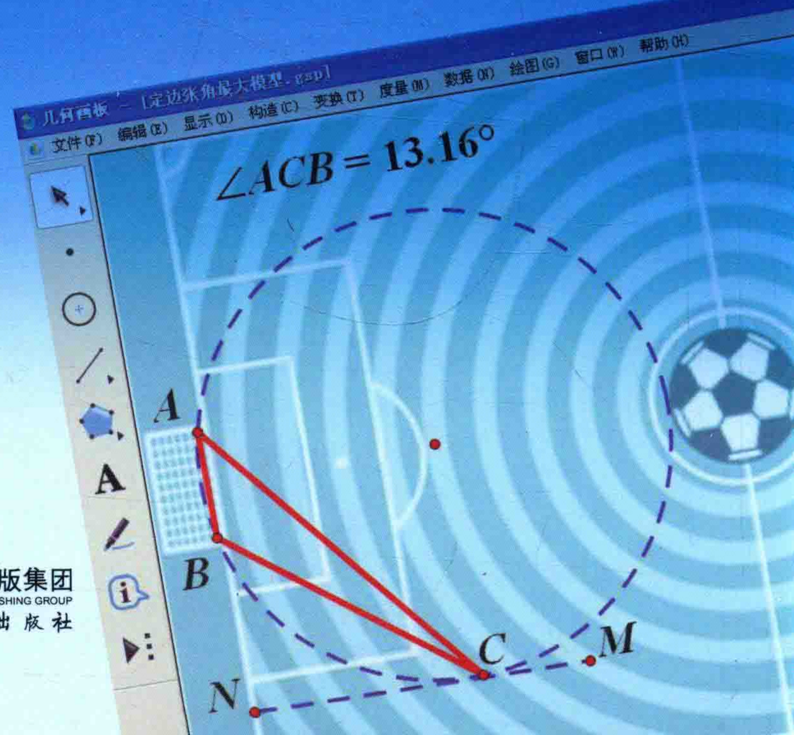
利用几何画板探究数学解题模型

LIYONG JIHE HUABAN TANJIU SHUXUE JIETI MOXING

邵新虎◎著



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

利用几何画板探究数学解题模型

LIYONG JIHE HUABAN TANJIU SHUXUE JIETI MOXING

邵新虎◎著

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

利用几何画板探究数学解题模型/邵新虎著. —北京：北京师范大学出版社，2017.7

ISBN 978-7-303-22394-7

Ⅰ.利… Ⅱ.①邵… Ⅲ.①几何—计算机辅助教学—应用软件—数学模型—中学—解题 Ⅳ.①G633.63 ②O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 116407 号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnupg.com
　　　　　北京新街口外大街 19 号
　　　　　邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：787 mm×1092 mm 1/16
印　　张：15.5
字　　数：370 千字
版　　次：2017 年 7 月第 1 版
印　　次：2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：33.00 元

策划编辑：王永会　　责任编辑：赵　敏
美术编辑：王　蕊　　装帧设计：王　蕊
责任校对：陈　民　　责任印制：孙文凯

前 言

在日常教学中，我们使用作图工具所画出的图形往往是静态的，很容易掩盖一些重要的几何规律．而使用几何画板，则可以画出有几何约束条件的几何图形，运用它可以在变化的图形中探索发现恒定不变的几何规律．因而，将几何画板引入中学数学课堂教学，势在必行．但是，让广大读者困惑的是考场上无法使用几何画板进行作图和探究，如果在实际教学中利用几何画板进行课堂教学的话是否会降低学生的数学思维水平呢？经过大量的实践探索发现，利用几何画板开展数学教学或探究数学问题不仅不会降低学生的数学思维水平，反而有利于发展学生的数学核心素养．

众所周知，解题是学生数学学习中的一项重要工作．而在解题中，大部分学生则常常困惑于如何根据题目信息去寻找问题的突破点和切入点，具体表现为缺乏解题思路，解题速度慢，解题易出错等．家长常常将其归咎于孩子做题少而导致的思维不够灵活，于是补课、刷题就成了提高数学成绩的灵丹妙药．实际上，这是治标不治本的方法．与优秀的学生相比较，这部分同学欠缺的是日常学习中所积淀的数学解题模型思维．所以，我们需要对症下药，需要授之以渔而非授之以鱼，重点培养学生的数学解题模型思维，从根本上提升学生的学习能力．

那么，如何培养学生的数学解题模型思维呢？

笔者通过对二十余年的课堂教学体会及十余年的几何画板课堂教学实践探索进行了归纳和总结，形成了《利用几何画板探究数学解题模型》一书，向各位读者展示笔者是如何使用几何画板开展教学，带领学生进行问题探索，构造数学解题模型，应用模型来解决数学问题等方面来探究数学解题模型，进而培养学生的数学解题模型思维，希望对大家有所帮助，也希望借此解开大家心中的谜团．

