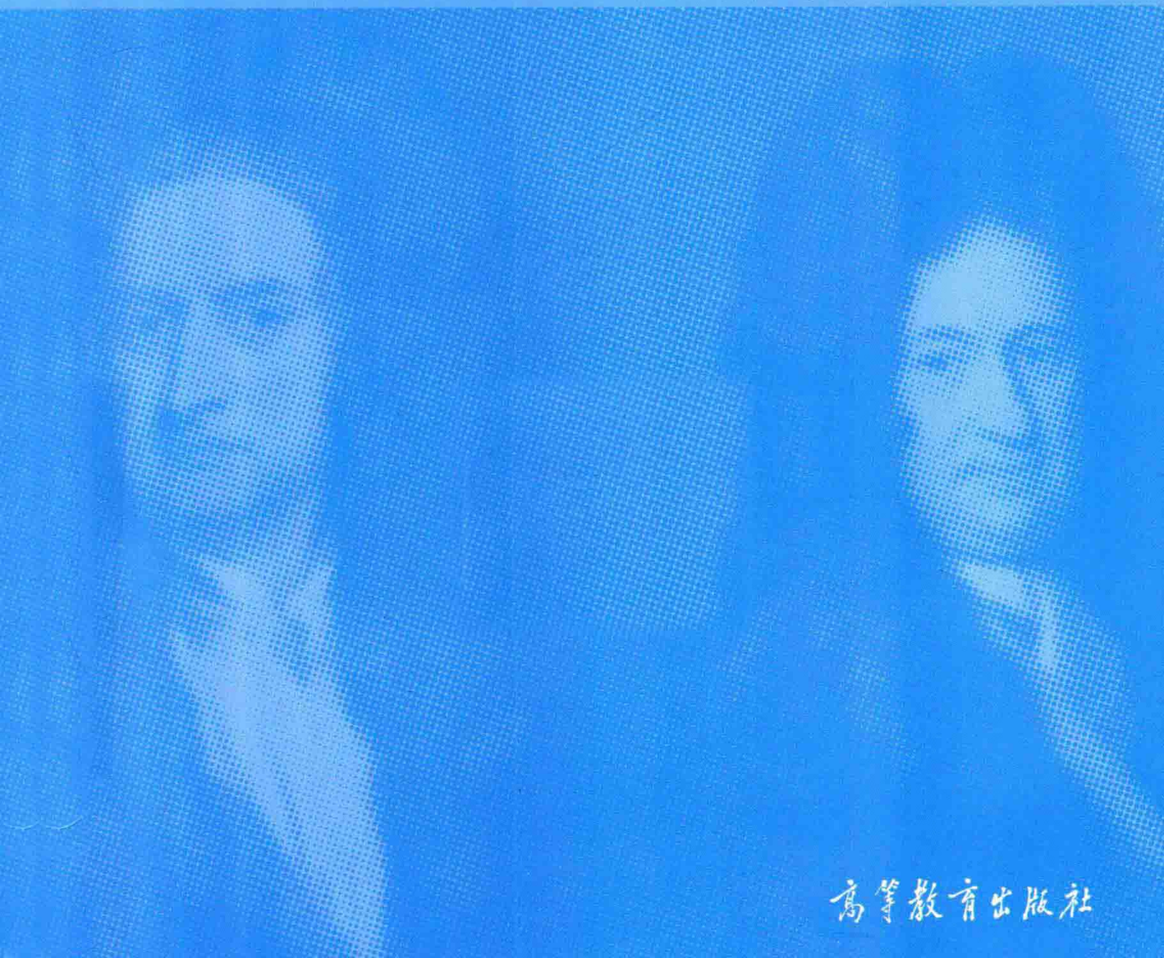
■ 高等学校教材

微积分

下册

主　编　向淑文
副主编　张民选



高等教育出版社

高等学校教材

微　积　分

WEIJIFEN

下　册

主　编　向淑文
副主编　张民选

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会最新颁布的《大学数学课程教学基本要求（2014年版）》，按照“强化基础、突出思想、注重方法”的指导思想编写而成，结构新颖、内容简洁、易教易学。

全书分上、下两册。本书为下册，内容包括空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等五章。另外，本书还配有丰富的思考题和习题，供学生巩固和提高。

本书可作为高等学校理工科专业微积分或高等数学课程的教材，也可作为相关专业的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

