万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

最·新·版

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

考研数学

线性代数基础教材

铁军 主编

- 浓缩本科教材，从最基础角度详解考试要点
- 精析典型实例，助力“三基”知识理解与运用
- 集中提炼要点精华，贴心提示常见误区、失分点
- 精编同步习题及详解，现学现用、及时巩固提高

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

考研数学

线性代数基础教材

铁军◎主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目（CIP）数据

考研数学线性代数基础教材/铁军主编. —北京：北京理工大学出版社，2016.3
ISBN 978－7－5682－2014－9

Ⅰ.①考… Ⅱ.①铁… Ⅲ.①线性代数－研究生－入学考试－自学参考资料Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第053829号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编 / 100081
电　　话 / （010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68948351（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本 / 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张 / 14.5
字　　数 / 336千字
版　　次 / 2016年3月第1版　2016年3月第1次印刷
定　　价 / 36.00元

责任编辑 / 陈莉华
文案编辑 / 陈莉华
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 边心超

前　言

线性代数是高等院校理工类和经管类各专业的一门重要的基础理论课程，也是全国硕士研究生入学统一考试数学试卷中的考查学科之一（在数学一至数学三试卷中分值比例均为22%）。线性代数学科所研究的理论知识以及解决问题的思想、方法在科学技术领域有着广泛的应用，学好这门课程是至关重要的。通过本课程的学习，学生应掌握线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，并具备应用线性代数相关理论、方法去分析和解决实际问题的能力。

对于具有选拔性的研究生入学考试，教科书因受到课时和篇幅等因素的局限，不可能针对这一考试的需求对所有的考点都做出详尽阐释，也不可能提供多样的解题方法和对各章知识点、易错点的系统归纳总结。本书的主旨就是帮助读者把握线性代数这门课程知识体系的内涵及精华，并且根据研究生入学考试的范围和要求有针对性地突出重点，使读者在复习时掌握重点，在考试中应对自如，获得优异成绩。

本书为编者基于多年本科教学实践和丰富的考研辅导经验，严格依据最新全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的要求精心编写。为了方便读者在复习时与考试要求保持一致，本书按考试大纲的编排顺序逐章编写。本书包括行列式、矩阵、向量、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型，共六章。每章由本章概要、考查要点详解、重要公式结论与方法技巧、常见误区警示、本章同步练习、习题答案解析六大栏目构成。

本书在编写中力求深入浅出、突出重点，注重线性代数的基本概念、基本理论和基本方法，尽量做到详尽深入、概念准确、逻辑清晰、通俗易懂，同时在选材、理论推导、内容讲述等诸多方面全面满足考生的需要。本书包含较多的例题，不仅在解题方法方面体现出标准、简捷、巧妙的特点，并且在例题后增加了解题思路、分析和评注，帮助考生及时总结解题经验，避免常犯错误。此外，在各章的最后提供同步练习，以便考生能通过全面系统的解题训练切实巩固提高。

本书的总体特色：本科教科书与考研大纲考试要求的完美结合。

本书最大的特点在于：在内容编写方面像本科教材一样基础、详尽、透彻，并且在备考的适用性和针对性上更胜一筹，全面满足考生基础阶段复习的需求。

本书的编写体系和特点如下：

1. 本章概要

提纲挈领总括各章的主要内容，根据历年考试中命题特点提示复习要点并给出合理建议；形象呈现知识结构图，方便读者把握关键考点及考点的内在联系；详细指明各章的复习目标，再现考试大纲对各章考查的范围和要求，给读者提供明确方向及重点。

2. 考查要点详解

从最基础的角度切入，像本科教材一样详尽透彻讲述各章节涉及的基本概念、定理、法则等考点，既细致深入，又突出要点，注重知识点之间的衔接关联；针对各考查要点编排适量具有代表性的基础性例题，不仅提供规范、详细的分析解答，而且注重思路、方法的启示和归纳，使读者不仅学会知识，更能够灵活运用。