本书主要针对中考的教学难点问题展开探究，将数学解题模型分为全等图形、相似图形、中点问题、面积问题、代数最值、几何最值、几何定值、点的轨迹八大类型，共计31种解题模型，每种解题模型由“模型制作”“模型探索”“模型应用”“尝试练习”四大板块组成．其中“模型制作”板块主要学习如何利用几何画板画出数学解题模型，此部分的操作步骤详细，图文并茂，特别适合几何画板零基础的读者进行练习实践，有利于掌握几何画板作图的一般方法．

“模型探索”板块则是利用该数学解题模型展开数学实验，通过动态演示来分析和发现满足该解题模型的特征条件并探究该解题模型下的重要结论或常见的思维切入点. 该板块学习可以激发读者的好奇心和想象力，通过大胆尝试，积极探索进而提出问题，并不断对问题进行批判、质疑甚或否定，然后通过分析思考、数学证明，进行归纳总结出解决某类数学问题的一般规律，这有利于培养读者的科学探索精神和进行研究性学习的意识. “模型应用”板块下设两道典型例题，通过具体实例来解析如何根据题目中的关键信息和特征条件来发现该题目所对应的数学解题模型，并应用所探索的数学模型来解决中考中的相关问题，培养读者自觉、有效地获取、评估、鉴别、使用数学信息的能力，有利于培养读者良好的数学思维习惯. “尝试练习”板块下设四道题目，针对例题配备相应的中考题目进行解题模型方法的巩固练习，练习题在选择时注重体现解题模型思维的灵活性训练，以防止读者死板硬套方法模型，有利于培养读者乐学善学，勤于反思的学习习惯. 在本书的最后，笔者还提供了尝试练习部分的答案提示，供各位读者完成后自查.

为了让各位读者可以获取更多、更新的有关数学解题模型在实际教学中的应用实践、利用几何画板探究数学问题的策略和方法以及怎样运用几何画板思维来思考和探究数学问题的微课视频，笔者专门创建了微信公众号，您可以直接扫描右图的二维码或搜索公众号“动感数学”或“dgsx11（即动感数学1＋1）”加以关注。也欢迎您加入 QQ 群：“116815127（几何画板动感数学探究）”或“552042514（几何画板动感数学体验）”进行互动交流，期待您的参与，让我们在学习交流中一起成长.

本书适用于初中各学段学生及一线数学教师，是中学生必备的学习用书和考试宝典. 本书也可作为师范类大学生和几何画板爱好者的自学用书.

本书与笔者的《利用几何画板探究数学问题》一书相辅相成，均有利于培养几何画板思维，提升数学思维品质，实现思维减负的目的. 后者面向的主要读者群为参加社团的中学生以及需要在专业方面有所突破的教师和师范类学生，重在系统学习几何画板软件的使用，讲述如何运用几何画板来制作图形，模拟知识的形成过程以及以几何画板为载体，提高学生研究性学习的能力，激发学生的创造性，是开展数学社团活动或教师进修的培训教材，有兴趣的读者可以参考学习.

尽管笔者在几何画板的运用上有丰富的经验，但在利用几何画板探究数学解题模型方面还在不断地摸索和尝试中．由于时间仓促，水平有限，书中难免有不当之处，敬请各位读者批评指正．

作者联系方式：shaoxinhu@126.com．

邵新虎

2017 年 5 月

目　　录

几何画板入门

几何画板(The Geometer's Sketchpad)软件是由美国 Key Curriculum Press 公司制作并出版的优秀教育软件，很适合于数学教学和学习的工具软件平台．运用几何画板画出的图形与黑板或草稿纸上画出的图形不同，是动态的并可保持设定的几何关系不变，从而为教师和学生提供了在动态中探究数学规律的工具．在数学教学中运用几何画板来进行探究学习，不仅加强了学生数学思维过程和思维方法，而且学生在经历了整个学习过程后，不仅完成了一个证明，更学到了一种研究问题的方法．

下面，我们先来初步了解一下几何画板这个软件．

目前该软件的最新版本为几何画板 v5.0.6.5 简体中文版，各位读者可以前往几何画板中文版官网(http：//www.jihehuaban.com.cn)下载试用版本或购买正式版．

