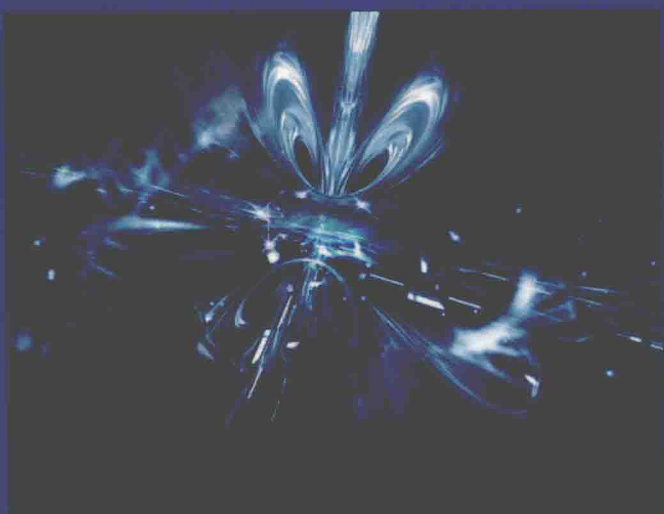
国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

随机动力学引论

INTRODUCTION TO STOCHASTIC DYNAMICS

朱位秋 〔美〕蔡国强 著



科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

随机动力学引论

INTRODUCTION TO STOCHASTIC DYNAMICS

朱位秋　〔美〕蔡国强　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

经过半个多世纪的发展，随机动力学已成为一个比较成熟的学科，在土木、机械、航空航天、海洋等工程，在物理、化学、生物、生态、气象等自然科学，在经济与金融等社会科学中都得到了应用，成为广大科技工作者必备的知识. 本书系统地论述了随机动力学的基本理论方法，重点是非线性系统随机响应的预测、随机稳定性与随机分岔，以及首次穿越损坏。本书论述较为浅显易懂，推导较为详尽，配有许多应用例子，并较为详尽地叙述了随机动力学的基础——随机变量与随机过程的理论与数值模拟方法，还提供了相当多数量的习题(其解答另成书出版).

本书可供力学与上述随机动力学应用领域的科技人员与高校师生阅读。对研究过确定性动力学而想引入随机因素的读者，本书可作入门读物。对随机动力学领域的研究人员，本书可提供一些专题知识. 也可作为力学及相关专业的研究生教材或参考书.

图书在版编目（CIP）数据

随机动力学引论/朱位秋, (美)蔡国强著. —北京：科学出版社, 2017.3
ISBN 978-7-03-052420-1

I.①随… II. ①朱… ②蔡… III. ①随机变量-动力学 IV. ①O313

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 055476 号

责任编辑: 刘信力 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 耕者设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第 一 版 开本: 787 × 1092 1/16
2017 年 3 月第一次印刷 印张: 23
字数: 449 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

随机动力学经历数十载的发展, 今已成为一个比较成熟的科学领域. 随机动力学有两个要素: 一个是研究对象为动力学系统, 其输入与输出随时间变化; 另一个是系统性质、初始状态, 和/或输入存在不确定性, 因而输出是不确定的, 它们可模型化为随机变量或随机过程. 随机动力学课题包括: 随机激励按其特性的建模, 获取随机激励系统响应的方法与步骤、随机稳定性、随机分岔及随机系统的损坏与可靠性. 简而言之, 随机动力学研究随机激励的动力学系统的定性与定量性态. 在许多不确定性起重要作用的同时又有足够数据可作概率与/或统计分析的领域, 随机动力学知识越来越必不可少了. 它在许多工程分支, 如土木、机械、化学、航空航天, 在物理、化学、生物、生态、气象, 在社会科学、经济与金融等方面都得到了应用.

本书乃为较大范围的读者而写, 有三个主要目的. 第一，对那些在确定性动力学系统做过研究又想将随机因素引入其研究中的研究人员, 他们没有或少有随机动力学知识, 本书可作为入门书. 第二，本书也可为已在随机动力学领域的研究人员提供一些高等知识, 诸如非线性系统随机响应预测、随机稳定性、随机分岔、首次穿越损坏等专题. 第三，是为相关领域的研究生提供教材或参考书.

