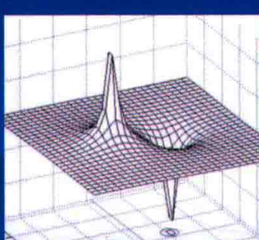
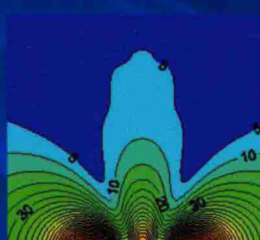
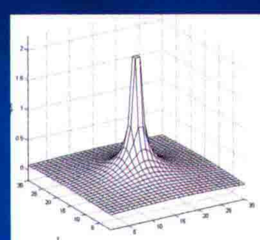
国家科学技术学术著作出版基金 NFAPST

瞬变电磁场点微元响应问题

薛国强　闫述　周楠楠　王贺元　著







科学出版社

瞬变电磁场点微元响应问题

薛国强　闫　述　周楠楠　王贺元　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

为提高瞬变电磁法对地探测的精度，作者近年来开展了时变电磁场点微元响应解析问题的研究。本书介绍了作者在该领域的部分研究成果，主要包括：经典勘探电磁学中的偶极子微元解析响应问题，偶极子假设条件下的误差分析，时变点电荷响应解析式推导，大尺度源瞬变电磁点电荷载流微元响应解析问题等。

本书不仅可作为勘探电磁场精细测量方面的应用研究的指导依据，还可供大中专院校固体地球物理、地球探测与信息技术、工程勘查技术等专业师生、科研单位研究人员以及生产单位工程技术人员参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

瞬变电磁场点微元响应问题／薛国强等著．—北京：科学出版社，2017.5
ISBN 978-7-03-052758-5

Ⅰ.①瞬…　Ⅱ.①薛…　Ⅲ.①暂态特性-电磁场-研究　Ⅳ.①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 102874 号

责任编辑：张井飞／责任校对：李　影
责任印制：肖　兴／封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

中国科学院印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2017 年 5 月第　一　版　开本：720×1000　1/16
2017 年 5 月第一次印刷　印张：9
字数：173 000

定价：98.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

瞬变电磁法(Transient Electromagnetic Method,TEM)是一种建立在电磁感应原理基础上的时间域人工源电磁探测方法。在金属、非金属矿勘探,工程勘探,地热及环境勘探等方面得到了极其广泛的应用,在煤田水文地质勘探和高速公路设计选线阶段煤矿采空区勘探领域,已经成为首选方法。

三维数值计算、高性能装备研发、数据处理和解释及视电阻率精细定义是瞬变电磁的研究热点,并取得了一些研究成果。但瞬变电磁法探测精度依然存在较大的提升空间,对地下纵向电性异常的分辨能力较差,探测深度有限,困扰这一方法发展的主要理论及技术问题有场点响应的精确解,场点视电阻率定义,瞬变电磁法的记录准则,瞬变电磁 TE、TM 场的综合利用,三维反演,弱信息增强等,其中,理论上的核心问题主要是瞬变电磁场响应精确解问题。

经典的瞬变电磁场响应计算大多从偶极子假设出发,将接地导线源看作电偶极子源,将矩形回线源看成电偶极源或者磁偶极源,利用偶极子源公式对瞬态场的响应特征进行正演计算分析,为瞬变电磁场研究提供理论基础,也切实体现了位于晚期(远区)情况下的瞬变电磁场的分布情况。但对于在近区进行观测的回线源装置,需要将回线源进行分割,以更小的电流元作为偶极子沿回线周围进行积分。虽然这种偶极子叠加方式进一步增加了正演计算结果的可靠性,减小了正演场与实际场的差别,但这种处理仍然不够彻底,以偶极子场为被积函数的面积分和线积分不能恢复偶极子场近似计算时忽略的高阶项误差,不能给出场的精确分布,尤其是不能很好地反映位于近区的矩形回线源测点。