3. 重要公式结论与方法技巧

集中归纳各章需要牢记的、常用的、对解题特别关键的公式与结论，知识精华一应俱全，便于读者查找、记忆；提炼各章典型题目的解题方法技巧，有效帮助读者提高解题熟练度，为强化、冲刺复习奠定坚实基础。

4. 常见误区警示

为避免读者在基础复习阶段形成对知识内容的错误理解、对解题方法的错误思维定势、对细节的忽略错漏，造成后期复习的困扰甚至是考试中的失分，此栏目针对读者最常见的理解误区和复习盲点进行详细、透彻讲解，并结合典型实例辅助演示说明。

5. 本章同步练习及习题答案解析

各章提供适量习题及配套答案解析，供读者在复习各章之后通过独立解题熟悉“三基”（基本概念、基本方法、基本运算）在解题中的应用，并对照答案解析明晰错误原因和复习薄弱环节，及时查漏补缺。

由于本书是基础复习教材，要求读者重点掌握“三基”，对于综合性较强的题型，编者将在后续的《考研数学强化复习全书》（数学一至数学三）中继续进行详细讲解，希望读者在使用本书夯实基础之后再进行强化提高，最终在考试中取得优异成绩！

特别提示 本书适合数学一、数学二、数学三及数农考生使用，对于仅针对数学一至数学三个别卷种适用的章节，书中分别以上标“①”“②”“③”表示，数农考生可参考数学三的适用范围。书中收入了少量真题，对真题，在题号后以“年份卷种”的形式表示，如选自 2001 年数学四的真题表示为“2001[4]”。本书中涉及的符号力求与教育部考试中心发布的最新大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

由于编者水平有限，同时编写时间也较为仓促，不足与不当之处在所难免，恳请读者和专家批评指正。

编　者

目录

第一章　行列式

本章概要

知识结构图

- 行列式
  - 求逆序数 → 排列
    - 奇排列（逆序数为奇数）
    - 偶排列（逆序数为偶数）
  - 概念 → 不同行与不同列元素乘积的代数和（共有$n!$项）
  - 性质
    - 转置相等：行列式的行和列互换，其值不变
    - 互换反号：行列式的两行（两列）互换，其值变号
    - 数乘性质：若行列式的某行（某列）有公因子k，则可把公因子 k 提到行列式外面
    - 倍加不变：某行（某列）的倍加到另一行（另一列）的相应元素上去，行列式的值不变
    - 加法性质：某行（列）的所有元素均为两项之和，则行列式可拆为两个行列式之和
    - 零值性质
      （1）行列式某行（列）元素全为零，则行列式值为零
      （2）行列式两行（列）元素相同，则行列式值为零
      （3）行列式两行（列）元素成比例，则行列式值为零
  - 展开式
    - 余子式，代数余子式
    - $|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$（按第$i$行展开）
    - $|A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$(按第$j$列展开)
  - 错位展开式 → $a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j)$
  - 特殊行列式 → 对角行列式、上（下）三角形行列式、范德蒙（Vandermonde）行列式、分块矩阵行列式
  - 计算方法 → （1）定义法,（2）化三角形法,（3）展开法,（4）加边法,（5）递推法,（6）公式法,（7）其他方法

复习导语

行列式是线性代数的基础，对于掌握考研线性代数的解答题非常重要. 研究生入学考试中，直接考查行列式的题目并不多，且以客观题为主，往往与矩阵、向量和特征值等其他知识点综合考查. 考生若熟练掌握行列式的计算，在讨论可逆矩阵、矩阵的秩、向量组的线性相关性、线性方程组、方阵的特征值和特征向量、二次型以及正定矩阵等问题时，就掌握了一个有力的工具. 正确理解行列式的概念，准确掌握行列式的基本性质，并会熟练应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式，是本章的主要目标.

复习目标

1. 了解行列式的历史、概念的引入和应用.

2. 会求 n 元排列的逆序数.

3. 理解行列式的定义，包括行列式的项数、各项的特点、每项符号的确定等.

