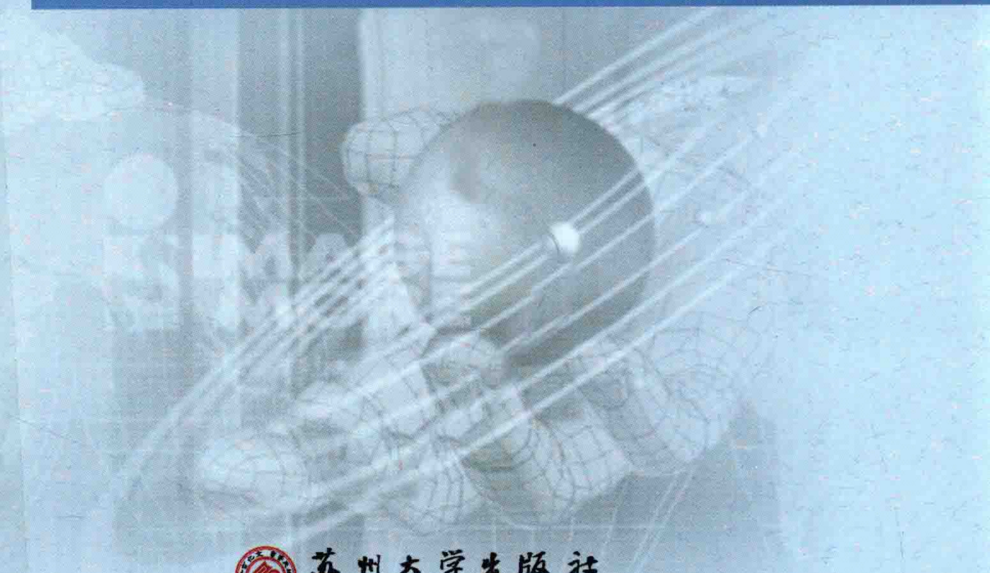
基础教育改革与发展丛书
（第四辑）

丛书总主编　朱林生

数学史和数学方法论

SHUXUESHI HE SHUXUE FANGFALUN

孙智宏 ● 著



苏州大学出版社
Soochow University Press

基础教育改革与

（第四辑

丛书总主编

数学史和数学方法论

SHUXUESHI HE SHUXUE FANGFALUN

孙智宏◎著

苏州大学出版社
Soochow University Press

图书在版编目(CIP)数据

数学史和数学方法论 / 孙智宏著. —苏州：苏州大学出版社，2016.12
(基础教育改革与发展丛书. 第四辑)
ISBN 978-7-5672-2011-9

Ⅰ.①数… Ⅱ.①孙 Ⅲ.①数学史—研究②数学方法—研究 Ⅳ.①011②01-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 315420 号

书　　名	**数学史和数学方法论**
著　　者	孙智宏
责任编辑	管兆宁
出版发行	苏州大学出版社
	(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
印　　刷	南通印刷总厂有限公司
开　　本	700 mm×1 000 mm　1/16
字　　数	130 千
印　　张	8
版　　次	2016 年 12 月第 1 版
	2016 年 12 月第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978-7-5672-2011-9
定　　价	20.00 元

苏州大学出版社网址　http：//www.sudapress.com

前　言

本书是一本关于数学发展史和数学思想方法的著作，适合高中生、大学生、数学爱好者和数学教师参考使用，可作为数学史与数学方法论的教材.

本书不仅介绍了数学的起源和发展历程，其中包括许多著名数学家的故事，还介绍了数学中常用的化归、归纳与类比等思想方法，讨论了数学基础、数学哲学与Polya(波利亚)数学教育思想. 为照顾读者，数学史部分没有深入地介绍拓扑、微分几何、代数几何等高级内容，而是侧重讲解初等数学历史和数学家的故事. 数学博大精深，优秀数学家很多，我们只介绍了那些在数学发展中起关键作用的一些著名数学家的故事，他们的成长经历和研究历程将给读者许多启示.

阅读本书可让读者更全面、更深入地理解数学，激发读者对数学的兴趣与创造热情. 本书对数学的学习、解题和教学也有指导作用.