对于瞬变电磁研究中存在的场解精确性问题,作者力图从静电场、恒定电流场、谐变场和瞬变场出发,对偶极源近似进行分析,定量化计算偶极源近似引起的相对误差。

为进一步减小偶极子近似引起的相对误差,提高瞬变电磁场点响应的计算精度,作者提出基于点电荷载流微元的计算方法。理论上,点电荷是电磁场的真正微元,电偶极子源辐射仅是点电荷辐射的一个特例。基于这种点电荷微元电磁场理论实质,可以考虑求取点电荷微元电磁场的直接时域解,即以时变点电荷微元代替偶极子微元,使源真正地微元化,并且不再经过频时变换,直接在时域推导时域瞬变场。

为了加深自身对瞬变电磁法的理解,提高科研业务能力,作者在以往研究的基础上,在众多合作者的支持和研究生的帮助下,编写了本书。第 1 章由薛国强完

成，第 2 章由王贺元、薛国强完成，第 3 章由闫述、薛国强完成，第 4 章、第 5 章由周楠楠和闫述完成，第 6 章、第 7 章由周楠楠和王贺元完成，第 8 章由周楠楠完成。全书由薛国强统稿。博士后陈卫营、李海，博士研究生钟华森、侯东洋、陈康、马振军、武欣、张林波等参加了部分编写工作，往届研究生李梅芳、郭伟立、苏艳平、李午阳、崔江伟等参加了部分研究工作和资料处理工作，在此一并表示感谢。

本书得到国家自然科学基金面上项目“基于时变点电荷载流微元的瞬变电磁场理论研究”(41174090)和 2016 年国家科学技术学术著作出版基金资助。

由于作者水平有限，不妥之处在所难免，敬请专家和读者批评指正。

薛国强

2017 年 1 月 25 日于北京

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　瞬变电磁场解析问题研究进展

瞬变电磁法(Transient Electromagnetic Method,TEM)是一种建立在电磁感应原理基础上的时间域人工源电磁探测方法。该方法对低阻异常体有更高的灵敏度，可以发射丰富频谱分量的脉冲波形,一次激发便可覆盖探测所需的频段,大大提高了工作效率。特别是TEM的回线源装置,如定源回线、中心回线、重叠回线、分离线圈等,不仅可在岩石裸露的山区、城市街区、煤矿工业广场、村庄等处施工,还可以用来校正可控源音频大地电磁测深、大地电磁测深等频域法和直流电法观测数据的静态偏移。由此TEM在金属、非金属矿勘探,工程勘探,地热及环境勘探等方面得到了极其广泛的应用,在煤田水文地质勘探和高速公路选线阶段煤矿采空区勘探领域中,已经成为首选方法(Geozalez,1979;Spies,1989;Strack et al.,1990;Yan et al.,1997;Hordt and Muller,2000;Zhdanov,2010;Ziolkowski,2010;Xue and Li,2012;Xue et al.,2012b;Xue et al.,2013)。

虽然瞬变电磁近年来得到快速发展,但瞬变电磁法探测精度依然需要得到较大改善,对地下横向异常的分辨能力较差,探测深度有限,依目前技术,还不能完全发挥瞬变电磁法的优势,困扰这一方法发展的主要理论及技术问题有场点响应的精确解、场点视电阻率定义、瞬变电磁法的记录准则、瞬变电磁多分量场的综合利用、三维反演、弱信息增强等,但理论上的核心问题主要是瞬变电磁场精确解问题。

在经典瞬变电磁理论中,通常利用稳恒电流场中的磁偶极子或者静电场中的电偶极子公式,通过比拟得到谐变场的频率域表达式,然后由反傅里叶变换或逆拉普拉斯变换得到电性源或者磁性源响应的时域解,这方面的研究成果集中体现在考夫曼等的经典著作中(Kaufman and Keller,1983;Nabighian,1991)。利用偶极子公式得到电性源或者回线源响应的时域解,为瞬态场的响应特征分析、全期视电阻率研究、波场变换、数值计算等提供了理论基础(Morrison et al.,1969;Wang and Hohmann,1993;Lee et al.,2002;闫述等,2002;王华军和罗延钟,2003;薛国强等,2006a;Xue et al.,2007a;杨云见等,2008)。

瞬变电磁场不仅有早期、晚期之分,还有近区场和远区场之分,虽然近区场的电磁场强度比远区场大得多,但是近区场的不均匀性程度严重,电磁场强度随距离的变化也比较快,给研究和利用近场探测带来一定的困难。然而,不论怎样,由于