微积分.下册/向淑文主编.--北京:高等教育出版社,2016.2

ISBN 978-7-04-044720-0

Ⅰ.①微… Ⅱ.①向… Ⅲ.①微积分-高等学校-教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第020547号

策划编辑 张长虹　责任编辑 张长虹　封面设计 姜 磊　版式设计 马 云
插图绘制 杜晓丹　责任校对 张小镝　责任印制 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 北京鑫海金澳胶印有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 14.75
字　　数 260千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2016年2月第1版
印　　次 2016年9月第2次印刷
定　　价 24.90元

物 料 号 44720-00

《微积分》编委会

主　编　向淑文
副主编　张民选
主　审　周国利
编　委　（按汉语拼音排序）
陈治友　何　旭　胡支军　金　瑾　刘文武
刘衍民　彭光明　索洪敏　颜宝平　严忠权
杨孝斌　张忠群　庄忠文　左　羽　王湘美

目　　录

第七章　空间解析几何

几何学是数学的一个分支，它是研究物体的形状、大小和相互位置关系的科学.

空间解析几何的基本思想是通过引进"坐标"把空间内的点与实数组(x,y,z)建立一一对应关系，空间的一个曲面对应于一个代数方程，而一个代数方程又对应于一个曲面.于是几何问题便可归结为代数问题，而代数问题又可以通过曲面的几何性质来加以研究，从而数与形通过坐标系相互结合.这就是空间解析几何.空间解析几何是学习多元函数微积分的必要基础知识之一.

本章主要研究空间内的平面、直线和常见的曲面、曲线.

应用向量的概念及运算可以简化空间解析几何的推理与运算，向量代数是学习空间解析几何的重要工具.它在物理学及数学的其他分支中也有广泛的应用.本章先介绍向量代数的知识.

§7.1　向量及其线性运算

7.1.1　向量的概念及表示

在物理学中，许多量既有大小又有方向，如位移、速度、加速度、力和力矩等，数学中称既有大小又有方向的量为**向量或矢量**(只有大小而无方向的量称为数量).

数学上用一条有向线段表示以 A 为起点、B 为终点的向量(如图 7.1.1)，记为$\overrightarrow{AB}$或 $\vec{a}$.

向量的大小(有向线段的长)称为**向量的模**，记为$|\overrightarrow{AB}|$或$|\vec{a}|$. 模为 1 的向量称为**单位向量**.模为 0 的向量称为**零向量**，其方向任意，记为$\vec{0}$.

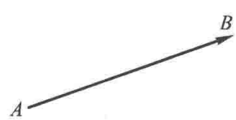


图 7.1.1

与向量 $\vec{a}$ 的方向相反，模相同的向量称为 $\vec{a}$ 的**负向量**，记为$-\vec{a}$.

与起点无关的向量称为自由向量(简称向量).数学上只研究自由向量.

如果两个向量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的模相等并且方向相同,则称这两个向量**相等**,记为 $\vec{a}=\vec{b}$.

设有两个非零向量 $\vec{a},\vec{b}$,任取空间一点 O,作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$,规定不超过 π 的$\angle AOB$(设 $\varphi=\angle AOB,0\leqslant\varphi\leqslant\pi$)称为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角(图 7.1.2),记作$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$或$(\widehat{\vec{b},\vec{a}})$,即$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\varphi$.如果向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 中有一个是零向量,规定它们的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值.

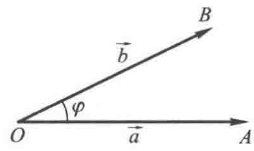


图 7.1.2

如果$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$ 或 π,则称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行,记为 $\vec{a}/\!/\vec{b}$.

如果$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{2}$,则称向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直,记作 $\vec{a}\perp\vec{b}$.

由于零向量与另一向量的夹角可以在 0 到 π 之间任意取值,因此可以认为零向量与任何向量都平行,也可以认为零向量与任何向量都垂直.

7.1.2 向量的线性运算

1. 向量的加法

向量的加法运算规定如下:

(1) 当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 不共线时:

① 平行四边形法则(如图 7.1.3);

② 三角形法则(如图 7.1.4).