安装完成后，打开软件，呈现在我们面前的是几何画板的操作界面(图 1)．如果没有出现“工具箱”或者“文本工具栏”，可以在“显示”菜单中设置显示．

几何画板的窗口和其他 Windows 应用程序窗口类似，有系统菜单、最大/最小化按钮以

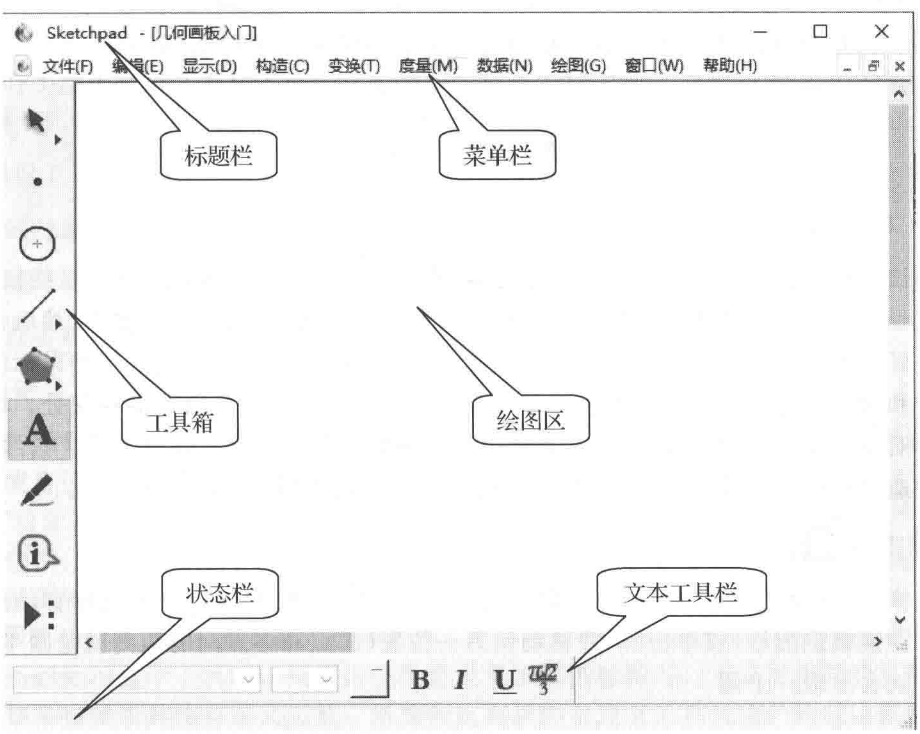


图 1

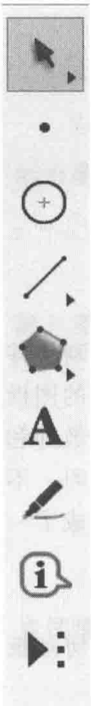


图 2

及标题栏，窗口的左侧是工具箱，它的右边和下边有滚动条可以使小画板能处理更大的图形．在几何画板中，容易被忽视的是状态栏，当画面中有重叠对象时，它能具体显示当前选定对象或者工作状态．

把光标悬停到工具图标的上面，就会显示工具的名称．工具箱从上到下 9 个工具依次是：“移动箭头工具”“点工具”“圆工具”“线段直尺工具”“多边形工具”“文本工具”“标识工具”“信息工具”和“自定义工具”(图 2).

按住工具箱的边缘空白处，可将工具箱拖动到视觉窗口的任何位置．还可以调整工具箱边界改变工具箱的形状(图 3)．在“移动箭头工具”“线段直尺工具”和“多边形工具”的右下角都有一个小三角，说明该工具是“一套”工具，还有下一级工具．用鼠标按住图标约一秒，下一级工具就展开，单击选定哪个，默认工具图标就变为哪个．

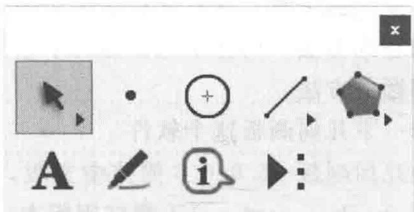


图 3

下面，我们就来简介工具箱中 9 个工具的使用方法．

1. 移动箭头工具 

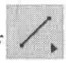
该工具包括移动箭头、旋转箭头和缩放箭头三个工具．使用不同的“箭头”工具可以移动、旋转和缩放对象．

2. 点工具 

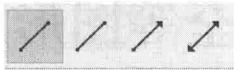
使用该工具可以在绘图区任意空白地方或“路径”上构造点．“路径”可以是线段、射线、圆、多边形边界、扇形边界、弓形边界、轨迹、函数图象等．单击“点工具”，然后将鼠标移动到绘图区域中单击一下，就会出现一个点．单击“移动箭头工具”，然后拖动鼠标将光标移动到线段和圆相交处单击一下，就会出现交点．如果没有指向两个对象的相交处，单击则是选定一个对象．交点可以由线段(包括直线、射线)间、圆间、线段(包括直线、射线)与圆之间单击构造，还可以在线段(包括直线、射线)、圆与函数图象或轨迹之间形成．