近源探测时体积效应影响小,分辨能力强,探测深度大,研究近场响应问题十分重要。

1.1.1 偶极子微元理论

在经典的瞬变电磁理论中,大多从偶极子假设出发,将矩形回线源看成电偶极源或者磁偶极源,利用偶极子源公式对瞬态场的响应特征进行正演计算分析,为提高计算精度,将矩形回线源进行分割,以更小的电流元作为偶极子沿回线进行积分。对于大尺度源瞬变电磁场的研究,Poddar(1982,1983),Raiche(1987),Goldman 和 Fitterman(1987)给出了三种处理方式:①把矩形回线的面积看成无数个小的垂直磁偶极源的组合,对每个小磁偶极矩产生的场在整个回线面积上进行积分。②取一段回线的边作为电偶极源,对电偶极子的场沿回线积分,通过线积分求得时域电磁场的阶跃响应。只有当线源到测点的收发距足够大时,才能将线源直接看成电偶极子,而在实际测量中,这种条件是很难满足的,因此并不能将回线的各边直接看成电偶极子,解决此问题的方法是将回线各边进一步划分,即将回线的每一边看成由多个水平电偶极子组成,进行线积分后得到场解。③利用磁偶极源与回线源之间的互易原理,对磁偶极源的电场沿回线源进行积分运算,首先得到的是感生电动势,通过进一步的转换得到垂直磁场的表达式。国内学者多以 Poddar,Raiche,Ward 和 Hohmann 的回线源公式为基础进行研究。蒋邦远(1998),戚志鹏和李貅(2009),李建平等(2007),周楠楠等(2011)在此基础上将中心回线与大回线源的视电阻率公式或者说资料解释方法在某种程度上统一了起来。

虽然偶极子叠加方式进一步减小了正演计算结果与实际观测场值之间的差别,但这种处理仍然不够彻底,以偶极子场为被积函数的面积分和线积分不能恢复偶极子场近似计算时展开忽略的高阶项,不能给出近源情况下场的精确分布(薛国强等,2011;闫述等,2011;Zhou et al. ,2013)。

1.1.2 频时变换

根据电流源的发射信号特性的不同,将可控源电磁法分为频域电磁法和时域电磁法。在频域电磁法中,我们观测由时谐电流源引起的电磁响应。对于时域电磁法,由于在时域中求解麦克斯韦(Maxwell)方程比在频域中求解增加了一个时间变量,大大增加了求解难度,通常情况下,为了简化计算难度,采用积分变换的方法,先在变换域求得频域解,然后通过反傅里叶变换或逆拉普拉斯变换得到时域解。时域电磁场的数据可以通过对足够数量频点的频域电磁场数据进行反傅里叶变换得到。除特殊情形外(如均匀半空间表面收发的偶极源),时域电磁场一般无法通过傅里叶变换直接得到解析表达式。因此,研究有效的变换方法成为重中之重。

下面分析几种常见的变换方法。Gaver-Stehfest(G-S)变换是逆拉普拉斯变换的一种,但拉普拉斯域的数据需以双精度存在,并且在时域中并不存在闭合形式的表达式(Gaver,1966;Stehfest,1970);离散傅里叶变换通常和三次样条插值方法一起使用,要求给出有限数量的最佳的间隔频点(Mulder et al.,2008);线性快速傅里叶变换(FFT)通常需要 10^5 个频点数据,对于多位置的时域计算,该方法过于昂贵;对数 FFT 相对而言要快速得多,但精度稍差(Talman,1978;Haines and Jones,1988;Slob et al.,2010);延迟谱法(Newman et al.,1986)将时域信号看作几个系数未知的指数形式的阻尼函数组合。指数阻尼因子同样是未知的,必须通过仔细的选择得到。当频域的系数解决以后,时域信号可以看作一系列的基函数。该方法是主观的,需要加入大量的人机互动。

上述提到的频时变换的方法往往只对有限的接收点有效,目前,还没有一种方法可以实现在大量接收点进行精确的频时变换。另外,从频率域到时间域的转换并不是在一个较宽的频率范围内频率域信号的简单叠加。虽然在某种条件下频域数据可以转换成时域数据,但就一次场对观测结果的影响而言,两者截然不同(Kaufamn and Keller,1983;牛之琏,2007)。以往经由频域到时域的转换,可能会掩盖时域场最本质的属性——因果律。

