科學圖書大庫

# 幾何移轉

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

學圖書大庫

# 幾何移轉

譯者　王昌銳

徐氏基金會出版

徐氏基金會科學圖書編譯委員會

監修人 徐銘信 發行人 王洪鎧

# 科學圖書大庫



中華民國六十八年三月十五日再版

# 幾何移轉

基本定價 1.30

譯 者 王昌銳 台灣省立高雄工業專科學校教授



(67)局版臺業字第1810號

出版者 財團法人 臺北市徐氏基金會 臺北市郵政信箱53-2號 電話7813686 7815250號

發行者 財團法人 臺北市徐氏基金會 郵政劃撥賬戶第15795號

承印者 大興圖書印製有限公司 三重市三和路四段一五一號 電話9719739

# 致讀者

本書爲數學專家，所撰一系列書刊之一，其目的在確立多數中學生及社會人士，某些易懂而有趣之重要數學觀念．新數學文庫之多數書本，包含中學課程所不容納之課題，而難易相殊，即使同一書中，有些部份，即較其他部份，需要較高程度之專注．由是，讀者需有相當之技能學識，以瞭解大部此等書籍，且應作明智之努力．

如讀者以往，僅於教室作業中遭遇數學，則應記住於心，數學書籍不能快速閱讀．亦不應期望，乍覽之餘，即能瞭解書中之全部．而應很自然的超越複雜部份，稍後再回來讀．因後繼之評述，常能澄清一種理論也．相反的，包含完全熟悉題材之章節，則可快速閱讀．

學數學之最佳途徑，爲“做”數學，各書均含習題．有些且需縝密思考．奉勸讀者，養成手持紙筆，從事閱讀之習慣，如此，數學對之，將變爲意義倍增．

對著者與編者而言，此爲新的嚐試．頗願對許多中學師生，協助此等書刊之籌印，表示由衷感謝，編者對本文庫諸書之反應意見，頗感興趣，希望讀者，書寄紐約大學，數學科學會轉，新數學文庫（NML）編輯委員會．

編　　者

# 中譯序

幾何移轉，係於平面中，將各種平面幾何圖形，經過某方向內，某一距離之移動，或環繞某一定點，經過某一角度之旋轉；或以某直綫作鏡面，從事反射；使圖上所有之點，綫，及邊界，整個移轉至另一位置，而原圖之形狀，大小，並不改變之一種幾何作業．此種變位而不變形之幾何移轉，對幾何作圖，應用至廣，對幾何群理論方面，尤為重要．

本書，以直接而簡單之方法，介紹幾何移轉新觀念．於解釋討論之餘，復提出許多實際問題，激發讀者動機及思考，以期用此新觀念，解此類問題，以求即學即用．故於第一、二章，說明幾何移轉理論，提出問題，供讀者自行研解．而於第Ⅱ部份，幾以全書一半之篇幅，提供問題之逐一詳細解答，以供參證，頗適我國中等以上學校師生，對幾何理論與作圖之"教"與""學"參考．

本書原作者為雅格洛姆博士( Isaac Moisevitch Yaglom )，俄人．英譯者為亞倫施爾兹博士，紐約人．均當世數學名家．本書之譯，係響應徐氏基金會廣譯新書盛舉．如能益我學子，則幸甚矣．譯稿勞吾妻蔣君英女士協助整校，深為感激，特誌．

中華民國五十八年十一月三日

湘潭留田王昌銳序於高雄工專

# 英譯本序

本卷爲雅格洛姆（I.M. Yaglom）所著“幾何移轉”之第I部份．其俄文原版，原分三個部份；第I及II部，共280頁，發行於1955年，第III部於1956年單獨發行，凡611頁．英譯本之第I及II部，將分卷各別發行；學校數學研究小組，不擬將第III部，列入新數學文庫出版計劃之中，然而，第III部，討論投影幾何，而非歐幾里德幾何，將爲極有價值之額外著作，或許將於他處印行．