孙智宏

2016 年 11 月

目 录
Contents

第一章 导 论

1.1 数学的本性 …… 1
1.2 数学的特点 …… 2
1.3 数学史的分期 …… 4
1.4 什么是数学方法论 …… 4
1.5 数学方法论的产生背景 …… 5
1.6 数学方法论的研究意义 …… 7

第二章 四大文明古国的数学

2.1 数与形概念的产生 …… 8
2.2 巴比伦的文明 …… 8
2.3 埃及文明 …… 9
2.4 古印度的数学 …… 10
2.5 中国的古典数学 …… 10

第三章 古希腊数学的形成与发展

3.1 古希腊数学评述 …… 12
3.2 Thales(泰勒斯) …… 13
3.3 Pythagoras(毕达哥拉斯) …… 13

3.4 Plato(柏拉图)和 Aristotle(亚里士多德) …… 14
3.5 Euclid(欧几里得) …… 15
3.6 Archimedes(阿基米德) …… 16
3.7 Apollonius(阿波罗尼奥斯) …… 17
3.8 Diophantus(丢番图) …… 18
3.9 Ptolemy(托勒密) 和 Hypatia(希帕蒂娅) …… 19

第四章 近代数学的兴起与发展

4.1 阿拉伯的数学 …… 20
4.2 文艺复兴运动 …… 21
4.3 16 世纪的数学 …… 23
4.4 17 世纪的数学 …… 25
4.5 18 世纪的数学 …… 29

第五章 19 世纪的数学

5.1 数论的发展 …… 36
5.2 代数学的新生 …… 42
5.3 几何学的变革 …… 47
5.4 分析的严格化 …… 51

第六章 现代数学发展概论

6.1 20 世纪的纯粹数学 …… 54
6.2 空前发展的应用数学 …… 58
6.3 现代数学成果介绍 …… 60
6.4 中国现代数学 …… 65
6.5 数学会与数学奖 …… 67

第七章 数学基础与数学哲学

7. 1 三次数学危机 …… 69
7. 2 集合论的公理化 …… 72
7. 3 数学基础的争论 …… 73
7. 4 数学的灾难 …… 74
7. 5 数学向何处去 …… 76

第八章 化归方法

8. 1 化归方法 …… 78
8. 2 关系映射反演方法 …… 80

第九章 归纳与类比

9. 1 归纳法 …… 88
9. 2 类比法 …… 90

第十章 数学发现范例

10. 1 等周问题 …… 95
10. 2 π 的计算与 Monte-Calo 方法 …… 96
10. 3 Chebyshev 多项式 …… 98

第十一章 数学创造

11. 1 问题在数学发展中的作用 …… 102
11. 2 兴趣与好奇心 …… 104

11.3 数学的直觉能力 …… 105
11.4 数学研究的过程 …… 106
11.5 学习、思考与创造 …… 109

第十二章 Polya 数学教育思想

12.1 Polya 关于教学的认识 …… 115
12.2 Polya 的教学观点 …… 116
12.3 Polya 教师十诫 …… 117
12.4 Polya“怎样解题表” …… 117
12.5 课堂教学艺术 …… 118

参考文献 …… 120

第一章　导　论

数学是上帝的生命，数学家乃神灵的信使.

——Novalis

1.1　数学的本性

数学家 Courant(库朗)：数学是什么？对于学者和门外汉，这都不是靠哲学来回答的，而是靠从事数学的经验来回答的.

在一般人心目中数学是抽象难懂的天书，学生会认为数学是智力游戏，工程师和物理学家认为数学只是他们用到的一种方法和工具，哲学家认为数学是一小串一小串逻辑推理组成的长链，但数学家认为数学是一门高尚的艺术.

要想给数学下定义是很难的，随着时代的变迁，数学的含义和内容会有所不同. 如在 18 世纪力学是数学的分支，现在力学是物理的分支.

Engles(恩格斯)：数学是研究现实世界空间形式与数量关系的一门科学.

但现在数学不只是算术、代数和几何，还有拓扑和分析等分支. 法国大数学家 Weil(魏伊)说，非要给某些东西下定义是愚蠢的. 如猫是不会定义什么是老鼠的，但它闻到鼠味就知道是老鼠，不是老鼠也能辨别，这就够了.