为达成上述目的, 本书尽可能写成自洽的. 阅读本书的基础是大学本科的概率与统计课程. 概率论的较深知识与随机过程的知识对学习本书会有所帮助, 但非必要. 第 $2\sim 4$ 章给出随机变量与随机过程的基础. 对本领域新手与研究生, 透彻地学习这几章, 理解概念并做习题是重要的. 关于随机过程的更全面知识与应用已在许多著作中给出, 包括 Stratonovich (1963, 1967), Soong (1973), Karlin 与 Taylor (1975, 1981), Arnold (1974, 1998), Khasminskii (1980) 及 Gardiner (1986).

为使内容广泛的随机动力学更集中, 本书只考虑激励 (输入) 与响应 (输出) 为随机, 而假定动力学系统性质为确定性的. 在此, 不考虑系统性质与初始条件的随机性, 这是因为对大多数实际问题, 系统性质与初始条件的不确定性可忽略, 主要关心激励的不确定性. 典型的例子包括地震中的结构系统、受海浪作用的离岸结构与船舶、受大气紊流扰动的飞机、受地面不平作用的车辆等.

正如书名所指出的, 本书不是一本包含随机动力学所有方面的书, 它只提供研究随机动力学所必要的基础知识与某些特定专题的有限研究成果. 该领域优秀著作的不完全清单包括 Crandall (1958), Crandall 与 Mark (1963), Lin (1967), Bolotin (1969), Elishakoff (1983), Ibrahim (1985), Dimentberg (1988), 朱位秋 (1992), Soong

与 Grigoriu (1993), Lin 与 Cai (1995), Roberts 与 Spanos (1999), 朱位秋 (2003) 及 Sun (2006) 等.

本书有几个特点. 首先, 本书包含了若干近期研究成果: ① 无界与有界、高斯与非高斯、窄带与宽带随机过程的建模; ② 非线性随机系统的求解方法; ③随机激励的耗散哈密顿系统; ④随机生态系统. 其次, 它提供了随机过程基于其概率与统计特性的各种模拟方法. 由于只有受随机激励的线性系统与有限个数非线性系统可取得解析解, 蒙特卡罗模拟成为普遍甚至不可或缺的研究手段. 本书提供的模拟方法对进一步研究随机动力学是非常有用的. 本书不仅通俗易懂而且提供了大量例子说明所述理论方法, 使读者更易理解与掌握书中内容. 由于这一领域各问题的性质与困难, 大多数著作没有足够的习题, 这造成教授相关课程的老师的困难, 也使自学者难以确定是否已理解与掌握书中的理论方法. 本书试图通过提供大量的习题来改进这一情况. 本书详细地给出随机变量与随机过程的基本概念与理论, 因此, 只需一些概率论的初步知识, 不要求预先学习很深的数学课程, 这是没有纯数学背景的学生与研究者所希望的. 最后, 由于预设的读者主要是除数学专业外各领域的研究者与研究生, 而且重点放在应用上, 所以本书没有用严格的数学术语来撰写.

本书部分内容是第二作者在浙江大学做客座教授期间完成的, 他非常感谢浙江大学的资助.

最后, 我们特别感谢 S. H. Crandall 教授与 Y. K. Lin 教授, 他们带领我们进入随机振动与随机动力学领域, 并指导我们对该领域各种问题的研究.

朱位秋　中国科学院院士
浙江大学教授

蔡国强　美国佛罗里达
大西洋大学教授

目　录

第1章 绪　　论

在几乎所有领域, 如物理、化学、生物、气象、生态、经济、金融及许多工程分支, 包括机械、航空航天、海洋、土木、生物及地震工程中, 动力学系统的建模与分析都是一个关键性任务. 在建模过程中, 鉴于各种原因, 如系统参数的可能变化、激励的变化、建模方案的误差等, 不确定性是不可避免的. 为更精确地计及不确定性, 通常会进行观察与测量以尽可能得到更多的数据. 若对某一不确定性有足够大量数据, 就可用概率与统计描述该不确定性. 具体地说, 若不确定物理量不随时间变化, 就可用随机变量表示它, 若该物理量随时间变化, 则它可模型化为随机过程.