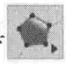
3. 圆工具 

使用该工具以圆心和半径另一个端点构造圆．单击“圆工具”，然后将光标移动到画板窗口中按住左键确定圆心(或单击)，并移动到另一位置(起点和终点间的距离就是圆半径)再单击一下，就会出现一个圆．

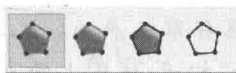
4. 线段直尺工具

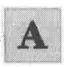
该工具包括构造线段、射线和直线三个工具．单击“线段直尺工具”，然后将光标移动到绘图区域中按住左键(或单击)，拖动鼠标到另一位置松开鼠标，就会出现一条线段．



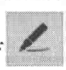
5. 多边形工具

该工具可以构造有芯无边框、有芯有边框和无芯有边框3种多边形．多边形都有边界，但边界不等于边框，边框是指使用线段连接的边框．单击“多边形工具”，就可以通过在绘图区构造多边形的顶点，绘制多边形，最后的一个顶点，需要双击(或者在多边形的第一个点上再单击一下)才能完成构造并释放多边形工具．



6. 文本工具

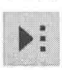
使用该工具可以输入文本、加标注(即说明性的文字)或给对象加标签．单击“文本工具”，光标由箭头变为空心手形，然后移动鼠标，当光标移到对象处，会变为实心的手形，单击对象，可以显隐对象标签．双击对象或者标签可以修改对象标签．在几何画板中的每个几何对象都对应一个“标签”．当在画板中构造几何对象时，系统会自动给构造的对象配标签，文本工具就是一个标签的开关．当鼠标处于移动箭头或者文本工具状态时，点住已有标签，光标变为虚心形，可以拖动标签位置．如果标签在多个重叠对象中，使用文本工具状态的“虚心”小手，更容易选定标签．单击“文本工具”，会出现一个空心手形，在绘图区双击鼠标左键，或者按住左键直接在绘图区拖出虚线框，就可以在里面输入文字了．单击文本工具后，空心手用于拖出文本输入框；实心手用于点击绘图对象、显隐对象标签；虚心手用于拖动对象标签，双击修改标签．

7. 标识工具

给绘制对象(包括轨迹和图象)加标注或者直接在绘图区写画．

8. 信息工具

用来查看对象的属性和关系．

9. 自定义工具

根据实际需要，我们可以使用画板制作的一些自定义工具来简化图形的绘制过程．我们将下载的或自己制作的自定义工具移动到几何画板的安装目录下的“Tool Folder”文件夹中，然后选择“自定义工具/选择工具文件夹…”，在弹出的对话框中，选择“Tool Folder”文件夹．下级菜单包括：创建新工具、工具选项(制作自定义工具时设置选项)、显示脚本视图(看工具的制作过程和使用方法)、工具列表、选择工具文件夹(设定工具来源)等选项．使用时，点住三角图标一秒以上，右移鼠标，选择工具，然后在绘图区域中就可以使用选择的工具了．当第二次还想使用这个工具时，只单击一次自定义工具图标即可，不必再去寻找具体的工具位置了．如果想使用其他自定义工具，将鼠标点到新的自定义工具选项，此时，鼠标自动释放前一个被选定的自定义工具，而携带新的自定义工具．

第一章 全等图形解题模型

1.1 图形折叠模型

◆模型制作◆

1. 打开几何画板软件，在绘图区任取三点 A，B，C，框选三点，选择“构造/线段”，得$\triangle ABC$，分别选中 AC，BC，选择“构造/线段上的点”，得 D，E，连接 DE. 双击 DE，选中点 C，选择“变换/反射”(图 1-1-1)，从而作出点 C 关于 DE 的对称点 C'，分别连接 DC'，EC'.

