性质都包含在约束方程式(1-3)对运动参数 u 的 Jacobi(雅可比)矩阵 J_u 之中,即

$$J_u = \frac{\partial f}{\partial u} \quad (1-4)$$

式中, J_u 为 $F \times U$ 阶矩阵,其第 i 行第 j 列元素为 $\partial f_i / \partial u_j$ 。

数学理论表明 J_u 为欠秩矩阵时,解空间的拓扑将发生突变。此时,从矩阵 J_u 中任意抽取 F 列元素构成的 $F \times F$ 方矩阵的行列式均为 0。这些条件与约束方程式(1-3)一起,构成了结构空间划分和机构尺度分类的条件。可以证明,这种奇异划分条件与运动参数空间变量和结构参数空间变量的选择以及约束方程组的具体形式无关,是机构分类的最本质条件。由于这里行列式数目众多,且相互独立性关系比较复杂,再加上行列式为 0 常常会产生新的分支解,毫无遗漏且不重复地获得全部奇异条件并正确地表达是机构空间划分的首要问题。

对于图 1-1(a)所示的空间机构,第一参数选择方案中 Jacobi 矩阵 J_u 为 3×4 矩阵,第二参数选择方案中 J_u 为 2×3 矩阵,第三参数选择方案中 J_u 为 1×2 矩阵。欠秩条件与约束方程联合都得到相同的结构空间划分条件:

$$\pm a \pm r_1 \pm r_2 = 0 \quad (1-5)$$

解空间的划分条件仍然从约束方程对运动参数的 Jacobi 矩阵 J_u 中获得,即从 J_u 中任意抽取一个 $F \times F$ 方矩阵的行列式为 0(即为一个划分条件)。解空间划分条件的数目多达 C_U^F (从 U 个元素取 F 个元素的组合),如果考虑可能的分支解,划分条件的数目可能更多。任何机构运动参数的奇异总对应着一个这样的条件,这显然也就是在全部运动参数所对应的全部奇异位形。既然解空间划分条件是运动参数的奇异条件,自然与运动参数的选取有关,不同的运动参数集将导致对解空间的不同划分。

对于图 1-1(a)所示的空间机构,第一参数选择方案 Jacobi 矩阵 J_u 为 3×4 矩阵,4 个 3×3 方矩阵行列式为 0 所对应的条件是 4 个运动参数 $(\theta_1, \theta_2, s_1, s_2)$ 分别取极值的条件。第二参数选择方案 J_u 为 2×3 矩阵,3 个 2×2 方矩阵行列式为 0 所对应的条件是 3 个运动参数 (x, y, z) 分别取极值的条件。第三参数选择方案 Jacobi 矩阵 J_u 为 1×2 矩阵,2 个标量(1×1 方矩阵行列式)为 0 所对应的条件是 2 个运动参数 (θ_1, θ_2) 分别取极值的条件。

1.3.2 机构参数空间的划分方法

通常结构参数空间的维数都比较高,加上机构分类条件的数目也相当多,分类条件对结构参数空间的划分也就更为复杂。这里首先涉及几何体的正确表达和几何体邻接关系正确表达问题。