



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

Discussion about the expression of Stewart theorem  
—The ramble of vector theory

从Stewart定理的表示谈起  
——向量理论漫谈

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书  
丛书主编 王梓坤

Discussion about the expression of Stewart theorem  
—The ramble of vector theory

从Stewart定理的表示谈起  
——向量理论漫谈

沈文选 杨清桃 著



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

## 内容简介

向量既是一种图形,也是一种数学表达式,因而向量法的特点是数形结合,且运算有法可循,带有综合法的技巧,呈现或蕴含坐标法的规则,是一种“价廉物美”的数学工具.本书介绍了向量的概念及运算,研究并举例说明了一些特殊数学关系的向量表示,给出了一些著名平面几何定理的向量法证明.本书运用大篇幅介绍了如何运用向量知识处理中学代数问题、平面几何问题、立体几何问题,还介绍了向量与复数相互配合运用问题.全书中以大量的高考试题、数学竞赛试题为实例,运用向量法来求解.

本书可供初等数学、竞赛数学、教育数学研究工作者及广大数学爱好者参考,适用于广大中学数学教师、师范院校数学专业教师与学生以及高中学有余力的学生学习.

## 图书在版编目(CIP)数据

从 Stewart 定理的表示谈起:向量理论漫谈/沈文选,杨清桃著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 2016.7

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5874 - 1

I. ①从… II. ①沈… ②杨… III. ①向量 - 研究  
IV. ①O183.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 032386 号

策划编辑	刘培杰 张永芹
责任编辑	张永芹 齐新宇
封面设计	孙茵艾
出版发行	哈尔滨工业大学出版社
社 址	哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号
传 真	0451 - 86414749
网 址	<a href="http://hitpress.hit.edu.cn">http://hitpress.hit.edu.cn</a>
印 刷	牡丹江邮电印务有限公司
开 本	787mm × 960mm 1/16 印张 47.5 字数 510 千字
版 次	2016 年 7 月第 1 版 2016 年 7 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978 - 7 - 5603 - 5874 - 1
定 价	158.00 元



(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

这三本书融进了教育数学思想，  
也融进了新课程理念。对于  
提高数学教育方向的学生以  
及中学数学教师的数学修养，  
扩展其数学视野，丰富其数学  
文化，都将发挥重要作用。

书祝

沈文选先生新书问世

张景中于

2013年9月28日

◎  
代  
序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

### 潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走边读的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

### 抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得很了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

### 始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

### 丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多



的“纵横谈”。

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著。我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠。

### 读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择。决不要看坏书，对一般书，要学会速读。

读书要多思考。应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题。

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录。对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”。动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

## ◎ 序

文选教授是一位多产的数学通俗读物作家。他的作品，重点不在于文学渲染，人文解读，而是高屋建瓴，以拓展青年学子的数学视野，铸就数学探究的基本功为己任。这次推出的《从 Cramer 法则谈起——矩阵论漫谈》《从 Stewart 定理的表示谈起——向量理论漫谈》《从高维 Pythagoras 定理谈起——单形论漫谈》三部著作，就是为一些有志于突破高考藩篱，寻求更高数学发展的学生们准备的。

中国数学教育正在进入一个新的周期。21 世纪初的数学课程改革，正在步入深水区。单靠“大呼隆地”从教学方法入手改革课堂教学，毕竟是走不远的。数学课堂教学必然要基于数学本身，揭示数学本质。如果说，教学方法相当于烹调技艺，那么数学内容就相当于食材。离开食材，何谈烹调？一个注重数学内容的数学教育，正向我们走来。本套书作为青年数学教师的读物，当有提升数学素养之特定功效。

文选教授是全国初等数学研究学会的首任理事长,他是初等数学研究、竞赛数学研究、教育数学研究的积极倡导者和实践者.这套书为广大初等数学研究、竞赛数学研究、教育数学研究爱好者提供了丰富的材料,可供参考.