频域中研究的是稳态的单色波,属于稳态场的范畴,时域中研究的是瞬态场,瞬变电磁场的关键因子是时间,时域场和频域场存在着激发源、场分布等本质的不同。从本质上讲,实践中遇到的电磁问题都是复杂的时变过程,频域谐变场只是一种特定的理想情况。随着时间的变化,瞬变场满足因果律,具有时间遍历性,因此,频域场的理论和方法对于瞬态场的研究并不总是有效的,寻找有效的直接时域方法成为必然趋势。

1.2　主要研究内容

针对前面分析的基于偶极子微元的瞬变电磁场解析问题,本书首先分析偶极子近似引起的相对误差,并进一步提出基于时变点电荷载流微元的瞬变电磁研究思路。从真正的基本微元出发,以时变点电荷代替以往的偶极子近似,并且不再经过傅里叶或拉普拉斯变换,直接求解时域瞬变场,提高了瞬变场的计算精度,为进一步提升瞬变电磁的勘探精度打下坚实的理论基础。

本书分为 8 章。

第 1 章主要介绍瞬变电磁场解析问题的研究进展,对制约瞬变电磁场精确解问题进行分析。

第 2 章给出求解点电荷载流微元直接时域电磁场的数理基础,包括微元法及其在瞬变电磁场中的应用、有源麦克斯韦方程对应的阻尼波动方程、非线性微分方

程解法、格林(Green)函数法、数学工具介绍等内容。

第3章主要分析静电场、恒定电流场、天线谐变场及瞬变电磁中偶极子微元场的计算公式,对电偶极源瞬变电磁场进行详细分析,这些分析对瞬变电磁的研究具有重要的指导意义。

第4章以勘探电磁学中的偶极子的瞬变电磁场的求解过程为例,分析瞬变电磁场的频时变换求解思路,并指出频时变换可能引起的计算误差。

第5章利用第2章和第3章给出的各种偶极子场的表达式,计算不同偶极子微元近似计算引起的相对误差。分别从静电场、恒定电流场、天线理论辐射场及勘探电磁学谐变场和瞬变场角度,对偶极子近似引起的相对误差进行分析。初步给出当源尺寸不可忽略时的校正系数,校正系数的使用不仅针对发射源,也针对接收装置。针对瞬变电磁场需要进行频时变换的问题,以应用最广的非线性数字滤波为例,分析频时变换带来的误差。最后,分析大尺度源偶极子近似带来的计算误差。

第6章分析点电荷载流微元的物理机制,给出传统谐变场和瞬变场的偶极子源的点电荷解释。

第7章给出全空间二阶线性有源非齐次方程求解的格林函数法求解过程,利用约当引理(Jordan's lemma)和留数定理给出电磁场中常见的达朗贝尔(d'Alembert)方程和扩散方程的格林函数解。对于有耗阻尼波动方程,利用降维法给出方程的格林函数解。在格林函数解的基础上,通过将格林函数直接代入电磁场表达式和引入辅助位函数两种方式推导出点电荷载流微元电、磁场的直接时域解。

第8章对第5章推导的直接时域计算公式进行正确性验证,将点电荷载流微元场的直接时域解与经典电磁学中的近似公式进行对比,验证公式的有效性。进一步推导出实际应用中的回线源的瞬变电磁场的表达式。以圆回线为例,借助互易定理,分别推导出圆回线一次磁场和二次磁场垂直分量的时间导数表达式,与经典电磁学中已有的结论进行对比分析。

第2章　数理基础

在进行点电荷载流微元的理论论述之前，首先给出瞬变电磁场相关数理基础，包括时域麦克斯韦方程组及由其推导出来的非线性方程、求解非线性方程格林函数方法、电磁场论散度、旋度和梯度等在具体求解过程中需要用到的数学知识等。本章所述数理基础在求解瞬变电磁场的直接时域解方面是极其重要的。