4. 准确掌握行列式的基本性质，并会熟练使用行列式的性质来化简、计算行列式.

5. 灵活掌握行列式按行(列)展开定理计算行列式，熟悉每一个元素的余子式和代数余子式的含义.

6. 熟悉一些特殊行列式(如对角行列式、上(下)三角形行列式、范德蒙(Vandermonde)行列式、分块矩阵行列式等)的展开结果.

7. 掌握一些常用的方法和技巧(如降阶法、加边法、行(列)累加法、归纳法或递推法等)来计算某些 n 阶行列式的值，或证明与其有关的命题.

8. 尝试将常见的特点鲜明的特殊行列式分为若干种类，定义一些形象化的名字或总结一些快捷解法，方便记忆和应用.

【大纲考试内容】

行列式的概念和基本性质；行列式按行(列)展开定理.

【大纲考试要求】

1. 了解行列式的概念，掌握行列式的性质.

2. 会应用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算行列式.

考查要点详解

第一节　行列式的人文发展历史

行列式的概念源于解线性方程组的问题. 行列式不仅是线性代数的一个基本组成部分，也是研究线性代数的一个重要工具. 线性代数的各章节都要用到行列式的概念和性质.

我们首先了解行列式的人文发展历史，克服学习线性代数的盲目性和历史虚无主义倾向.

行列式实质上是由一些数值排列而成的数字表格按一定的法则计算得到的一个数. 早在 1683 年与 1693 年，日本数学家关孝和与德国数学家莱布尼茨就分别独立地提出了行列式的概念. 此后，行列式主要应用于线性方程组的研究并逐步发展成为线性代数的一个理论分支. 1750 年，瑞士数学家克拉默(G. Cramer)在《线性代数分析导言》一书中给出了行列式的今日形式，并提出了利用行列式求解线性方程组的著名法则——克拉默法则. 1812 年，法国数学家柯西(A. L. Cauchy)发现

了行列式在解析几何中的应用，这一发现激起了人们对行列式应用进行探索的浓厚兴趣，并将其应用到解析几何以及数学的其他分支中. 1841 年，雅可比（C. G. Jacobi）在《论行列式形成与性质》一书中对行列式及其性质、计算作出系统阐述. 在行列式研究中做出重大贡献的还有后来的范德蒙（A. T. Vandermonde）、裴蜀（E. Bezout）和拉普拉斯（P. S. M. Laplace）等人.

第二节　二阶与三阶行列式的概念

一、二阶行列式的概念与来源

定义 1.2.1　二阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

评注

（1）二阶行列式的定义可用对角线法则来记忆. 如图 1-1 所示，把 a_{11} 到 a_{22} 的实连

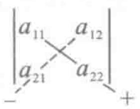

图 1-1

线称为主对角线，a_{12} 到 a_{21} 的虚连线称为副对角线，于是二阶行列式便是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

（2）考生需熟练掌握用定义计算二阶行列式的方法.

事实上，二阶行列式的定义源于用消元法解二元线性方程组.

设含有两个未知数且有两个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-2-1}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 是未知数 $x_j(j=1,2)$ 的系数，$b_i(i=1,2)$ 是常数项.

用消元法解该二元线性方程组，为消去未知数 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘上列方程的两端，然后两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \tag{1-2-2}$$

类似地，为消去未知数 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \tag{1-2-3}$$

为方便记忆和计算，将式(1-2-2)和式(1-2-3)中未知数 x_1 和 x_2 的系数 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 定义为二阶行列式，并引入符号记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，其中数 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 的**元素**，简称“元”. $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 的第一个下标 i 称为行标，表示 a_{ij} 位于行列式的第 i 行；第二个下标 j 称为列标，表示 a_{ij} 位于行列式的第 j 列. 位于第 i 行、第 j 列的元素称为行列式的 (i,j) 元.