於此譯本中，許多須參閱第III部者，均已刪去，而雅格洛姆之“前言”，及“本書用途”，則於“原著者序”標題之下，以非常簡略之方式出現．

此書非平面幾何教材．相反的，著者且曾假定，讀者已熟悉此課目，大部份內容，須學過平面幾何之優秀中學生，始能閱讀．然而，應該努力；此書，同於其他數學書籍，對讀者有所要求．

書中討論平面幾何之基本移轉，即，用距離一保持移轉（移動，旋轉，反射），由是，簡單而直接的向讀者介紹某些重要的群理論概念．

47 個比較困難的問題，增補爲相對短簡之基礎測驗．作者對此等問題之簡括說明，並不使讀者怯懦；例如，當按已予資料作圖時，即可基於某距離之相對長度，或基於某已知圖形之相對位置，求得已知問題之許多解答．將迫使自行發現已知問題，有一單解之條件．於本書之第二半，習題均已詳細解出，無解答之條件，亦予討論，其有一解，或數解者，亦包括之．

讀者應亦注意於本書所用標誌，可能有點不同於常用者．例如，兩直綫 $l$ 及 $m$，相交於一點 $O$，其間之角，常書爲$\measuredangle lOm$；或如 $A$及 $B$爲兩點，則“直綫 $AB$”，表示經過 $A$及 $B$ 之直綫，而“綫段 $AB$”，表示由 $A$至 $B$之固定綫段．

註腳以前，常用符號 †，取自本書俄文版，而本書却增加一符號 ᵀ．

感謝Yaglom教授，對本書美版之籌印，所予極具價值之協助．彼曾閱讀譯文草稿，並提供許多建議．彼曾展示並澄清原本中之某些要點，且增加部份問題，特別是習題 4,14,24,42,43 及 44 之含於本書者，爲原版所無

而俄文版中之習題22及23 ，又爲美版所乏．當雅氏原著第二部份譯本出現時．亦將發現美版習題號數，將不對應於俄文版者．因此，提醒讀者注意，所有本卷習題之與次卷習題相關者，一律沿用俄文版之習題號數．而當卷2之英文本問世時，將包含此等題號之任何更改表．

總之，願感謝學校數學研究小組諸先生之意見與協助．寇克司特教授(Professor H.S.M. Coxeter)曾對術語，給予特別匡助．特別感謝來克斯博士(Dr. Anneli Lax)，出版計劃之技術編者，不可估計之協助，及其忍耐與才能，對其助理員司東(Carolyn Stone)及斯處子也( Arlys Stritzel)，亦深感激．

亞倫　施爾玆

# 原著者序

本書，包含三部份，從事基本幾何研究．大量題材含於基本幾何之中，特別是十九世紀者．許多有關圓，三角形，多角形……等之美麗而不預期之定理，均曾證明，於基本幾何以內，完全離“科學”而誕生，如三角形之幾何，或四面體之幾何，各有其擴張的主要之點，其各自之問題，及其各自之問題解法．

目前使命，非使讀者，熟悉一連串新奇定理；以上所言，其本身似非證明，係以基本幾何之特別讀物出現．因多數基本幾何定理之越出中學課程限制者，徒為新奇而無特殊用途，遂處於數學發展主流以外，然而，主要定理之外，基本幾何包含兩種重要之一般觀念，以形成幾何之所有進一步發展，而其重要性之延伸，遠過此等寬廣限制以外，已知幾何演繹法及其原理基礎，在一方面；而幾何移轉，及其群一理論基礎，在另一方面．此等觀念，曾有其結果之各自發展，引致非歐幾里德幾何．此等觀念之一敍述，幾何之群一理論基礎，為本書之基礎任務………．