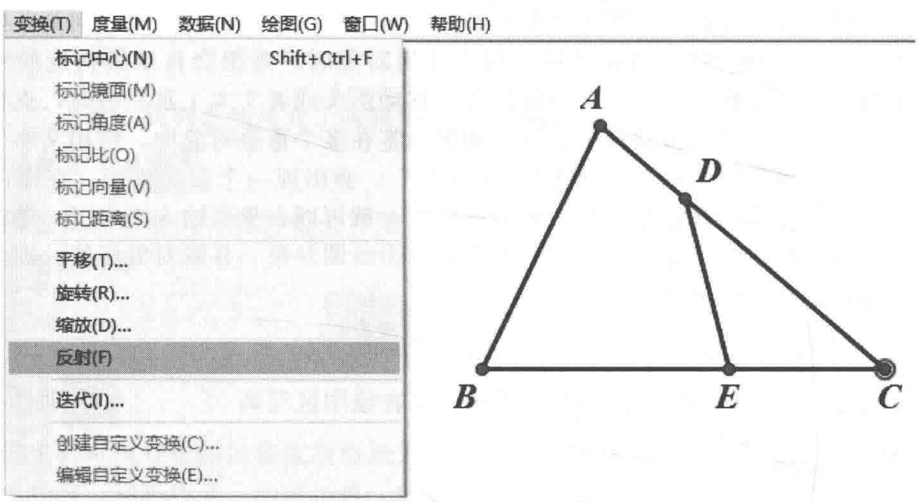


图 1-1-1

2. 分别选中 AC，BC，选择“显示/隐藏线段”，分别连接 AD，DC，CE，BE. 分别选中 DC，CE，选择“显示/线型/虚线”(图 1-1-2).

3. 选择标识工具，用鼠标点中线段 CD(笔尖向上)，线段会出现短线段标识，同法标识出 $C'D$. 在标识不同长度的线段时，可以使用标识工具点击标识的灰色区域，短线会自 1 到 4 循环出现，以保证标识不同组别的线段 . 选中点 D，C，E，选择“构造/三角形的内部”，可以构造出$\triangle DCE$ 的内部，同法构造出$\triangle DC'E$ 的内部(图 1-1-3).

4. 用鼠标按住“自定义工具”约一秒，在下一级工具选择“四边形/矩形”，分别选中 AB，CD，选择“构造/线段上的点”，得点 E，F，连接 EF，同理，可以作出四边形 $BCFE$ 关于 EF 对称的图形(图 1-1-4)，完成作图 .