利用二阶行列式的概念，式(1-2-2)中的 $b_1a_{22}-b_2a_{12}$ 和式(1-2-3)中的 $b_2a_{11}-b_1a_{21}$ 也可写成二阶行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}.$$

因此，当二元线性方程组(1-2-1)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，该方程组的解可用行列式简单表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D}. \tag{1-2-4}$$

评 注

式(1-2-4)中的分母 D 是由方程组(1-2-1)的系数所确定的二阶行列式(称为系数行列式). x_1 的分子 D_1 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11},a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是用常数项 b_1,b_2 替换 D 中 x_2 的系数 $a_{12};a_{22}$ 所得的二阶行列式.

【例 1.2.1】 方程 $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & x+1 \\ x-2 & 2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}$ 的根为________.

【答案】 -2，或 $\frac{7}{2}$.

【解】 利用二阶行列式的定义，将原方程化为等价方程

$$(x-1)^2-3=4-(x+1)(x-2)-(-12+6),$$

整理得 $2x^2-3x-14=0$，即 $(x+2)(2x-7)=0$.

故原方程的根为 $x=-2, x=\frac{7}{2}$.

评 注

计算二阶行列式最便捷的方法就是应用定义进行计算.

二、 三阶行列式的概念与来源

定义 1.2.2 三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

评 注

(1)①对角线法则：三阶行列式的定义可以借助图 1-2 加深记忆，称之为对角线法则.

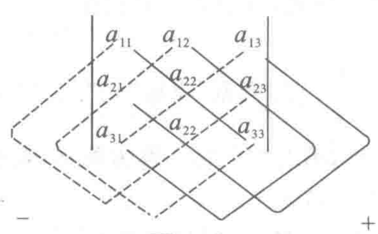

图 1-2

② 三阶行列式的运算结果共有六项，其中 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$ 来自三条主对角线方向上三个元素的乘积，前面是正号；$-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ 来自三条副对角线方向上三个元素的乘积，前面是负号.

(2)熟练掌握用定义计算三阶行列式的方法，但实际计

算三阶行列式时通常不使用定义，而是采用将其化简为上(下)三角形行列式或先化简后再按行(列)展开的方法.

(3)对角线法则只适用于二阶与三阶行列式，而四阶及更高阶行列式的计算要复杂得多，必须使用由二阶与三阶行列式推广得到的 n 阶行列式的定义.

事实上，三阶行列式的定义源于用消元法解三元线性方程组.

设含有三个未知数且有三个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases} \tag{1-2-5}$$

其中 $a_{ij}(i=1,2,3;j=1,2,3)$ 是未知数 $x_j(j=1,2,3)$ 的系数，$b_i(i=1,2,3)$ 是常数项.

在利用消元法求解三元线性方程组(1-2-5)的过程中，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32},$$

称之为三阶行列式.

当方程组(1-2-5)的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$ 时，方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D},$$

其中 $D_j(j=1,2,3)$ 是将系数行列式 D 的第 j 列换为右端常数项得到的行列式，即

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

【例 1.2.2】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$.

【解】 解法一 按对角线法则展开，有

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}=2\times5\times9+4\times3\times0+6\times4\times1-6\times5\times0-4\times4\times9-2\times3\times1$$

$$=90+0+24-0-144-6=-36.$$

解法二 利用行列式的“倍加不变”的性质和“数乘性质”，化为上三角形行列式.

首先，将行列式第 1 行的元素乘以(−2)加到第 2 行；其次，将第 2 行提出公因子(−3)；再将新的第 2 行的元素乘以(−1)加到第 3 行，则原行列式化为上三角形行列式. 即

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}=(-3)\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=(-3)\times2\times1\times6=-36.$$

评注

解法二应用了后面将要介绍的行列式的性质，与解法一的“按对角线法则展开”的方法相比较，可知运用性质可以更简捷地得到行列式的结果.

【例 1.2.3】 计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}$.