本書特質，適合廣泛讀者；於斯情況，常須犧牲某些讀者興趣，以適應其他人士．作者曾委屈準備充份讀者之興趣，而努力於求簡化與明晰，以代嚴格及邏輯之恰當性．由是，例如，於本書中，不作幾何移轉一般概念之定義，因定義名詞，直覺顯明，常使無經驗之讀者，產生困難．基此相同理由，乃需禁用指向角，並延至第二章，始介紹指向綫段，雖有缺點於基本教材之某些理論，及習題中之解答；嚴格說來，考慮欠週（如P．50之證明）．似乎．於所有此等情況中，準備良好之讀者，能自行完成推理，而缺乏嚴格，並不影響準備欠週之讀者……．

同樣考慮，於名詞術語選擇中，亦居重要地位，作者基於其本身作學生之經驗．出現許多不熟悉之名詞，嚴重的增加書中困難，因此，彼企圖於此重點，實行高度經濟簡約．於某些情況，此遂引致避免某些名詞，以求方便，由是而犧牲準備良好讀者之利益……．

習題，提供讀者，瞭解其對理論性題材，處理能力如何之機會．不需依

次去解所有習題，但望每組習題，能作一個（多多益善）；本書結構，如此進行，讀者幸勿錯失本書之任一重要部份．於解一題（或試求其解）以後，應研究書末所示解答：

通常，習題擬製，並不與書中所云連繫，相反的，使用基本題材，應用基本幾何移轉；特別注意於較定理爲重要之方法；由是，於某些處所，出現特別練習，因各種解題方法之比較，常極富教育意義也．

有許多作圖問題，解時，並不有興趣於“極簡單”（於某種意義說）作圖一以代作者觀點，此等問題，主以邏輯爲重，而不在乎實際從事作圖．

未提及三度定理；此限制並不嚴重影響本書之主要觀念．而立體幾何問題一節，可有其增加之利益，書中問題，均係示範，而非其本身之終止．

本書初稿，係作者於奧里可夫一柴也夫（ Orekhovo-Zuevo ）教學會……所撰，而與作者所從事之莫斯科大學，中等學校數學研究之幾何部份相關連．

雅格洛姆

# 目　錄

# 引言

# 幾何是什麼?

凱西里奧夫(A.P.Kiselyov)所著中學幾何教材(蘇聯境內,具領導性之平面幾何教材)第一頁,繼"點,綫,曲面,物體"定義,及說明"點,綫,曲面或物體之集中,於通常方式,置於空間,稱爲幾何圖形"之後,隨以幾何之定義爲:"幾何係研究幾何圖形性質之科學".由是,而有於此引言中,所出現之問題,已於中學幾何教材答覆之印象.而不需關注其進一步情況.

但此問題簡單性質之印象錯誤,凱西里奧夫定義,不能謂爲錯誤;然而,似欠完整,"性質"一詞,有一極普遍之特性,而無所有圖形性質,均於幾何中研究之意.由是,例如,於幾何中,一三角形是否繪於白紙,或黑板上,並無若何重要之處;三角形之顏色,非幾何研究主題也.誠然,於以上定義之意義中,可答覆幾何研究幾何圖形之性質,而顏色,係繪圖所用之紙的性質,而非圖本身之性質,然而,此答仍留下某種欠滿意之感覺;爲求更深瞭解,可能願作幾何中,研究圖形性質之精確數學定義,而如斯之定義尚乏.此種不滿意之感覺,當於幾何中,企圖解釋,爲何研究由繪於黑板上之三角形頂點,至三角形相對邊之距離,並非至如黑板邊緣之其他直綫距離時,發生.如此之解釋,頗難純基於以上定義提出.

於繼續說明以前,願略述因其定義之欠完備,學校教材不能厚非.或許凱西里奧夫定義,爲幾何研究第一階段,所能唯一提供者.幾何歷史,足可謂爲開始於4000年以前,而幾何之第一個科學定義之敍述,乃本書主要目標之一,僅於約80年(於1872)以前,由德國數學家克累(F. Klein)所提出,於數學家,明顯獲知,需有幾何重要事務之正確定義以前,需要洛巴克夫司基(Lobachevsky)所創之非歐幾里德幾何;於此之後,遂使預料其不能爲幾種"幾何學"之幾何圖形直覺概念,變爲明顯,而不能提供幾何科學廣大結構之充份基礎.