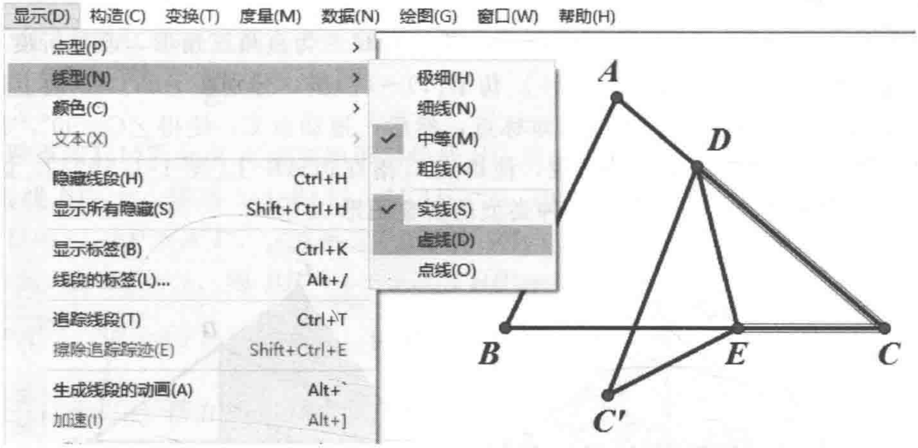


图 1-1-2

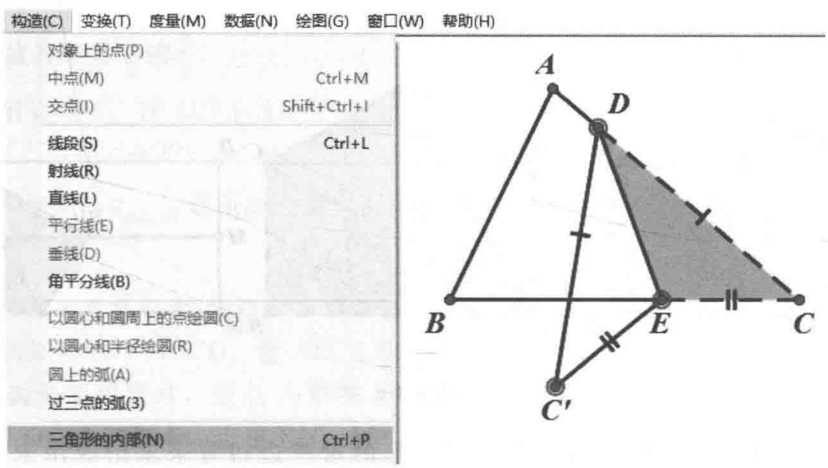


图 1-1-3

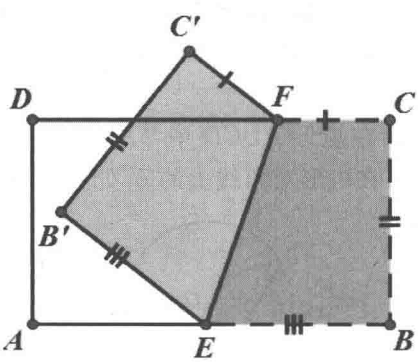


图 1-1-4

◆模型探索◆

如图 1-1-5，拖动点 C，使得$\angle C=90°$，将$\triangle ABC$变为直角三角形，改变折痕 DE 的位置，使得点 B 与点 A 重合[图 1-1-5(1)]．仿第(1)～(2)步，分别在 AC，AB 边上任取一点 D，E，连接 DE，作点 C 关于 DE 的对称点，然后，拖动点 C，使得$\angle C=90°$，将$\triangle ABC$变为直角三角形，改变折痕 DE 的位置，使得点 C 落在边 AB 上[图 1-1-5(2)]．如图 1-1-6，改变折痕 EF 的位置，可以得到各种类型的折叠图形．

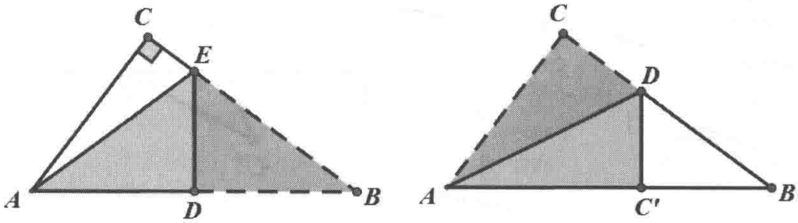


图 1-1-5

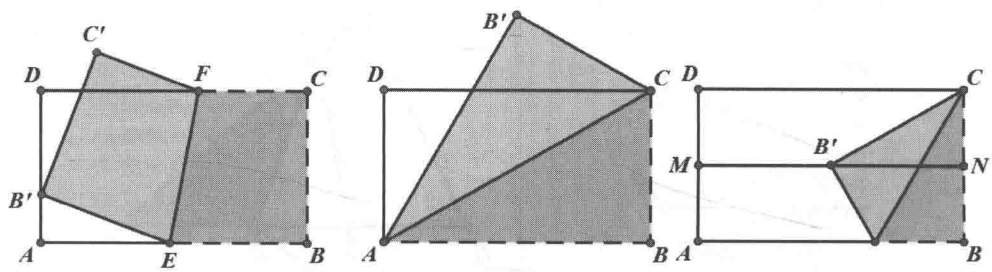


图 1-1-6

我们通常利用折叠前后的两个直角三角形的对应边相等来求出或用未知量表示出 Rt$\triangle ACE$或 Rt$\triangle DBC'$的三边长，然后利用勾股定理、相似三角形的对应边成比例建立等量关系，从而构造方程解决问题．

像这样，将某一几何图形沿着某直线对折后得到新的几何图形，然后求解这个新的几何元素之间的数量关系的一类问题，我们称之为图形折叠模型．

◆模型应用◆

例 1. (1)(2015・绥化中考)在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=3$，点 P 在 AB 上．若将$\triangle DAP$沿 DP 折叠，使点 A 落在矩形对角线上的 A'处，则 AP 的长为________．

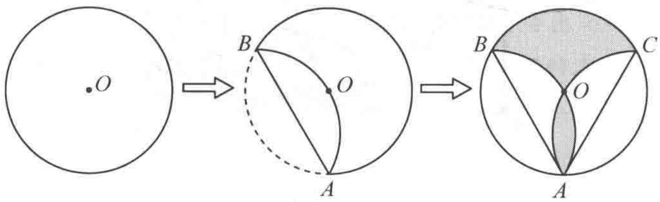


图 1-1-7

(2)(2015・聊城中考)如图 1-1-7，点 O 是圆形纸片的圆心，将这个圆形纸片按下列顺序折叠，使$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{AC}$都经过圆心 O，则阴影部分的面积是$\odot O$ 面积的(　　).