随机动力学的最早研究是爱因斯坦 (Einstein, 1956) 在 1905 年为布朗运动 (即漂浮在水面的微小粒子的杂乱运动) 发展了一个随机模型. 在机械与土木工程中广为使用的 "随机振动" 术语, 最早由瑞利 (Lord Rayleigh, 1919) 为一个声学问题提出. 对随机振动的研究始于 20 世纪 50 年代三个航空宇航问题: 大气紊流引起的飞机振动、喷气噪声引起的飞机声疲劳及火箭推进的空间飞行器有效载荷的可靠性. 这三个问题的共同因素是激励的随机性. 从那以后, 对随机激励下的系统作了进一步研究以解决航空、航天、机械及土木工程中的问题. 系统从线性引申到非线性, 激励从外激引申到参激. 随机振动前三十年的快速发展可参阅 (Crandall 与 Zhu, 1983) 综述论文. 随着计算技术的快速发展, 各领域中含多自由度与强非线性的更多实际问题可用数值模拟技术来解决.

注意, "随机振动" 这一专业名词已广泛应用于研究随机系统响应与可靠性之场合. 因此, 其主要目标是发展求解方法. 若除响应与可靠性外, 研究目标还包括随机系统的定性性态, 如稳定性与分岔, 则通常用随机动力学这一名词, 它包含比随机振动更多的专题.

一个随机动力学系统可用下列随机微分方程描述

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_j(t) = f_j[\boldsymbol{X}(t),t] + \sum_{l=1}^{m} g_{jl}[\boldsymbol{X}(t),t]\xi_l(t), \quad j=1,2,\cdots,n, \tag{1.0.1}$$

式中 $\boldsymbol{X}(t) = [X_1(t), X_2(t), \cdots, X_n(t)]^{\mathrm{T}}$ 是系统响应矢量, 也称为状态矢量, 上标 T 表示矩阵转置, $\xi_l(t)$ 为激励, 其中至少有一个激励是随机过程. 请注意, 方程 (1.0.1) 中的大写字母表示随机量. 函数 f_j 与 g_{jl} 表示系统性质, 可以是也可以不是明显依赖于时间. 若函数 g_{jl} 依赖于 $\boldsymbol{X}$, 则称相应的 $\xi_l(t)$ 为参激或乘性激励; 否则, 称为

外激或加性激励.

若所有 f_j 都是 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数, 所有 g_{jl} 为常数, 则系统是线性的. 若所有 f_j 与 g_{jl} 是 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数, 则称系统为参激线性系统, 这类系统本质是非线性的, 因为叠加原理不适用. 若 f_j 与 g_{jl} 之中至少有一个是 $\boldsymbol{X}$ 的非线性函数, 则称系统为非线性的. 对 $n=1$ 情形, 系统是一维的. 否则, 称为多维系统. 偏微分方程描述的连续系统可用如有限元法离散化为多维系统.

随机性可出现在系统性质里, 此时函数 f_j 与 g_{jl} 中某些参数为随机变量. 随机性也可出现在激励里, 即 (1.0.1) 中某些激励 $\xi_l(t)$ 为随机过程. 本书中, 只考虑后一情形. 而假定函数 f_j 与 g_{jl} 所表示的系统性质是确定性的.

按系统的物理性质, 许多机械与结构系统通常用牛顿第二定律或拉格朗日方程建模, 其支配方程常具有如下形式

$$\ddot{Z}_j+h_j(\boldsymbol{Z},\dot{\boldsymbol{Z}})+u_j(\boldsymbol{Z})=\sum_{l=1}^{m}g_{jl}(\boldsymbol{Z},\dot{\boldsymbol{Z}})\xi_l(t),\quad j=1,2,\cdots,n,\tag{1.0.2}$$

式中, $\boldsymbol{Z}=[Z_1,Z_2,\cdots,Z_n]^{\mathrm{T}}$, $\dot{\boldsymbol{Z}}=[\dot{Z}_1,\dot{Z}_2,\cdots,\dot{Z}_n]^{\mathrm{T}}$ 分别为位移矢量与速度矢量, $h_j(\boldsymbol{Z},\dot{\boldsymbol{Z}})$ 与 $u_j(\boldsymbol{Z})$ 分别表示阻尼力与恢复力. 令 $X_{2j-1}=Z_j$, $X_{2j}=\dot{Z}_j$, $\boldsymbol{X}=[X_1,X_2,\cdots,X_{2n}]^{\mathrm{T}}$, 系统 (1.0.2) 变换为

$$\dot{X}_{2j-1}=X_{2j},\quad \dot{X}_{2j}=-h_j(\boldsymbol{X})-u_j(\boldsymbol{X})+\sum_{l=1}^{m}g_{jl}(\boldsymbol{X})\xi_l(t).\tag{1.0.3}$$

比较 (1.0.3) 和 (1.0.1) 知, 系统 (1.0.2) 是系统 (1.0.1) 的特殊情形. 通常, (1.0.2) 称为 n 自由度系统, 等价于 $2n$ 维系统 (1.0.1). 本书中用两个术语: “自由度” 用于二阶系统, “维数” 用于一阶系统. 例如, 单自由度系统是二维系统, n 自由度系统是 $2n$ 维系统.