【解】 解法一 按对角线法则展开，有

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=0\cdot 0\cdot 0+a\cdot(-c)\cdot(-b)+b\cdot(-a)\cdot c-b\cdot 0\cdot(-b)-a\cdot(-a)\cdot 0-0\cdot(-c)\cdot c=abc-abc=0.$$

解法二 先将行列式按第 1 列展开，再按对角线法则计算二阶行列式，得

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{vmatrix}=0\cdot\begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix}-(-a)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ c & 0 \end{vmatrix}+(-b)\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & -c \end{vmatrix}=0-abc+abc=0.$$

评注

考生应用解法一“按对角线法则展开”进行计算时，要牢记三阶行列式的定义展开式，不能丢项. 解法二应用了后面将要介绍的行列式“按行(列)展开定理”，是常用的计算三阶行列式的方法.

【例 1.2.4】 解方程 $\begin{vmatrix} x^2 & 25 & 4 \\ x & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$.

【解】 解法一 先按对角线法则展开为多项式，再因式分解求方程的根.

$$\begin{vmatrix} x^2 & 25 & 4 \\ x & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5x^2+50+4x-20-25x-2x^2=3x^2-21x+30,$$

因式分解得 $3x^2-21x+30=3(x^2-7x+10)=3(x-2)(x-5)$，则方程式 $\begin{vmatrix} x^2 & 25 & 4 \\ x & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 化为 $3(x-2)(x-5)=0$，故原方程的解为 $x=2$ 或 $x=5$.

解法二 利用行列式“互换反号”的性质化为范德蒙行列式的形式求解.

将行列式的第 1 行与第 3 行交换位置，得

$$\begin{vmatrix} x^2 & 25 & 4 \\ x & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 5 & 2 \\ x^2 & 25 & 4 \end{vmatrix}=(-1)(5-x)(2-x)(2-5)=0,$$

故原方程的解为 $x=2$ 或 $x=5$.

评 注

解法二应用了后面将要介绍的行列式"互换反号"的性质和范德蒙行列式,更为简捷.

【例 1.2.5】 行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$,则 a,b 应满足( ).

(A) $a=b$ 或 $a=-b$. (B)$a=2b$ 且 $b\neq 0$. (C)$b=2a$ 且 $a\neq 0$. (D)$a=1,b=\dfrac{1}{2}$.

【答案】 (A).

【解】 解法一 先按对角线法则展开,再因式分解求方程的根.

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=a\cdot a\cdot 1+b\cdot 0\cdot 1+0\cdot b\cdot 0-0\cdot a\cdot 1-b\cdot b\cdot 1-a\cdot 0\cdot 0=a^2-b^2=0,$$

于是 $a=b$ 或 $a=-b$,应选(A).

解法二 先将行列式按第 3 列展开,再按对角线法则计算二阶行列式,得

$$D=\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}=a^2-b^2=0,$$

于是 $a=b$ 或 $a=-b$,应选(A).

【例 1.2.6】 证明:$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a)$.

【证明】 方法一 按对角线法则展开行列式,经计算即可证明结论成立.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}&=ab^2+bc^2+ca^2-b^2c-a^2b-ac^2=(ab^2-a^2b)+(bc^2-ac^2)+(ca^2-b^2c)\\&=ab(b-a)+(b-a)c^2+c(a-b)(a+b)=(a-b)(-ab-c^2+ac+bc)\\&=(a-b)[(ac-ab)+(bc-c^2)]=(a-b)(a-c)(c-b)\\&=(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

方法二 利用行列式的"倍加不变"的性质,化为上三角形行列式.

首先,将行列式第 1 行的元素乘以 $(-a)$ 加到第 2 行;其次,将行列式第 1 行的元素乘以 $(-bc)$ 加到第 3 行;再将新的行列式的第 2 行乘以 c 加到第 3 行,则原行列式化为上三角形行列式. 于是

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}&=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & ca-bc & ab-bc \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & ab-bc+c(c-a) \end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & 0 & (c-a)(c-b) \end{vmatrix}=(a-b)(b-c)(c-a).\end{aligned}$$

【例 1.2.7】 函数 $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & 1 \\ 1 & -x & 2 \\ 2 & 3 & x \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数为________,x^2 的系数为________.