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{5}$

【思路点拨】(1)需分点 A' 落在矩形对角线 BD 或 AC 上两种情况进行讨论.①点 A' 落在矩形对角线 BD 上，如图 1-1-8(1)，$\because AB=4$，$BC=3$，$\therefore BD=5$，根据折叠的性质，$AD=A'D=3$，$AP=A'P$，$\angle A=\angle PA'D=90°$. $\therefore BA'=2$，设 $AP=x$，则 $BP=4-x$，$\because BP^2=BA'^2+PA'^2$，$\therefore (4-x)^2=x^2+2^2$，解得：$x=\frac{3}{2}$，$\therefore AP=\frac{3}{2}$；②点 A' 落在矩形对角线 AC 上，如图 1-1-8(2)，根据折叠的性质可知 $DP\perp AC$，$\therefore \triangle DAP\backsim\triangle ABC$，$\therefore \frac{AD}{AP}=\frac{AB}{BC}$，$\therefore AP=\frac{AD\cdot BC}{AB}=\frac{3\times 3}{4}=\frac{9}{4}$. 故答案为$\frac{3}{2}$或$\frac{9}{4}$.

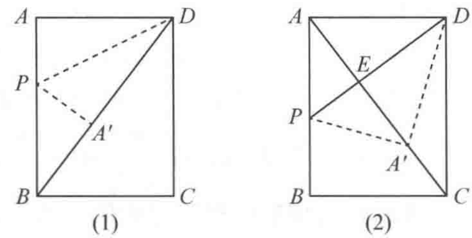


图 1-1-8

(2)如图 1-1-9，作 $OD\perp AB$ 于点 D，连接 AO，BO，CO，求出$\angle OAD=30°$，得到$\angle AOB=2\angle AOD=120°$，进而求得$\angle AOC=120°$，再利用阴影部分的面积$=S_{扇形AOC}$得出阴影部分的面积是$\odot O$ 面积的$\frac{1}{3}$. 故选 B.

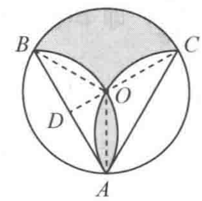


图 1-1-9

◆尝试练习◆

练 1.(2015・孝感中考)如图 1-1-10，四边形 $ABCD$ 是矩形纸片，$AB=2$. 对折矩形纸片 $ABCD$，使 AD 与 BC 重合，折痕为 EF；展平后再过点 B 折叠矩形纸片，使点 A 落在 EF 上的点 N，折痕 BM 与 EF 相交于点 Q；再次展平，连接 BN，MN，延长 MN 交 BC 于点 G. 有如下结论：①$\angle ABN=60°$；②$AM=1$；③$QN=\frac{\sqrt{3}}{3}$；④$\triangle BMG$ 是等边三角形；⑤P 为线段 BM 上一动点，H 是 BN 的中点，则 $PN+PH$ 的最小值是$\sqrt{3}$. 其中正确结论的序号是________.

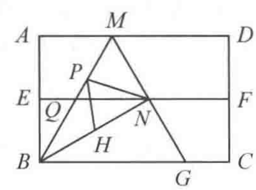


图 1-1-10

练 2.(1)(2015・泸州中考)如图 1-1-11，在$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，$BC=24$，$\tan C=2$，如果将$\triangle ABC$ 沿直线 l 翻折后，点 B 落在边 AC 的中点 E 处，直线 l 与边 BC 交于点 D，那么 BD 的长为(　　).

A. 13　　B. $\frac{15}{2}$　　C. $\frac{27}{2}$　　D. 12

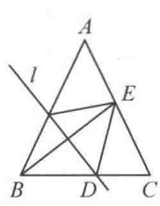


图 1-1-11

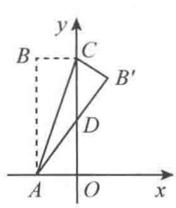


图 1-1-12

(2)(2015·荆州中考)如图1-1-12，矩形$ABCO$中，OA在x轴上，OC在y轴上，且$OA=2$，$AB=5$，把$\triangle ABC$沿着AC对折得到$\triangle AB'C$，AB'交y轴于D点，则B'点的坐标为________.

◆模型应用◆

例2.(2015·南充中考)如图1-1-13，矩形纸片$ABCD$，将$\triangle AMP$和$\triangle BPQ$分别沿PM和PQ折叠($AP>AM$)，点A和点B都与点E重合；再将$\triangle CQD$沿DQ折叠，点C落在线段EQ上点F处.(1)判断$\triangle AMP$，$\triangle BPQ$，$\triangle CQD$和$\triangle FDM$中有哪几对相似三角形？(不需说明理由)

(2)如果$AM=1$，$\sin\angle DMF=\frac{3}{5}$，求$AB$的长.