随机动力学系统还可表示为随机激励的耗散的哈密顿系统, 其支配方程为

$$\dot{Q}_j=\frac{\partial H}{\partial P_j},\quad \dot{P}_j=-\frac{\partial H}{\partial Q_j}-\sum_{k=1}^{n}c_{jk}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\frac{\partial H}{\partial P_k}+\sum_{l=1}^{m}g_{jl}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})\xi_l(t),\tag{1.0.4}$$

式中, Q_j 与 P_j 分别称为广义位移与广义动量, $\boldsymbol{Q}=[Q_1,Q_2,\cdots,Q_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{P}=[P_1,P_2,\cdots,P_n]^{\mathrm{T}}$, $H=H(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{P})$ 为哈密顿函数. 方程组 (1.0.2) 可用 Legendre 变换转化为 (1.0.4) 形式. 可见, 随机激励的耗散的哈密顿系统 (1.0.4) 也是 (1.0.1) 的特殊情形.

从数学上看, 运动方程 (1.0.1) 比 (1.0.2) 与 (1.0.4) 更一般, 因为后者可变换成前者. 然而, 对许多工程系统, 方程 (1.0.2) 通常直接从拉格朗日方程导出, 然后, 变换成 (1.0.4). 它们描述了不同自由度之间的关系. 本书中引入的方法与步骤虽然适用于一般系统 (1.0.1), 但特别适用于系统 (1.0.2) 与 (1.0.4).

系统 (1.0.1) 中的矢量 $\boldsymbol{X}(t)=[X_1(t),X_2(t),\cdots,X_n(t)]^{\mathrm{T}}$, 系统 (1.0.2) 中的矢量 $\boldsymbol{Z}=[Z_1,Z_2,\cdots,Z_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{Z}}=[\dot{Z}_1,\dot{Z}_2,\cdots,\dot{Z}_n]^{\mathrm{T}}$, 以及系统 (1.0.4) 中的矢量 $\boldsymbol{Q}=[Q_1,Q_2,\cdots,Q_n]^{\mathrm{T}}$ 和 $\boldsymbol{P}=[P_1,P_2,\cdots,P_n]^{\mathrm{T}}$ 称为系统响应. 此外, 它们的函数, 如系统的哈密顿函数、单个响应的幅值、系统总能量等也属于系统响应. 虽然本书中考虑的系统是确定性的, 但由于激励是随机的, 所以系统响应是随机过程, 如图 1.0.1 所示.

图 1.0.1 随机动力学系统的激励与响应

建立系统模型之后, 另一个重要的要素是随机激励, 必须基于所涉及物理问题中激励的特性恰当地建立它们的模型. 要用一个已知统计概率性质的随机过程来代表一个实际的物理激励, 需要从实验或实测中获取大量的数据. 在统计特性中, 最重要的是均值、均方值或方差, 以及相关函数或谱密度. 在有些实际问题中, 概率分布也很重要 (Wu 与 Cai, 2004). 如果概率分布可以从现有的数据中获取, 均值和均方值则可以计算得到. 一般地说, 在随机过程建模中, 概率密度和谱密度是最重要的.