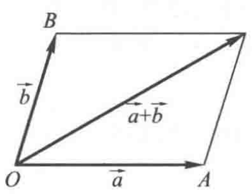


图 7.1.3

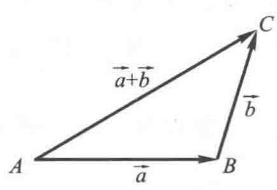


图 7.1.4

(2) 当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线时:

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的指向相同:$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 的方向与 $\vec{a},\vec{b}$ 的方向一致,大小为$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$.如图 7.1.5:记$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$,则$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

图 7.1.5

若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的指向相反：$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的和向量 $\vec{a}+\vec{b}$ 的方向与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 中模大的方向一致，大小等于两向量模之差.

如图 7.1.6：记 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$.

图 7.1.6

向量的加法满足：

① 交换律　$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$；

② 结合律　$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

如图 7.1.7.

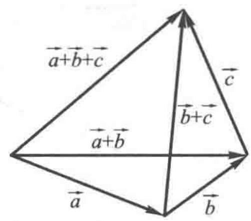


图 7.1.7

2. 向量的减法

规定：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$，如图 7.1.8 和图 7.1.9.

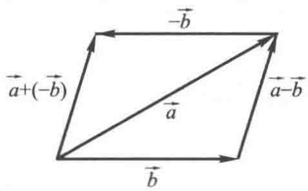


图 7.1.8

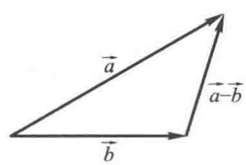


图 7.1.9

3. 向量的数乘

设 λ 是一个数，向量 $\vec{a}$ 与数 λ 的乘积 $\lambda\vec{a}$ 定义为：

① $|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$；

② $\lambda\vec{a}\,/\!/\,\vec{a}$；

③ 如果 $\lambda>0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向一致，

　如果 $\lambda<0$，则 $\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 的方向相反，

　如果 $\lambda=0$，则 $\lambda\vec{a}$ 为零向量.

向量的数乘满足：

① 结合律　$\lambda(\mu\vec{a})=\mu(\lambda\vec{a})=(\lambda\mu)\vec{a}$；

② 分配律　$(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

$$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}.$$

故有:

① 当 $\vec{a}\neq\vec{0}$ 时,$\overrightarrow{a^{\circ}}=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 为与 $\vec{a}$ 同方向的单位向量(称为将 $\vec{a}$ 单位化);

② 非零向量 $\vec{a}/\!/\vec{b}$ 的充分必要条件是存在一个数 λ,使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$.

向量的加法与数乘统称为向量的线性运算.

7.1.3　向量的坐标

1. 空间直角坐标系

在空间取定一点 O 和三个两两垂直的坐标轴构成空间直角坐标系,它有三个坐标面(xOy 坐标面;xOz 坐标面;yOz 坐标面)和八个卦限.

空间点 M 与三元有序数组(x,y,z)一一对应,该三元有序数组称为点 M 的直角坐标,记为 $M(x,y,z)$.

2. 向量的坐标

以空间直角坐标系的原点 O 为起点,在三个坐标轴上分别作与坐标轴正向一致的单位向量 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$,称为基本单位向量(如图 7.1.10).

如图 7.1.11,以原点 O 为起点,空间任意点 $M(x,y,z)$为终点的向量 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\vec{r}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\\&=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k},\end{aligned}$$

称为向量 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$的分解式. $x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$称为 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴的分量,x,y,z 称为 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$的坐标,记为 $\vec{r}=(x,y,z)$.

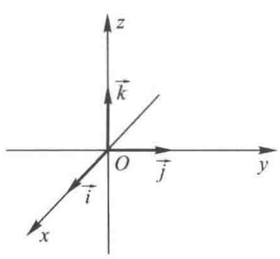


图 7.1.10

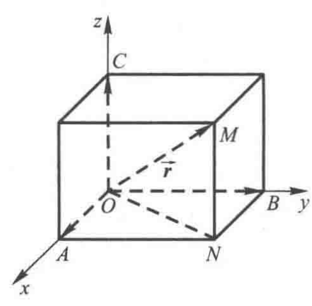


图 7.1.11

3. 利用坐标作向量的线性运算

记 $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，即

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k},\quad \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}.$$

利用向量加法的交换律与结合律，向量数乘的结合律与分配律，有

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x)\vec{i}+(a_y\pm b_y)\vec{j}+(a_z\pm b_z)\vec{k};$$

$$\lambda\vec{a}=\lambda a_x\vec{i}+\lambda a_y\vec{j}+\lambda a_z\vec{k}.$$

即 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$，$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$.