2.1　微元法及其在瞬变电磁场中的应用

2.1.1　微元法的基本思想

所谓“微元法”就是将研究对象分割成许多微小的单元，或把物理过程分解成无限多个无限小的部分，从中选取任一“微元”加以分析，通俗地说就是把研究对象分为无限多个无限小的部分，取出有代表性的极小的一部分进行分析处理，再从局部到整体综合起来加以考虑的科学思维方法。利用微元法可以使一些复杂的物理过程用我们熟悉的物理规律加以解决，使所求的问题简单化，可将一些几何、物理等实际问题转化为积分来求解，微元法在数学物理、工程实践等领域有着广泛的用途。

微元法在处理问题时，从对事物的极小部分(微元)分析入手，通过对微元进行叠加等方式解决整体事物。它是一种深刻的思维方法，是先分割逼近，找到规律，再累计求和，达到了解整体的目的。对某事件作整体的观察后，取出该事件的某一微小单元进行分析，通过对微元的细节的物理分析和描述，最终解决整体。例如，分析匀速圆周运动的向心加速度，根据加速度的定义，对圆周运动的速度变化进行微元分析，可以推导出向心加速度的表达式。

微元法是分析、解决物理问题的常用方法，也是从部分到整体的思维方法。该方法可以使一些复杂的物理过程用我们熟悉的物理规律迅速解决，使所求的问题简单化。在使用微元法处理问题时，需将其分解为众多微小的“元过程”，而且每个“元过程”所遵循的规律是相同的，这样，我们只需分析这些“元过程”，然后再将“元过程”进行必要的数学方法或物理思想处理，进而使问题得以求解。“微元法”选取微元时所遵从的基本原则如下：①可加性原则，由于所取的“微元”最终必须参加叠加演算，所以对“微元”及相应的量的最基本要求是，应该具备“可加性”特征；②有序性原则，为了保证所取的“微元”在叠加域内能够较为方便地获得“不遗

漏”“不重复”的完整叠加,在选取“微元”时,就应该注意,按照关于量的某种“序”来选取相应的“微元”;③平权性原则,叠加演算实际上是一种复杂的“加权叠加”。对于一般的“权函数”,这种叠加演算(实际上就是要求定积分)极为复杂,但如果“权函数”具备了“平权性”特征(在定义域内的值处处相等),就会蜕化为极为简单的形式。

2.1.2 偶极子假设

所谓偶极子是指相距很近、符号相反的一对电荷或“磁荷”,如由正、负电荷组成的电偶极子。地球磁场可以近似地看作磁偶极子场。在物探中,研究偶极子场是很重要的,因为理论计算表明,均匀一次场中球形矿体的激发极化二次场与一个电流偶极子的电流场等效,某些磁场也可以用磁偶极子场来研究。用等效的偶极子场来代替相应电、磁场的研究,可以简单清楚地得到场的空间分布形态和基本的数量概念,也便于做模型实验。

电偶极子是指两个相距很近的等量异号点电荷组成的系统。电偶极子的特征用电偶极矩 $P=lq$ 描述,其中 l 是两点电荷之间的距离,l 和 P 的方向规定由 $-q$ 指向 $+q$。电偶极子在外电场中受力矩作用而旋转,使其电偶极矩转向外电场方向。电偶极矩就是电偶极子在单位外电场下可能受到的最大力矩,故简称电矩。如果外电场不均匀,除受力矩外,电偶极子还要受到平移作用。电偶极子产生的电场是构成它的正、负点电荷产生的电场之和。有一类电介质分子的正、负电荷中心不重合,形成电偶极子,称为有极分子;另一类电介质分子的正、负电荷中心重合,称为无极分子,但在外电场作用下会产生相对位移,也形成电偶极子。在电介质理论和原子物理学中,电偶极子是很重要的模型,应用有偶极子天线。

磁偶极子是指一个载流的小闭合圆环即一个小电流环,当场点到载流小线圈的距离远大于它的尺寸时,这个载流小线圈就是一个磁偶极子。磁荷观点认为,磁场是由磁荷产生的,磁针的 N 极带正磁荷,S 极带负磁荷,磁荷的多少用磁极强度 qm 来表示。相距 l、磁极强度为 $\pm qm$ 的一对点磁荷,当 l 远小于场点到它们的距离时,$\pm qm$ 构成的系统叫磁偶极子。在远离偶极子处,磁偶极子和电偶极子的场分布是相同的,但在偶极子附近,二者场分布不同。