尽管很难给数学下定义，但数学的一些共同特征是人们所公认的.

1. 数学是一项崇高的智力活动

Comtes：数学是人类理性最原始的源泉.

Poincare(庞加莱)：数学研究所用外部景观最少，探讨内在世界最多，因而最接近人类心灵的本质.

Selberg(塞尔伯格)：我很同情非数学家，我觉得他们失去了一种最激动人心的、报酬丰厚的智力活动.

数学与音乐极相似，都是用简单的阿拉伯数字和若干符号造就了一个无

限奇妙的世界.

2. 数学是人类征服自然的有力武器

Kepler(开普勒)利用数学发现行星运动三大定律；Maxwell(麦克斯韦)在1873年出版了《电磁通论》,用Maxwell方程导出电、磁、光的规律,并预言电磁波；Einstein(爱因斯坦)在1916年出版了《广义相对论基础》,用Riemann几何改造Newton引力理论；Gauss(高斯)在1801年利用最小二乘法确定第一颗小行星谷神星的轨道.

3. 数学是关于定理的学问

怎样发现定理？怎样证明定理？怎样理解定理？怎样推广定理？怎样应用定理？

1.2 数学的特点

1. 抽象性

自然数是抽象的,“1”既可表示一个人,也可表示一本书或一头猪.点和直线也是抽象的,Euclid(欧几里得)在《几何原本》中说,点是没有大小的,直线是两端笔直、没有宽度、无限延长的.我们生活在三维空间,可数学家对所有正整数 n 引进 n 维空间,并研究无穷维空间与分数维空间.

2. 严密性(真理性、精确性)

数学是精确科学,体现为数学对现实世界的精确描述以及数学真理的不可争辩.17世纪的数学家和哲学家Descartes(笛卡儿)认为寻求科学真理的方法只能是数学方法,立足于公理上的证明是无懈可击的,且不是任何权威所能左右的.

Hecke(赫克):在别的学科中,每代人都推翻前人建立的理论,而只有在数学中才是每代人都更上一层楼.

3. 应用性

Gauss:数学是科学的女皇,也是科学的女仆.

Kepler:自然界的和谐是上帝用数学语言透露给我们的.

White:工匠后面是化学家,化学家后面是物理学家,而物理学家后面则是数学家.

4. 艺术性

Russell(罗素)：数学的美是冷而严肃的美.

Poincare(庞加莱)：科学家研究自然并非因为它有用处；他研究它，是因为他喜欢它；他之所以喜欢它，是因为它是美的. 如果自然不美，它就不值得我们了解，生活也就毫无意义.

Dirac(狄拉克)：那些奠基者的方程都具有触目惊心的数学的美.

Fermat(费尔马)最短时间原理：光总是沿着花时间最少的路径行走.

数学美的例子：勾股定理、二次互反律、Newton-Leibniz 公式、素数定理.

二次互反律：设 p,q 是不同的奇素数，则当 p,q 中至少有一个为 $4k+1$ 形数时，不定方程 $x^2=q+py$ 有整数解当且仅当 $x^2=p+qy$ 有整数解；当 p,q 均为 $4k+3$ 形数时，不定方程 $x^2=q+py$ 有整数解当且仅当 $x^2=p+qy$ 无整数解.

Gauss 称二次互反律为“算术中的宝石”，共给出六个不同证明.

1800 年左右，Legendre(勒让德)与 Gauss 各自独立地猜想现今的素数定理.

素数定理：设 $\pi(x)$表示不超过 x 的素数(质数)个数，则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}}=1.$$

设 p_n 表示第 n 个素数，则可证素数定理等价于 $p_n\sim n\ln n(n\to+\infty)$. 素数定理一提出就震惊数学界，人们说这是“离散与连续的不解之缘”. 1896 年，Hadamard(哈达玛)与 Poussin 各自独立地沿着 Riemann(黎曼)指明的方向证明了素数定理.