例 7.1.1 设有两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，$M_2(x_2,y_2,z_2)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

解 如图 7.1.12，作向量$\overrightarrow{OM_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{OM_2}=(x_2,y_2,z_2)$ 则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1).$$

即空间任一向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标都等于其终点坐标减起点坐标.

例 7.1.2 如图 7.1.13，已知两点 $A(x_1,y_1,z_1)$，$B(x_2,y_2,z_2)$，在直线$\overrightarrow{AB}$上求点 M，使得$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$ $(\lambda\neq-1)$.

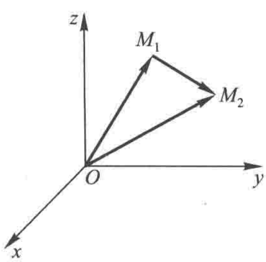


图 7.1.12

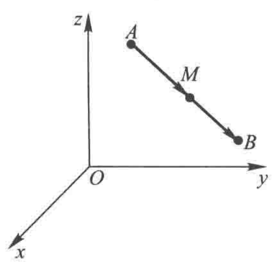


图 7.1.13

解 设 $M(x,y,z)$，则

$$\overrightarrow{AM}=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),\quad \overrightarrow{MB}=(x_2-x,y_2-y,z_2-z).$$

因为$\overrightarrow{AM}=\lambda\,\overrightarrow{MB}$，所以

$$x-x_1=\lambda(x_2-x),\quad y-y_1=\lambda(y_2-y),\quad z-z_1=\lambda(z_2-z),$$

则

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

上述公式称为定比分点公式.

当 $\lambda=1$ 时,得 A,B 的中点 $M\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{y_1+y_2}{2},\dfrac{z_1+z_2}{2}\right)$.

4. 向量的模

设向量 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}=(x,y,z)$,它的模定义为

$$|\vec{r}|=|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

如果 $\vec{r}$ 是非零向量,则 $|\vec{r}|>0$. 与 $\vec{r}$ 同方向的单位向量为

$$\vec{r^\circ}=\frac{1}{|\vec{r}|}\vec{r}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z).$$

5. 方向角与方向余弦

向量 $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$与三个坐标轴的夹角 α,β,γ 称为向量 $\vec{r}$ 的方向角,$\cos\alpha,\cos\beta$,$\cos\gamma$ 称为向量 $\vec{r}$ 的方向余弦. 如图 7.1.14,点 $M(x,y,z)$ 在 x 轴上的投影为 P,则

$$\cos\alpha=\frac{OP}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

同理

$$\cos\beta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

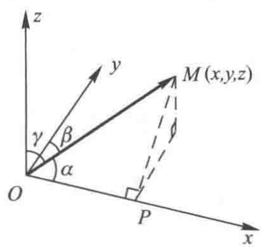


图 7.1.14

显然

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

故$\vec{r^\circ}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$是与向量 $\vec{r}$ 同方向的单位向量.

向量的方向余弦可用于计算将要学习的方向导数与曲线、曲面积分.

例 7.1.3 设 $A(4,0,5)$,$B(7,1,3)$,求与向量$\overrightarrow{AB}$同方向的单位向量 $\vec{a}$.

解 $\overrightarrow{AB}=(7-4,1-0,3-5)=(3,1,-2)$,

$$\vec{a}=\frac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3,1,-2).$$

例 7.1.4 设 $M_1(4,\sqrt{2},1)$,$M_2(3,0,2)$,求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模,方向余弦与方向角.

解 $\overrightarrow{M_1M_2}=(3-4,0-\sqrt{2},2-1)=(-1,-\sqrt{2},1)$,所以

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2} = 2.$$

方向余弦：$\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\gamma = \frac{1}{2}$.

方向角：$\alpha = \frac{2}{3}\pi, \beta = \frac{3}{4}\pi, \gamma = \frac{\pi}{3}$.

思考题

1. 平面解析几何的基本思想是什么？
2. 什么情况下，空间中的有向线段表示同一个向量？
3. 怎样求空间向量的大小和方向？
4. 如果一个正数与一个向量作数乘，所得向量与原向量有什么关系？

习题 7.1

1. 已知向量 $\vec{a} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$ 的终点坐标为 $B(2,-1,7)$，求其起点坐标.