电偶极子假设在天线理论中得到了广泛的应用,麦克斯韦在研究电磁场理论时,将整根导线假设为一个电偶极子,从而求解源点在某远场点处所产生的电磁场强度。同理,在求解中场区或近场区的电磁场强度时,我们应用微元法思想,将整根导线分成若干小段,将每一小段看作一个电偶极子,再次应用电偶极子假设,从而应用时变点电荷理论,直接在空间域和时间域上求解相应场点处的电磁场强度。

2.1.3 微元法在瞬变电磁场问题中的应用

在一般电磁理论中,对于介质中的电场或磁场,主要采用电偶极子和磁偶极子

的概念,即将极化或磁化后的介质分子看作偶极子,导出结构方程,进一步得到物质中的场方程。应该说,这样做是合理的,因为极化、磁化的偶极子是分子水平上的,对于宏观电磁场,这样得到的场方程是精确的。分子水平上的偶极子近似不会对宏观电磁响应产生影响,但对同属于宏观电磁场的偶极子场源和场点之间需满足远场区条件,近似才能成立。

地球物理电磁分析将载流导线看作偶极子近似,来源于天线理论。例如,将一段载流导线看作天线,导线两端异性电荷的符号作正负交替变化,将电磁波辐射出去。实际上,空间某一点上的点电荷依靠本身的正、负极性变化,同样可以将电磁波辐射出去。天线的偶极子理论是对于接收端处于远区场的远程通信来讲的,这也是早期通信的主要发展方向。当前,随着短距离无线通信,如蓝牙、射频识别等技术的发展,在很多情况下天线已不再作为偶极子看待。

在线性、各向同性、分层均匀介质的假设下,对载流大定源回线和长接地导线取微元后,利用线性介质中场的叠加性进行积分,不仅是电磁学理论中对连续分布的激励源,也是物理学中对连续分布场源(如重力场中的连续质量分布)的通常处理方法。连续分布的场源,无论是体分布、面分布,还是线分布,其体积元、面积元、线段元的极限都是点源。那么,位于空间一点的点电荷随时间作正负变化时能否辐射电磁波?答案是肯定的。实际上,根据麦克斯韦方程中位移电流项可知,不仅电荷随时间作正负变化可以发射电磁波,只要电荷的电量随时间变化,同样可以将电磁波辐射出去。

因此,我们基于微元法思想,用点电荷微元代替偶极子微元,使源真正微元化。运用时域格林函数方法求解电磁场达朗贝尔方程和扩散(热传导)方程,通过严格的数学推导可以给出达朗贝尔方程和扩散方程的精确解析式,利用有源电磁场的阻尼波动方程,通过介质中场的叠加性进行积分,导出电场与磁场的时间域精确表达式,进而求出载流大定源回线产生的瞬变电磁场时间域解析式。

2.2 有源麦克斯韦方程对应的阻尼波动方程

均匀、线性、各向同性介质中的有源麦克斯韦方程组为

$$\begin{cases} \nabla \times H = J_0 + \sigma E + \varepsilon \dfrac{\partial E}{\partial t} \\ \nabla \times E = -\mu \dfrac{\partial H}{\partial t} \\ \nabla \cdot H = 0 \\ \nabla \cdot E = \dfrac{\rho_0}{\varepsilon} \end{cases} \tag{2-1}$$

其中,E 表示电场强度(V/m),H 表示磁场强度(A/m),J_0 表示电流强度(A/m^2),

ρ_0 表示电荷密度(C/m^2)；ε_0 表示介电常数，μ 表示磁导率。

由麦克斯韦方程组(2-1)推导对应的阻尼波动方程，其过程如下：

对式(2-1)第一式两边取旋度得到

$$\nabla\times\nabla\times H=\nabla\times J_0+\sigma\nabla\times E+\varepsilon\nabla\times\frac{\partial E}{\partial t}$$

即

$$\nabla\times\nabla\times H=\nabla\times J_0+\sigma\nabla\times E+\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times E \tag{2-2}$$

将式(2-1)第二式代入上式得

$$\nabla\times\nabla\times H=\nabla\times J_0-\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}-\varepsilon\mu\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