5. 竞技性

数学研究也体现为一种竞争和虚荣心的满足. Laplace(拉普拉斯)说：我搞研究就是为了证明自己的智慧超人一等. 丁肇中说，搞研究要奔着第一去. 他解释说，科学研究领域同样充满了竞争，而且竞争很厉害. 因此，如果有很多人在进行同一个研究和实验，那么搞这个研究的科技工作者就要力争做第一，因为世人记住的是第一个公布研究成果的人或团队，第二及第二以后同样研究成功的人，一般都不会被记住.

学者要遵守职业道德，不能一稿多投，不能剽窃别人成果，公正评价他人成果. 许多科学家都有独创的欲望，所以历史上爆发过许多优先权的争论.

例: Newton(牛顿)和 Leibniz(莱布尼茨)关于微积分发明权的争论, Descartes 和 Fermat 关于解析几何的优先权之争,亨利·卡文迪许发现欧姆定律、库仑定律等而没有发表.

1.3 数学史的分期

数学史的分期如下:

(1) 数学的起源与早期发展(公元前 6 世纪前).

(2) 初等数学时期(公元前 6 世纪—公元 16 世纪):

① 古代希腊数学(公元前 6 世纪—公元 6 世纪);

② 中世纪东方数学(3—15 世纪);

③ 欧洲文艺复兴时期(15—16 世纪).

(3) 近代数学时期(17—18 世纪).

(4) 现代数学时期(1820 至今):

① 现代数学酝酿时期(1820—1870);

② 现代数学形成时期(1870—1940);

③ 现代数学繁荣时期(当代数学时期,1940 至今).

文艺复兴后数学加速向前发展. 17 世纪的数学超过以往一切数学的总和,19 世纪的数学超过以往一切数学的总和,1940 年以后的数学超过以往一切数学的总和.

1.4 什么是数学方法论

什么是方法? 它是一种技巧、诀窍,本指遵循某一道路的意思. 掌握它可以少走弯路,多快好省地发现真理. 正如 Bacon 所说,跛足而不迷路能赶过虽健步如飞但却误入歧途的人. Descartes 说:我所解决的每个问题都成为以后解决其他问题的法则.

方法论(Methodology): 把某种共同的发展规律和研究方法作为讨论对象的一门学问.

科学方法本指获得科学知识应该遵循的程序. 但现代科学和科学哲学的成就表明,不存在发现和发明的机械程序或万无一失的方法,正如不存在包治百病的灵丹妙药一样. 因此科学方法主要是对科学成就的评价和选择方法或对科学的发现或发明做出结构的分析,把重点放在科学知识的动态发展上.

数学方法论主要研究和讨论数学的发展规律、数学思想方法以及数学中的发明创造法则.

(1) 宏观的数学方法论：数学发展规律的研究和数学家成长规律的分析；

(2) 微观的数学方法论：发明创造法则的研究.

由于数学发展规律是从数学发展史的丰富材料中归纳分析出来的，因此学习数学方法论必须熟悉并了解数学史.

1.5　数学方法论的产生背景

数学方法论与科学方法论紧密相连，这两门学科都是在 20 世纪初科学与数学大发展大论战的背景下产生的. 历史上第一个研究科学方法的是古希腊最伟大的思想家 Aristotle(亚里士多德，公元前 384—前 322).

Aristotle 认为科学家必须进行仔细观察，科学研究是从观察上升到一般原理，然后再回到观察. 前一阶段用归纳，后一阶段用演绎. Aristotle 关于科学是演绎系统的理想在 Euclid(欧几里得)几何学与 Archimedes(阿基米德)静力学中得到了实现.

文艺复兴前期，Bacon(培根，1214—1292)出版了《新工具》一书，强调了实验的重要性，他认为 Aristotle 的归纳—演绎两阶段是不够的，应补以第三阶段，即归纳出的原理要接受经验的检验.

到了 Galileo(伽利略，1564—1642)，文艺复兴后人们心中沸腾着的伟大思想在他那划时代的工作中获得了实际的结果. 他不但给近代科学制定了合理化的程序，而且用自己实际做出的发现证实了这程序的效果. 这是近代科学诞生的标志，是科学认识的重大转变，是人类思想史上最伟大的成就之一.