現且轉至正確,澄清,幾何所研究者,爲何種幾何圖形性質,已知幾何並不研究所有圖形性質,但僅其中之某些圖形而已;於已精確說明該等屬於

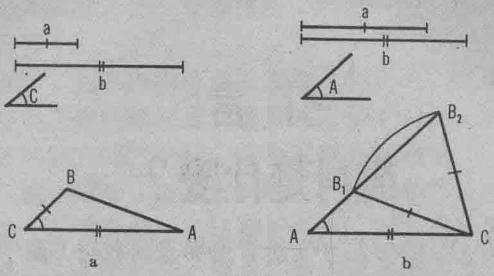



圖 1

幾何之性質以前，僅能謂幾何學，研究圖形之“幾何性質”.以此加諸凱西里奧夫之定義，非謂其自身完成定義；問題乃變爲“幾何性質”爲何？而僅能答以，其爲“幾何中研究之那些性質”．由是，已進至於圓中；定“幾何”之義爲“研究圖形幾何性質之科學”，而幾何性質，即係幾何中研究的那些個性質，爲求打破此圓，應不用“幾何學”一詞，以定“幾何性質”之義．

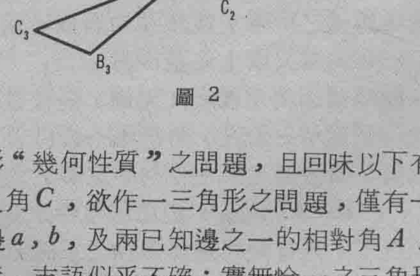



圖 2

欲研究何爲圖形“幾何性質”之問題，且回味以下有名的定理：已知兩邊 $a$，$b$，及其所含之角 $C$，欲作一三角形之問題，僅有一解．（圖 1.a）．[ 相對於此，已知邊 $a$，$b$，及兩已知邊之一的相對角 $A$，作一三角形，能有兩解．] 於第二思考，末語似乎不確；實無恰一之三角形，具已知邊 $a$，$b$，及所含角 $C$，但有無窮多也（圖 2）．如是，問題非止一解，而有無窮解也，而此定則，所謂恰有一解之意義爲何？

由兩邊 $a$，$b$，及所含角 $C$，僅能作“一”三角形之定則，顯然意爲所有具已知邊 $a$，$b$，及所含角 $C$ 之三角形，爲彼此全等．因此，如謂由兩邊及其

所含角，能作無窮多個三角形，但爲全部互相全等，當更正確．由是，於幾何中，當謂存在唯一具已知邊 $a$，$b$，及所含之角 $C$ 時，則諸三角形之僅相殊於其位置者，均不考慮其爲相殊，且因已定幾何學之義，爲研究圖形“幾何性質”之科學，則當然，顯僅確具相同幾何性質之圖形，將爲，彼此莫由區別．由是，全等圖形，將確具相同之幾何性質；反之，圖形之非全等者，應有相殊之幾何性質，否則，莫由區別．

由是，而獲致圖形幾何性質之所需定義：“圖形之幾何性質，係所有全等圖形，所共有之一切性質”．現能提出，“爲何由三角形頂角之一，至黑板邊緣之距離，不在幾何中研究”問題之精確答案：此距離非一幾何性質，因其能不同於全等三角形也．反之，三角形之高度，爲一幾何性質，因對應之高度，對全等圖形，常相同也．

現已非常接近幾何之定義．已知，幾何學研究圖形之“幾何性質”．即對全等圖形，爲相同之該類性質．尙待答覆之僅有問題爲：“全等圖形爲何？”