文选教授的这些著作,事关中国数学英才教育的发展.中国的高中学生,为了高考取得高分,不得不进行反复复习,就地空转.如果走奥赛的路子,也脱不开应试的框框.多年来,那些富有数学才华,又对数学怀有浓厚兴趣的年轻人,没有选择自己数学道路的余地,结果便造成了中国内地数学英才教育的缺失.反观其他国家和地区的一些数学才俊,年纪轻轻就涉猎高等数学,徜徉在数学探究的路途上.仅就亚洲来说,中国香港移民到澳大利亚的陶哲轩,越南的吴宝珠,都已经获得菲尔兹奖.相形之下,当知我们应努力之所在了.

话说回来,本书的内容,虽与高考无直接关系,但却是“数学万花丛中的一朵”.有“花香”的熏染,数学功力日增,对升学的侧面效应,恐也不可小看.数学英才,毕竟是大学所瞩目的.最后,我热切期望,本书的读者能够像华罗庚先生所教导的那样,将书读到厚,再从厚读到薄,汲取书中之精华,并在不久的将来,能在中国数坛的预备队里见到他们活跃的身影.

与文选教授合作多年,欣闻他新作问世.写了以上的感想,权作为序.

张奠宙

华东师范大学数学系

2013年5月10日

# ◎ 前 言

美丽的“数学花园”，奇妙的“数学花坛”，如果去“游园”，不仅欣赏了纯美的景观，而且可以享受充满数学智慧的精彩“游程”，开阔我们的视野，优化我们的思维，涤去蒙昧与无知。诺贝尔奖获得者、著名的物理学家杨振宁先生曾说：“我赞美数学的优美和力量，它有战术的技巧与灵活，又有战略上的雄才远虑，而且，堪称奇迹中的奇迹的是，它的一些美妙概念竟是支配物理世界的基本结构。”

为建设好这座“数学花园”，扩展“数学花坛”，就要运用张景中院士的教育数学思想，对浩如烟海的数学材料进行再创造，把数学家们的数学化成果改造成学习者易于接受的知识，把数学化过程尽可能变成适合学习者可操作的活动过程，借助操作活动展示数学的优美特征，凸显数学的实质内涵，揭示朴素的数学思考过程，让数学“冰冷”的美丽转化为“火热”的思考，将数学抽象的形式转化为具体的案例。这也可以响应张奠宙教授的倡议：建构

符合时代需求的数学常识,享受充满数学智慧的精彩人生.

数学是从认识和研究图形和数开始的.大体上可以说,图形的优点是直观形象,能更直接地用来描述我们周围的世界,也更容易理解,但图形不便于计算,利用几何推理的方法来研究图形,灵活性、偶然性太大,不容易掌握;数的优点是用比较死板的方法进行运算,便于掌握,但比图形更抽象,将客观世界用数来描述的难度更大一些.笛卡儿引进了坐标之后,打破了数与形的界限,将几何图形最基本的元素——点,用坐标来表示,将曲线、曲面用方程来表示,通过对坐标和方程的代数运算来研究几何图形的性质,这就是解析几何.

向量也是一种图形,其具体、直观、形象的优点,便于用来描述客观世界.向量又可以直接进行运算.因此,向量兼有图形和数的优点.我们可以将几何图形用向量来描述,通过向量的运算来解决几何问题;也可以进一步将向量的运算转化为坐标的运算来解决问题,这是建立几何理论与算法体系的一种简明有效的途径.

向量是一种“价廉物美”的数学工具,学起来很容易,需要花费的时间和精力不多,用处却很大,可以解决很多的几何和代数问题.

线性运算是向量的基本运算.向量可以用有向线段表示,用有向线段进行向量的线性运算,具体且直观,特别是运用向量回路处理几何问题既方便又简捷.在坐标系中,向量可以用坐标表示,向量的线性运算可转化为坐标运算——数的加、减、乘运算,使运算变得

更加简单. 将向量线性运算的这两种方法相结合, 使得解析几何中数形结合的研究方法产生更强的功能.