2. 已知空间两点 $M_1(4,1,2)$，$M_2(3,-1,0)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$与 $2\overrightarrow{M_1M_2}$的坐标.

3. 求平行于向量 $\vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{k}$ 的单位向量.

4. 已知两点 $M_1(0,1,2)$，$M_2(1,-1,0)$，求向量$\overrightarrow{M_1M_2}$的模与方向余弦.

5. 向量$\overrightarrow{AB}$终点坐标为 $B(2,-1,7)$，它在 x 轴、y 轴、z 轴上的投影依次为 4，-4 和 7，求该向量起点 A 的坐标.

6. 已知向量 $\vec{a} = 3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}$，$\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$，$\vec{c} = 5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$，求 $\vec{r} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$.

§ 7.2 向量的数量积与向量积

7.2.1 向量的数量积

在物理学中，物体在力 $\vec{F}$ 的作用下沿直线从点 A 移动到点 B 所作的功为

$$W = |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cos\theta,$$

如图 7.2.1 所示，即两个向量 $\vec{F}$，$\overrightarrow{AB}$通过上述运算得到一个数 W. 我们把它称为向量 $\vec{F}$ 与$\overrightarrow{AB}$的数量积.

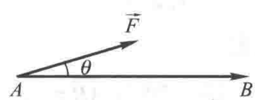


图 7.2.1

定义 7.2.1 两个向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的数量积定义为

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}}).$$

由数量积的定义可得：

① $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$　（因为 $(\widehat{\vec{a},\vec{a}})=0$）；

② 当 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 或 $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0$ 时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

所以，非零向量 $\vec{a}\perp\vec{b}$ 的充分必要条件为 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$；

向量的数量积满足下列运算规律：

① 交换律　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；

② 分配律　$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$；

③ 结合律　$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$，$\lambda$ 是数.

证　仅就③结合律给出证明.当 $\lambda>0$ 时，

$$\begin{aligned}(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}&=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\lambda\vec{a},\vec{b}})\\&=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\\&=\lambda(\vec{a},\vec{b})\\&=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}).\end{aligned}$$

类似可证 $\lambda<0$ 的情形，当 $\lambda=0$ 时，结论显然成立.

下面我们来推导数量积的坐标表示式.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，即 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$，$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$.因为 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 为两两垂直的单位向量，所以

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\cdot(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

故 $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$.

$$\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

例 7.2.1　证明向量 $\vec{a}=(2,-3,5)$ 与过点 $A(3,1,4)$，$B(4,5,6)$ 的直线垂直.

证　因为 $\overrightarrow{AB}=(1,4,2)$，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{AB}=2-12+10=0$. 所以 $\vec{a}\perp\overrightarrow{AB}$，即 $\vec{a}$ 垂直于直线 AB.

例 7.2.2　已知 $|\vec{a}|=5,|\vec{b}|=2,(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{\pi}{3}$，求 $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}$ 的模.

解　因为

$$\begin{aligned}|\vec{u}|^2&=\vec{u}\cdot\vec{u}=(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-3\vec{b})\\&=4|\vec{a}|^2-12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2\\&=100+36-12|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})\\&=76,\end{aligned}$$

所以　$|\vec{u}|=\sqrt{76}$.

7.2.2　向量的向量积

在研究物体的转动问题时，需要分析物体所受的力产生的力矩.设点 O 为一杠杆 L 的支点，力 $\vec{F}$ 作用于杠杆上点 P 处，$\vec{F}$ 与向量 $\overrightarrow{OP}$ 的夹角为 θ（如图 7.2.2），由力学知识，力 $\vec{F}$ 对支点 O 的力矩是一个向量 $\vec{M}$，它的模

$$|\vec{M}|=|OQ|\cdot|\vec{F}|=|\overrightarrow{OP}|\cdot|\vec{F}|\sin\theta,$$

它的方向垂直于 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\vec{F}$ 所确定的平面，并且它的指向是按右手法则从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\vec{F}$ 来确定，即当右手的四个手指从 $\overrightarrow{OP}$ 以不超过 π 的角转向 $\vec{F}$ 握拳时，大拇指的指向就是 $\vec{M}$ 的指向（如图 7.2.3）

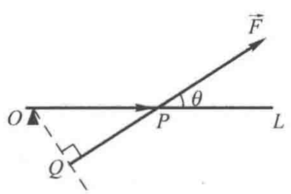


图 7.2.2

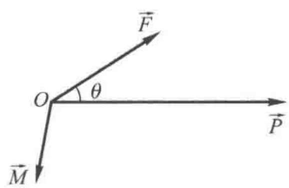


图 7.2.3

这种由两个向量按上述法则确定另一个向量的情况，在其他力学和物理学问题中也会遇到，于是从中抽象出两个向量的向量积定义.