此最後問題，可能使讀者失望，而產生吾人從無成就之印象；曾簡單的將一問題，變爲另一問題，恰如其困難者然．然而，此實非其情況；當兩圖形全等時，問題並不全然困難，而凱西里奥夫教材，提出其完全滿意之答案．依凱氏所云：“二幾何圖形，如其一圖，於空間移動，能使之與第二圖形重合，以使兩圖之所有部份重合，乃謂爲全等”．換言之，全等圖形，係能由一移動，使之重合者；因此，圖形之幾何性質，即所有全等圖形，共具之性質，而爲移動圖形，並不改變之該等性質．

由是，最後臻於以下之幾何學定義：“幾何學，係研究圖形經過移動，而不改變之幾何圖形性質的科學”．現在，將止於此定義；雖尙有餘地，以作進一步發展，但以後將有更多要說的話．吹毛求疵之士，可能並不滿意於此定義，而仍要求解釋，“移動之意義爲何”．此可於下列方式回答：“一移動爲一平面（或空間）之幾何移動，將各點 $A$，帶往一新點 $A'$，以致任兩點 $A$ 與 $B$ 間之距離，等於其所携往之點 $A'$ 及 $B'$ 間距離”．[移動，爲移轉或嚴格之移動．平面中兩點 $A$ 與 $B$ 間之距離，等於

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

其中 $x_1$，$y_1$ 及 $x_2$，$y_2$，分別爲點 $A$ 與 $B$ 之坐標値，於某（不問爲何）矩形卡氏坐標系表示（圖3）；由是，距離概念，化爲簡單之代數公式，而不需澄清後果爲何．

相似的，空間兩點$A$與$B$間距離，等於

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2},$$

其中$x_1$，$y_1$，$z_1$，及$x_2$，$y_2$，$z_2$，爲空間點$A$與$B$之卡氏坐標值］然而，

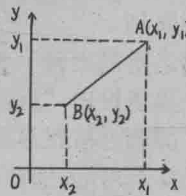



圖 3

此定義仍屬抽象；現知幾何中，"移轉"一詞之基本作用爲如何了，願接受之於直覺，而後仔細研究其性質，如是之研究，爲本書首卷之主要目的．於本卷之末，一完整之平面可能移轉，將予列舉，而能目爲其新而且簡之定義．（詳見68—70頁）

益言之，且謂移轉之研究，不僅於精確幾何概念時重要，但亦有其實作之重要性．幾何中移轉之基本作用，在解釋其許多幾何問題解法之應用，特別是作圖問題．同時，移轉之研究，提供某種普通方法，而能應用於許多幾何問題之解答，且有時，容許結合，一連串其解需用其他方法，而需各別考慮之練習題．例如，考慮以下三種有名的作圖問題：

(a) 作一三角形，已知平面中三點，爲等邊三角形之外頂尖，該等邊三角形，係由所望三角形諸邊，向外作出．

(b) 作一三角形，已知平面中三點，係由所望三角形邊上向外作出之方形中心．

(c) 作一七角形（heptagon）（七邊之多邊形）．已知七點，爲其邊之中點．

此等問題，用通常學校書本之方法，即能解決；但其似爲三個各別問題，彼此無關（且寧爲複雜之問題）．由是第一問題，可證明圖4a之三直綫$A_1M_1$，$A_2M_2$，及$A_3M_3$，均相遇於一點$O$，且於該處，相互交相等之角（此使人由點$M_1$，$M_2$及$M_3$，求一點$O$，因$\measuredangle M_1OM_2=\measuredangle M_1OM_3=\measuredangle M_2OM_3=120°$）．則可證明

$$OA_1+OA_2=OM_3,\quad OA_2+OA_3=OM_2,\quad OA_3+OA_1=OM_2.$$

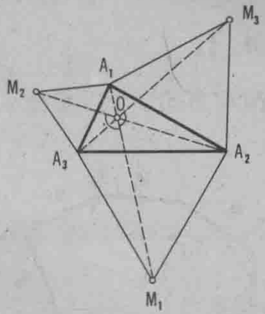



圖4 a

[ 此使人求點$A_1$ ，$A_2$ ，及$A_3$ ，因$OA_1=\frac{1}{2}(OM_2+OM_3-OM_1)$ ] .