20 世纪由于量子力学和相对论的产生，人们研究了科学哲学，主要的三个流派有 Popper(波普尔)的证伪主义(科学在不断否定中前进)、Kuhn(库恩)的不断革命论(对违背原有范型的反例研究引导科学革命和新理论的产生)和 Lakatos(拉卡托斯)的历史主义(科学发展取决于特定的历史环境和背景).

古希腊数学家 Euclid(公元前 330—前 275)的《几何原本》(十三卷)是演绎的光辉典范，影响深远. 该书从 23 个定义、5 个公设和 5 个公理开始按 Aristotle 的逻辑思想以严谨的方式建立起几何学知识的整个大厦，《几何原

本》决定了其后两千年的思想发展.

Descartes(笛卡儿,1596—1650)是法国伟大的数学家和哲学家.他对方法论的影响体现在他的伟大著作《思想的指导法则》(1628)和《更好地指导推理和寻求科学真理的方法论》(简称《方法论》,1637)中,其中《方法论》包括说明其方法效用的三个著名附录:《几何》、《折光》和《陨星》.在《几何》中,Descartes 建立了坐标几何,揭开了近代数学发展的序幕.Descartes 很注重科学方法的研究,他把科学方法论作为一切工作的首要对象,时刻在寻求一种能在科学中便利于发明和发现真理的一般方法.他试图确定人们怎样得到的知识才是可靠的.据他说那是在 1619 年一天的梦里,他找到了这个方法,这就是数学的方法.他为数学的严密性所吸引,认为这才是纯真的基本真理.他把他的一套方法应用于几何,结果发现了代数和几何的类似性,从而指导他创立了解析几何.Descartes 的科学思想影响和支配了 17 世纪,他的主要贡献使科学领域发生根本的转折,他所建立的科学方法和开创的方法论指引了科学事业的发展和革命.

Leibniz(莱布尼茨,1646—1716)是德国伟大的数学家和哲学家.Leibniz 多才多艺,留有方法论著作《论发明的艺术》.

Euler(欧拉,1707—1783)是历史上最多产的数学家,出版了 1000 多篇论文和 80 多本书.Euler 常在他的著作中描述他的思想方法和发现过程.他通过他的著作影响了几代数学家.Laplace(拉普拉斯)说:读读 Euler,他是我们一切人的老师.Gauss 说:学习 Euler 的著作乃是认识数学的最好途径.

Poincare(庞加莱,1854—1912)是法国伟大的数学家、物理学家、天文学家和科学哲学家.他写了四本科学哲学著作:《科学与假设》(1902)、《科学的价值》(1905)、《科学与方法》(1908)与《最后的沉思》(1913).Poincare 对于数学和科学的广泛论述,他的科学哲学思想,他关于数学发明心理学的研究都产生了意义深远的影响.

Hadamard(阿达玛,1865—1963)根据对许多数学家、科学家包括 Einstein(爱因斯坦)在内的调查表和 Poincare 的演讲写成《数学领域中的发明心理学》,通过许多案例分析剖析了数学创造的心理过程.该书对数学创造及方法论研究有指导作用.

Polya(波利亚,1887—1985)是匈牙利著名数学家和数学教育家.他出版了三套数学教育名著:《怎样解题》、《数学的发现》(三卷)、《数学与猜想》(两

卷).在这些著作中他教导人们怎样解题、怎样教学和怎样做研究.

20 世纪初关于数学基础的大论战形成形式主义、直觉主义和逻辑主义三个学派,三个学派的观点对数学思想方法和数学哲学有深远影响.

1.6　数学方法论的研究意义

数学是工具性很强的学科,具有高度抽象的特征,因此研究其方法论,掌握其思想方法更为必要.对正在学数学的学生来说,只有注意掌握数学思想方法,才能学得深、理解得透,解决实际问题时才能得心应手.而对正在成长的数学工作者尤为必要,懂得方法论可以少走弯路,获得更多更好的成果.优秀的教师也总希望多教出一些有创造才能的学生,因此了解怎样解决数学问题、怎样才能发现数学真理和创造数学方法就显得非常必要.