利用恒等式

$$\nabla\times\nabla\times H=\nabla(\nabla\cdot H)-\nabla^2 H$$

及式(2-1)第三式得

$$-\nabla^2 H=\nabla\times J_0-\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla^2 H-\mu\sigma\frac{\partial H}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=-\nabla\times J_0 \tag{2-3}$$

对式(2-1)第二式两边取旋度得到

$$\nabla\times\nabla\times E=-\mu\nabla\times\frac{\partial H}{\partial t}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times H)$$

将式(2-1)第一式代入上式得

$$\nabla\times\nabla\times E=-\mu\frac{\partial}{\partial t}\left[J_0+\sigma E+\varepsilon\frac{\partial E}{\partial t}\right]=-\mu\frac{\partial J_0}{\partial t}-\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

利用恒等式

$$\nabla\times\nabla\times E=\nabla(\nabla\cdot E)-\nabla^2 E$$

及式(2-1)第四式得

$$\nabla\left(\frac{\rho_y}{\varepsilon}\right)-\nabla^2 E=-\mu\frac{\partial J_0}{\partial t}-\mu\sigma\frac{\partial E}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

即

$$\nabla^2 E-\sigma\mu\frac{\partial E}{\partial t}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=\mu\frac{\partial J_0}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\rho_0}{\varepsilon}\right) \tag{2-4}$$

这是由有源麦克斯韦方程导出的两个矢量阻尼波动方程，在天线理论和瞬变电磁测深的理论与工程实践中有重要应用。当场变化很快或介质电阻率趋于无穷时，一阶微商项可以忽略，方程变为纯波动型方程，这时电磁场按波动规律传播；相反，

当场变化比较慢且在良导介质中传播时,二阶微商项可忽略,方程变为热传导型方程,这时电磁场按扩散(热传导)规律传播;当介于这两种情形之间时,电磁场传播规律相对比较复杂。通过(2-3)和(2-4)这两个方程,利用时域格林函数法可直接求出电场和磁场的场量值,进而在给定场源情况下通过积分求出任意场点处电磁场的总量值。

2.3 非线性微分方程解法

求解非线性微分方程分为解析法和数值法。解析法是利用解析式表示函数,并应用数学推导、演绎去求解数学模型的方法。数值法是把连续的非线性微分方程及初边值条件离散为线性方程组并加以求解,包括有限元法、差分法和谱方法等。

有限元法是一种工程物理问题的数值分析方法,根据近似分割和能量极值原理,把求解区域离散为有限个单元的组合,研究每个单元的特性,组装各单元,通过变分原理,把问题化成代数方程组求解。

差分法也是求微分方程和积分微分方程数值解的方法之一。其基本思想是把连续的定解区域用有限个离散点构成的网格来代替,这些离散点称作网格的节点;把连续定解区域上的连续变量的函数用在网格上定义的离散变量函数来近似;把原方程和定解条件中的微商用差商来近似,积分用叠加和来近似,于是原微分方程和定解条件就近似地代之以代数方程组,即有限差分方程组,解此方程组就可以得到原问题在离散点上的近似解。然后再利用插值方法便可以从离散解得到定解问题在整个区域上的近似解。

谱方法起源于 Ritz-Galerkin 方法,它是以正交多项式(三角多项式、切比雪夫多项式、勒让德多项式等)作为基函数的 Galerkin 方法、Tau 方法或配置法,它们分别称为谱方法、Tau 方法或拟谱方法(配点法),通称为谱方法。谱方法是以正交函数或固有函数为近似函数的计算方法。从函数近似角度看,谱方法可分为傅里叶方法,切比雪夫或勒让德方法。前者适用于周期性问题,后两者适用于非周期性问题,而这些方法的基础就是建立空间基函数。

求解非线性方程的解析方法主要分为两类,即频谱分解法和脉冲分解法。

(1)频谱分解法:把源、边界扰动或初始扰动等主动因素按某种完备的基本信号(频谱)分解,然后考察这些基本信号系引起的运动,最后把这些运动综合起来便是线性系统的运动。频谱分析方法处理的关键是基本信号系的选择,随处理系统的不同而不同,一般以选择系统的本征信号系最为方便,也可以选择完备的基本信号系,但这种分解往往导致问题的复杂化。频谱分解的核心问题是正交展开,特别是本征函数系的正交展开。频谱分解法可以分为空间频谱分解和时间频谱分