随机过程的分类取决于所用准则. 按其概率分布, 随机过程可称为高斯过程、瑞利过程、泊松过程等. 高斯过程是用得最普遍的, 这是由于以下三个原因: ①高斯概率密度的钟形形状符合许多实际概率密度; ②只需要两个参数 (均值和均方值) 就可以完全定义高斯概率密度; ③高斯随机过程的数学处理相当简单. 高斯概率密度的一个缺点是对应的随机过程是无界的. 为了克服这个缺点, 本书介绍了不同类型的有界随机过程的模型. 若随机过程的分类准则为其谱密度的带宽, 有窄带过程和宽带过程. 一个谐和过程具有无限窄的带宽, 是窄带过程的极限情况. 另一方面, 有广泛应用的白噪声具有无穷带宽, 它的谱密度是常数, 是宽带过程的极限情况. 虽然白噪声是实际宽带过程的理想化, 由于数学处理的简单以及系统响应在高频段迅速衰减, 它应用于许多问题中. 另一个随机过程的分类准则是按其随时间演化性质, 如果一个过程的概率密度和谱密度不随时间变化, 它是平稳过程. 相反则是非平稳过程 (其准确定义在第 3 章中给出). 许多实际激励持续相当长时间, 如海浪作用力、风力、道路不平对车辆的作用力等, 在一定场合下, 它们可以考虑为平稳过程. 然而持续时间短的过程, 如地震时地面加速度一般是非平稳过程. 还可有其他分类方案. 本书将论述不同随机过程的各种数学模型. 对不同的激励过程, 系统响应的性质与求解方法可能不同.

研究动力学系统的一个主要目的是获得系统响应的性质, 它可包含或构成系统重要或关键的量. 在确定性问题中, 动力学系统的响应可分为瞬态响应与稳态响应. 瞬态响应是指紧接在加上激励之后的系统响应, 此时初始条件起重要作用. 稳态响应是指在加上激励足够长时间之后系统的响应, 此时初始条件无影响. 在随机系统中, 类似地也有瞬态响应. 但相应于确定性系统的稳态响应, 称为平稳响应. 对给定系统, 可能有也可能没有平稳响应, 取决于激励是平稳过程还是非平稳过程. 本书中, 大部分解法乃针对平稳激励的平稳响应.

由于激励与系统响应为随机过程, 它们的性质必须用概率与统计术语描述. 一个随机过程可看作是一个不同时刻上相关的一系列随机变量. 所以, 随机变量的描述, 作为随机过程的先导, 先在第 2 章中引入. 该章中定义并描述了单个随机变量的特性, 包括概率分布、特征函数、统计特性如矩与累积量. 对多个相关随机变量, 定义并描述了联合概率分布、条件概率密度及联合统计特性. 本章还推导了随机变量函数的概率密度函数与统计矩. 最后, 给出了单个随机变量基于其概率分布与两个相关随机变量基于它们的联合概率分布的模拟方法.

第 3 章给出了随机过程的基础知识. 为确定一个随机过程, 一个时刻上的一阶性质与两个不同时刻上的二阶性质是最重要与实用的. 典型的一阶性质包括概率密度函数与统计矩, 如均值与方差, 而最重要与最有用的二阶性质是相关函数或协方差函数和功率谱密度. 众所周知, 功率谱密度, 作为相关函数的傅里叶变换, 具有实际意义, 因为它描述了过程能量在整个频带上的分布. 与确定性过程不同, 随机过程的收敛、微分及积分, 可用不同模式来定义. 其中最有用与最实际的定义是所谓 L_2 收敛, 它将在全书中采用. 许多实际随机过程是平稳过程, 它们的一阶性质与时间无关, 二阶性质只取决于时差. 该章中描述了这类过程的特性. 该章还详细地描述了若干常用的随机过程, 如高斯过程、泊松过程及与之有关的过程和演化过程.

马尔可夫扩散过程的基本理论与有关问题在第 4 章中给出. 在随机动力学中, 马尔可夫扩散过程特别重要, 这是因为它们可用作许多实际随机过程的模型, 而且建立了严格的数学理论. 马尔可夫扩散过程的重要性质在本章中给出. 它们包括: ①其概率密度受著名的福克–普朗克–柯尔莫哥洛夫方程支配; ②最简单的扩散过程是维纳过程 (布朗运动), 高斯白噪声是其形式导数; ③系统对高斯白噪声的响应是马尔可夫扩散过程, 受斯特拉多诺维奇型随机微分方程支配, 它可转换成伊藤型随机微分方程, 数学上更易处理. 该章对作为一维伊藤随机方程之解的扩散过程作了详细研究. 如该章所述, 它的动力学性态可通过鉴别其两个边界上的性质进行分析. 维纳过程可用于产生若干实际随机过程, 包括用非线性系统滤波产生的过程与随机化谐和过程, 这些将在本章中叙述. 随机过程的模拟比随机变量模拟复杂得多. 与随机变量不同, 一阶概率分布知识不足以产生随机过程的样本. 为模拟随机过程,

还需要作为二阶性质的功率谱密度. 模拟高斯与非高斯随机过程的方法在该章中给出.