在笛卡儿直角坐标系中, 点  $A(x, y)$  和向量  $\overrightarrow{OA}$  一一对应. 于是, 向量就可以看作一对有序的数组  $(x, y)$ . 同样, 空间向量则可以表示为空间直角坐标系中的“点”——三维的有序数组  $(x, y, z)$ .

向量的坐标表示有许多好处: 首先是运算简捷. 例如, 两个向量  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  和  $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$  相加得到的向量是  $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ , 即只要把两个坐标分别相加就可以了. 类似地,  $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ . 至于数量积, 则可以写成  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1 a_2 + b_1 b_2$ . 这样简单的表示, 使得向量如虎添翼. 二元一次线性方程组  $ax + by = m$  (可以看作是向量  $(a, b)$  与  $(x, y)$  的数量积),  $cx + dy = n$  (可以看作是向量  $(c, d)$  与  $(x, y)$  的数量积), 相当于方程组的系数矩阵将向量变换为  $\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ , 即  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}$ . 向量就和线性方程组联系起来, 其意义非同小可.

几何中的一大类问题是度量问题, 如长度、夹角、垂直等. 这些度量问题几乎都可以通过向量的内积来解决. 这使得一些解析几何, 立体几何中的定理、公式的推导过程大为简化, 大大降低了学习难度. 例如, 点到直线的距离、点到平面的距离、异面直线间的距离; 平面中两条直线垂直的判定、空间中直线与平面垂直的判定; 两条直线(包括异面直线)的夹角、二面角的度数等.

向量几何使用“向量的数量积”，提供了处理复杂几何问题的工具。在解析几何里，两条直线的夹角，当然也可以从两条直线方程的系数求得。但在向量几何里，夹角的余弦就是这两条直线所在的方向的简单向量的数量积。本来很复杂的夹角问题，通过一次向量运算就解决了。又如，三角形的面积也可以用向量的数量积或向量积的模求得。由于面积是平面几何里的“帝王不变量”，许多几何问题迎刃而解。至于利用向量讨论直线与直线的垂直与平行，空间线面、面面之间的位置关系，比起综合方法需要“个别处理”的技巧，一个“一揽子”解决的手段，显得十分轻松。两条直线是否垂直，只需要看相应的两个向量的数量积是否为0，何等简便！向量计算，能够精中求简，以简驭繁。由于计算机技术的普及，在未来，向量方法的使用还会有更大的空间。

著名女数学家索菲亚·热尔梅(1776—1831)曾说过：“代数不过是写出来的几何，几何不过是画出来的代数”。向量理论及其应用恰好说明了这句话的深刻含意。

在本书的写作过程中，张焱教授、冷岗松教授、杨世国教授曾给予热情的指导与帮助，他们不仅提供了自己的最新研究成果，还提出了许多修改意见。特别是张焱教授，在百忙中挤时间审阅书稿，撰写初版序言。他们的大力帮助，使本书增色不少，在此深表感谢！

在此也要衷心感谢张景中院士、张奠宙教授在百忙中为本套书题字、作序；衷心感谢本书后面参考文献的作者，是他们的成果丰富了本书的内容；衷心感谢刘



培杰数学工作室,感谢刘培杰老师、张永芹老师、齐新宇老师等诸位老师,使得本书以新的面目展现在读者面前;衷心感谢我的同事邓汉元教授、我的朋友赵雄辉研究员、欧阳新龙先生、黄仁寿先生,以及我的研究生们:吴仁芳、谢圣英、羊明亮、彭熹、谢立红、陈丽芳、谢美丽、陈森君等对我写作工作的大力协助;还要感谢我的家人对我写作的大力支持!

限于作者的水平,本书不完善之处在所难免,恳请读者批评指正.

沈文选

2015年6月于岳麓山下长塘山