定义 7.2.2　$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$，其中 $\vec{c}$ 满足：

① $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$；

② $\vec{c}\perp\vec{a},\vec{c}\perp\vec{b}$；

③ $\vec{c}$ 的指向按照“右手法则”从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 来确定（图 7.2.4）.

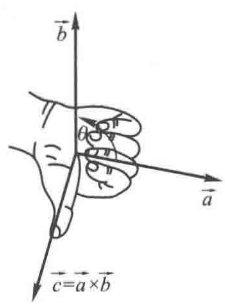


图 7.2.4

由向量积的定义可得：

① $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$ （因为 $(\widehat{\vec{a},\vec{a}})=0$）；

② 当 $\vec{a}=\vec{0}$ 或 $\vec{b}=\vec{0}$ 或 $\vec{a}\parallel\vec{b}$ 时，$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ （反之也成立）；

两个向量的向量积满足下列运算规律：

① $\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}$；

② 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$，$\lambda$ 是数；

③ 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

由向量积的定义知：

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

下面我们来推导向量积的坐标表示式.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$，$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$，则

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b}&=(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k})\times(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k})\\&=(y_1z_2-y_2z_1)\vec{i}-(x_1z_2-x_2z_1)\vec{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\vec{k}\\&=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

由此得

$$\text{非零向量 }\vec{a}\parallel\vec{b}\quad\Leftrightarrow\quad\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

例 7.2.3 设向量 $\vec{a}=(-2,-4,1)$，$\vec{b}=(0,-2,2)$，求一个与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 都垂直的向量.

解 所求向量

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\-2&-4&1\\0&-2&2\end{vmatrix}=-6\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k},$$

或

$$\vec{c}=\vec{b}\times\vec{a}=6\vec{i}-4\vec{j}-4\vec{k}.$$

例 7.2.4　求不在一直线上的三点 $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$ 所构成的三角形面积(如图 7.2.5).

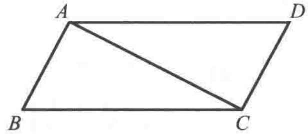


图 7.2.5

解　$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$,

$\overrightarrow{AC}=(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$,

所以　$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$

$$=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|.$$

例如:当空间三点为 $A(3,3,1)$, $B(1,-1,2)$, $C(3,1,3)$ 时,则

$$\overrightarrow{AB}=(-2,-4,1),\quad \overrightarrow{AC}=(0,-2,2),\quad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-6,4,4).$$

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{36+16+16}=\sqrt{17}.$$

7.2.3　混合积

定义 7.2.3　$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$,称为向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 的混合积.

设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$, $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, $\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=(y_1z_2-z_1y_2)\vec{i}-(x_1z_2-z_1x_2)\vec{j}+(x_1y_2-y_1x_2)\vec{k}.$$

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}&=x_3(y_1z_2-z_1y_2)-y_3(x_1z_2-z_1x_2)+z_3(x_1y_2-y_1x_2)\\ &=\begin{vmatrix}x_3 & y_3 & z_3\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\\ &=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).\end{aligned}$$

几何意义:$|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|$表示以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为棱的平行六面体的体积.

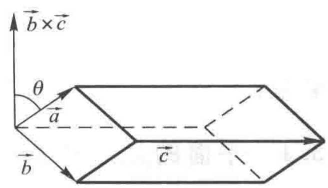


图 7.2.6

如图 7.2.6, $\vec{b}\times\vec{c}$ 是与 $\vec{b}$, $\vec{c}$ 都垂直的向量. $|\vec{b}\times\vec{c}|$是以 $\vec{b}$, $\vec{c}$ 为边的平行四边形面积.而 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}\times\vec{c}|\cos\theta$.