【答案】 $-2,-1$.

【解】 解法一 行列式按对角线法则展开为多项式,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=-2x^3+4x+3-(-2x)-x^2-12x=-2x^3-x^2-6x+3,$$

于是函数 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -2,x^2 的系数为 -1.

解法二 先将行列式利用"倍加不变"的性质进行化简,把行列式的第 2 行乘以 $(-2x)$ 加到第 1 行,再把行列式的第 2 行乘以 (-2) 加到第 3 行,然后按第 1 列展开,再按对角线法则计算二阶行列式,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 2x^2+x & 1-4x\\ 1 & -x & 2\\ 0 & 2x+3 & x-4\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}2x^2+x & 1-4x\\ 2x+3 & x-4\end{vmatrix}$$

$$=(-1)[(2x^2+x)(x-4)-(1-4x)(2x+3)]=-2x^3-x^2-6x+3,$$

于是函数 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -2,x^2 的系数为 -1.

解法三 先将行列式利用"倍加不变"的性质进行化简,把行列式的第 2 行加到第 1 行,则行列式中只有主对角线上的元素包含字母 x,得

$$f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2x+1 & 0 & 3\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}.$$

根据对角线法则知,行列式展开后只有主对角线上三个元素的乘积才出现 x^3 和 x^2 项,而化简后的行列式 $\begin{vmatrix}2x+1 & 0 & 3\\ 1 & -x & 2\\ 2 & 3 & x\end{vmatrix}$ 主对角线上三个元素的乘积为 $(2x+1)(-x)x=-2x^3-x^2$,所以函数 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 -2,x^2 的系数为 -1.

评注

(1)解法一和解法二都是通过计算行列式得到 x^3 和 x^2 的系数,这种方法的缺点是计算烦琐,优点是易于掌握、理解且非常准确、不易出错.

(2)通常在解答此类题目时,先利用行列式的性质进行变换,将包含字母 x 的项都集中到行列式的主对角线上去,然后计算主对角线上三个元素的乘积,从而得到 x^n 的系数.从解法三可以看出,求解此类题目不需要把行列式的值计算出来,只需考虑行列式的不同行不同列乘积中出现的包含 x^n 的项,经过合并同类项将它们的系数求出即可.

【例 1.2.8】 $\begin{vmatrix}\lambda & 2 & 1\\ 2 & \lambda & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=0$ 的充要条件是(　　).

(A)$\lambda=2$.　　　　(B)$\lambda=-2$.

(C)$\lambda=0$.　　　　(D)$\lambda=3,\lambda=-2$.

【答案】 (D).

【解】 解法一 行列式按对角线法则展开为多项式,得

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2-2-\lambda-4=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda+2)(\lambda-3).$$

故 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $\lambda=3,\lambda=-2$，应选(D).

解法二 先将行列式利用“倍加不变”的性质化简，把行列式的第三行乘以(-1)加到第一行，再把行列式按第三列展开，最后按对角线法则计算二阶行列式，得

$$\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 & 0 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 3 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-\lambda-6=(\lambda+2)(\lambda-3).$$

故 $\begin{vmatrix} \lambda & 2 & 1 \\ 2 & \lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充要条件是 $\lambda=3,\lambda=-2$，应选(D).

第三节 n 阶行列式的概念

为了得到 n 阶行列式的定义，首先要弄清楚二阶与三阶行列式的结构规律，然后根据所得到的规律来推广行列式的概念，再利用消元法求解四元、五元线性方程组，验证所给出的 n 阶行列式定义的合理性，最后得到更为一般的线性方程组的求解公式. 为此，首先需要引入排列的逆序数的概念.

一、排列的逆序数及其性质

由二阶行列式和三阶行列式的定义可以看出，行列式展开式中的每一项是由该行列式所有不同行和不同列的元素的乘积组成的，每一项的符号取决于这些不同行、不同列的元素的排列顺序. 这就引出了行列式的逆序数问题. 研究逆序数的目的就是为了确定行列式每一项的符号，从而得到 n 阶行列式的定义.