第 2~4 章论述了随机变量与随机过程的基本理论, 是研究随机动力学的基础. 在这方面有很好知识的读者可跳过这几章, 或简单地复习一下. 否则, 建议读者在进入其后章节前了解与透彻理解这几章描述的概念与数学处理.

在系统动力学中, 术语 "线性系统" 乃定义为具有线性性质并只受外激的系统. 对线性系统, 能否得到系统响应某种性质的精确解取决于所给激励过程的知识. 第 5 章给出了若干求线性系统响应的方法. 若激励为平稳过程, 且只关心平稳响应, 则可作时域分析或频域分析. 若激励为高斯过程, 则系统响应也是高斯过程. 另一方面, 若激励不是高斯的, 即使系统是线性的, 响应概率分布一般也得不到. 在高斯白噪声激励情形, 可用伊藤随机微分方程推导出相应的方程, 用于求出矩和相关函数的精确解.

若系统是非线性与/或出现参激, 只在特殊情形才有精确解. 第 6 章提供了求精确平稳解的若干方法: 平稳势法、详细平衡法及广义平稳势法. 其中最后一种方法更一般. 为得到精确平稳解, 在系统参数与激励强度之间要满足相当严厉的条件. 一类特殊系统是系统性质是线性的, 而参数激励出现在系统响应的线性项上. 这类系统本质上是非线性的, 因为叠加原理不适用, 因此, 第 5 章中的方法不能用. 这类系统如受高斯白噪声激励, 可用伊藤微分规则得到矩、相关函数及谱密度的精确解.

非线性随机系统一般得不到精确平稳解, 因为所要求的条件不满足, 特别是对实际系统, 所以需要发展近似方法. 第 7 章给出了求解非线性随机系统概率与/或统计量的若干近似方法. 等效线性化是最常用的近似方法, 已广为应用. 作为引申, 还引入部分线性化与参激系统线性化方法. 本书的重点是随机平均法. 对机械与结构系统, 推导了随机平均法的两种形式: 幅值包线与能量包线的平均方程. 事实上, 只要在随机动力学系统中出现一个或多个慢变响应过程, 随机平均法就有效. 作为该法在非工程问题中的应用的一个例子, 该章研究了非线性随机生态系统.

第 6 章和第 7 章, 重点集中在运动方程 (1.0.2) 描述的机械与结构系统. 对更一般的随机动力学系统, 由 (1.0.4) 支配的随机激励的耗散的哈密顿系统更适合. 哈密顿形式特别适合于处理多自由度强非线性随机动力学系统. 然而, 鉴于哈密顿形式的复杂性, 本书只包含基本原理与较为简单的解法.

第 8 章论述系统的定性性态，主要是随机稳定性与分岔, 这对随机动力学很重要. 众所周知, 当动力学系统受参激时或有负阻尼时就出现稳定性问题. 本书给出了不同意义上随机稳定性的定义, 并对线性系统和可简化为一维系统的非线性系统作了稳定性分析. 对分岔问题, 该章简短介绍了确定性分岔, 然后描述了两类随机分岔, D 分岔与 P 分岔, 并用例子作了说明.

随机激励的动力学系统的损坏可分成不同类型. 一种最重要的损坏模式是系统的关键物理量首次超过规定的安全边界, 称为首次穿越损坏. 第 9 章研究了随机激励系统与首次穿越损坏相关的可靠性. 所涉及的系统受高斯白噪声激励. 对这种系统, 支配可靠性函数的是后向柯尔莫哥洛夫方程, 支配首次穿越时间矩的是广义庞德辽金方程. 虽然一般来说需要用数值解法, 该章给出了若干解析解. 最后, 作为一个典型的首次穿越问题, 研究了材料中裂纹长度达到临界极限而导致的断裂. 这属于疲劳损坏. 先将确定性疲劳模型随机化, 然后用随机平均法求解该问题.

在第 2~9 章每章给出大量习题. 通过做习题, 读者会对本书中的概念与方法有更好的理解与更透彻的领悟. 这些习题虽不复杂, 但在将来处理更复杂问题时可作引子或提供有用的提示.