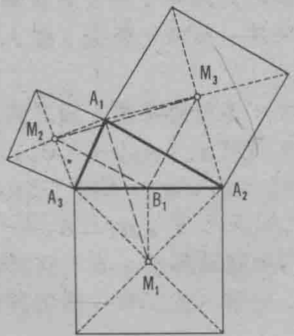



圖4 b

第二問題，見圖4b，可證明

$$M_2B_1 \perp M_3B_1 \text{ 及 } M_2B_1=M_3B_1 ,$$

解之. 其中$B_1$ 爲三角形$A_1A_2A_3$ 之邊$A_2A_3$中點,或（第二解）證

$$A_1M_1=M_2M_3 \text{ 及 } A_1M_1 \perp M_2M_3$$

解之.

最後，於解第三問題中，可用七角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 對角綫 $A_1A_5$ 之中點 $M_5'$，爲平行四邊形 $M_5M_6M_7M_5'$ 之頂的事實，（圖4 c），而因此能作其圖．由是引入相似問題，七角形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$，由一五角形

$$A_1A_2A_3A_4A_5$$

所取代；此新問題，能復於相同方式，予以簡化．

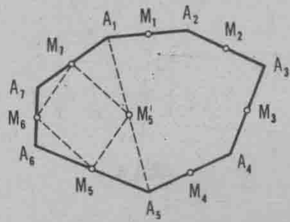


圖4 c

三問題之此等解答，寧屬人爲的；包含某些輔助綫之描繪（如何得知應繪何綫？），且要求機敏考慮．移轉之研究，使人發現並解以下更普通之作圖問題（習題21）

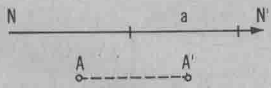
已知 $n$ 點，爲作自欲求 $n$ 多角形各邊（以之爲底）之等腰三角形外頂角，以致此類等腰三角形，有頂角 $\alpha_1$，$\alpha_2$，……$\alpha_n$，作一 $n$ 邊多角形．[問題(a)，係由 $n=3$ 獲致，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=60°$；問題(b)，以 $n=3$，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=90°$；問題(c)，以 $n=7$，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\cdots=\alpha_7=180°$．]

同時，此普通問題，可極簡單解出；使用關於移轉之某普通定理，而能不用繪圖，於頭腦中解之．於第一及二章，讀者將求得多數其他幾何問題，能藉助於移轉以解決之．

# 第一章　移位

## 1.　移動 (Translations)

於平面中，選一方向$NN'$（可以給予，如用帶箭頭之綫表示），亦令其長爲 $a$ 之綫段爲已知，令$A$爲平面中任一點，且令$A'$爲一點之致綫段$AA'$，有方向$NN'$及長度$a$者（圖5 a），於此情況，可謂點$A'$，係由點$A$，於方向$NN'$內，經一其距爲$a$之移動得來，或點$A$由此移動，帶至點$A'$. 圖$F$諸點，經過移動，入於形成新圖$F'$之諸點集合．乃謂新圖$F'$，係經移動，由$F$獲致（圖5 b）．



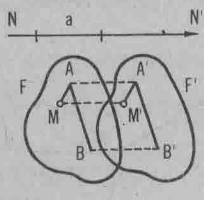




圖 5

有時，亦謂圖$F'$，係將"全部"$F$圖形，移動於方向$NN'$內一距離$a$得來．此處"全部"之意，即圖$F$所有之點，於相同方向移動相同距離，即，所有連接圖$F$及$F'$對應諸點之綫段，均爲平行，而有相同方向與相同長度．如圖$F'$，係將圖$F$於方向$NN'$內作一移動得來，則圖$F$，可於與$NN'$相反之方向，將圖$F'$，行一移動得來（於$N'N$方向中移動）；此遂可謂一對圖形，因移動而相關．

移動將直綫$l$帶至一平行綫$l'$（圖6 a），而將一圓$S$，帶至一相等圓