定义 1.3.1 排列 由 $1,2,\cdots,n$ 这 n 个自然数组成的一个有序数组 $j_1j_2\cdots j_n$ 称为一个 n 阶排列，也称为 n 元排列或 n 级排列.

评注

(1)把 n 个不同的自然数排成一列，共有几种不同的排法？事实上，n 个自然数 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列的种数通常用 P_n 表示，且 $P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!$.

(2)为了得到计算 P_n 的公式，可以讨论如下：

从 n 个自然数中任取一个放在第一个位置上，有 n 种取法；又从剩下的 $n-1$ 个自然数中任取一个放在第二个位置上，有 $n-1$ 种取法；这样继续取下去，直到最后只剩下一个自然数放在第 n 个位置上，只有 1 种取法. 于是

$$P_n=n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot3\cdot2\cdot1=n!.$$

(3)显然，$1,2,\cdots,n$ 也是一个排列，这个排列具有自然顺序，也称为自然排列或标准排列，就是按递增的顺序排起来的；其他的排列或多或少地破坏了自然排列，需要引入逆序的概念.

定义 1.3.2 逆序 在一个排列中,如果有一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序.

定义 1.3.3 逆序数 一个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 中逆序的总数称为这个排列的逆序数,记为

$$\tau(j_1j_2\cdots j_n).$$

评注

(1)本节的重点是求一个排列的逆序数,难点是求含有字母的排列的逆序数.

(2)计算排列的逆序数的步骤:① 对排列中的每个元素,计算其前面比它大的数字的个数,即为该元素的逆序数;② 将所有元素的逆序数累加,即得所求排列的逆序数.

定义 1.3.4 奇排列 逆序数为奇数的排列称为奇排列.

定义 1.3.5 偶排列 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

评注

n 阶排列共有 $n!$ 个,其中奇、偶排列各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

定义 1.3.6 对换 把一个排列中两个数的位置互换,而其余的数不动,就得到另一个排列,这样一种变换称为一个**对换**.相邻两个元素对换,称为**相邻对换**.

评注

(1)对换改变排列的奇偶性,即奇、偶排列经过一次对换变成偶、奇排列.

(2)任一 n 阶排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 与标准排列 $1,2,\cdots,n$ 都可以经过一系列对换互变,且奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

定理 1.3.1 一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

推论 1.3.1 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数,偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

下面讨论计算排列的逆序数的方法:

不失一般性,不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序.设 $j_1j_2\cdots j_n$ 为这 n 个自然数的一个排列,考虑元素 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$,如果比 j_i 大且排列在 j_i 前面的元素有 τ_i 个,就说 j_i 这个元素的逆序数是 τ_i.全体元素 $j_i(i=1,2,\cdots,n)$ 的逆序数的总和 $\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\tau_i$ 即是这个排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数.

【例 1.3.1】 排列 217986354 的逆序数为( ).

(A)9.　　(B)10.　　(C)17.　　(D)18.

【答案】 (D).

【解】 在九级排列 217986354 中,由左向右依次计算,有:元素 2 排在首位,逆序数为 $\tau_1=0$;元素 1 前面比它大的数有一个(2),逆序数为 $\tau_2=1$;元素 7 和 9 前面没有比它们大的数,逆序数分别为 $\tau_3=0,\tau_4=0$;元素 8 前面比它大的数有一个(9),逆序数为 $\tau_5=1$;元素 6 前面比它大的数有三个(7,9,8),逆序数为 $\tau_6=3$;元素 3 前面比它大的数有四个(7,9,8,6),逆序数为 $\tau_7=4$;元素 5 前面比它大的数有四个(7,9,8,6),逆序数为 $\tau_8=4$;元素 4 前面比它大的数有五个(7,9,8,6,5),逆序数为 $\tau_9=5$.因此,排列 217986354 的逆序数为

$$\tau(217986354)=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4+\tau_5+\tau_6+\tau_7+\tau_8+\tau_9=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18,$$

所以应选(D).