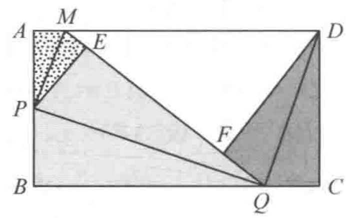


图1-1-13

【思路点拨】(1)有三对相似三角形，即$\triangle AMP\backsim\triangle BPQ\backsim\triangle CQD$；(2)设$AP=x$，由折叠关系可得：$BP=AP=EP=x$，$AB=DC=2x$，$AM=1$，由$\triangle AMP\backsim\triangle BPQ$得：$\frac{AM}{AP}=\frac{AP}{BQ}$，即$BQ=x^2$. 由$\triangle AMP\backsim\triangle CQD$得：$\frac{AP}{CD}=\frac{AM}{CQ}$，即$CQ=2$. $AD=BC=BQ+CQ=x^2+2$，$MD=AD-AM=x^2+2-1=x^2+1$. 又∵在$Rt\triangle FDM$中，$\sin\angle DMF=\frac{3}{5}$，$DF=DC=2x$. ∴$\frac{2x}{x^2+1}=\frac{3}{5}$，解得：$x=3$或$x=\frac{1}{3}$(不合题意，舍去). ∴$AB=2x=6$.

◆尝试练习◆

练3.(2015·衢州中考)如图1-1-14(1)，将矩形$ABCD$沿DE折叠，使顶点A落在DC上的点A'处，然后将矩形展平，沿EF折叠，使顶点A落在折痕DE上的点G处，再将矩形$ABCD$沿CE折叠，此时顶点B恰好落在DE上的点H处，如图1-1-14(2).

(1)求证：$EG=CH$；

(2)已知$AF=\sqrt{2}$，求AD和AB的长.

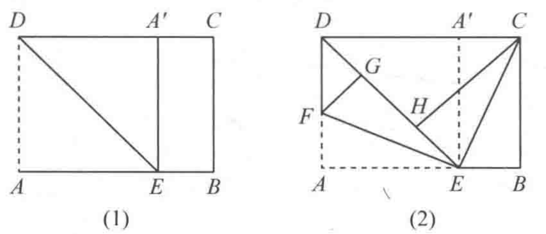


图1-1-14

练4.(2015·眉山中考)如图1-1-15，在矩形$ABCD$中，E是AB边的中点，沿EC对折矩形$ABCD$，使B点落在点P处，折痕为EC，连接AP并延长AP交CD于F点.

(1)求证：四边形$AECF$为平行四边形；

(2)若$\triangle AEP$是等边三角形，连接BP，求证：$\triangle APB\cong\triangle EPC$；

(3)若矩形$ABCD$的边$AB=6$，$BC=4$，求$\triangle CPF$的面积.

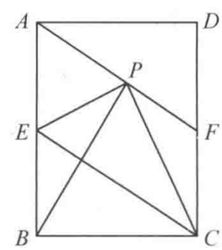


图1-1-15

1.2 双垂线段模型

◆模型制作◆

1. 打开几何画板软件，选中圆工具，在绘图区任画圆 A，及半径 AB(点 B 不与控制点重合)，双击点 A，选中点 B，选择“变换/旋转”，旋转参数为固定角度 90 度，将点 B 绕点 A 逆时针旋转 90°(图 1-2-1)得到点 C，连接 BC.

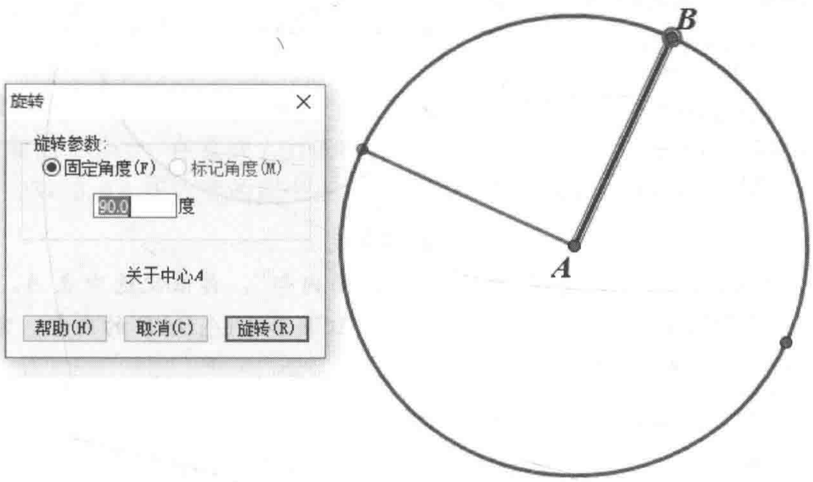


图 1-2-1

2. 选择直线直尺工具中的直线工具，在点 A 处单击左键，然后将光标拖动到圆 A 上时再次单击左键(图 1-2-2)，得到过点 A 的直线 l，直线 l 与圆 A 交于点 P，将点 P 的颜色设定为浅蓝色示意该点可以手动控制.

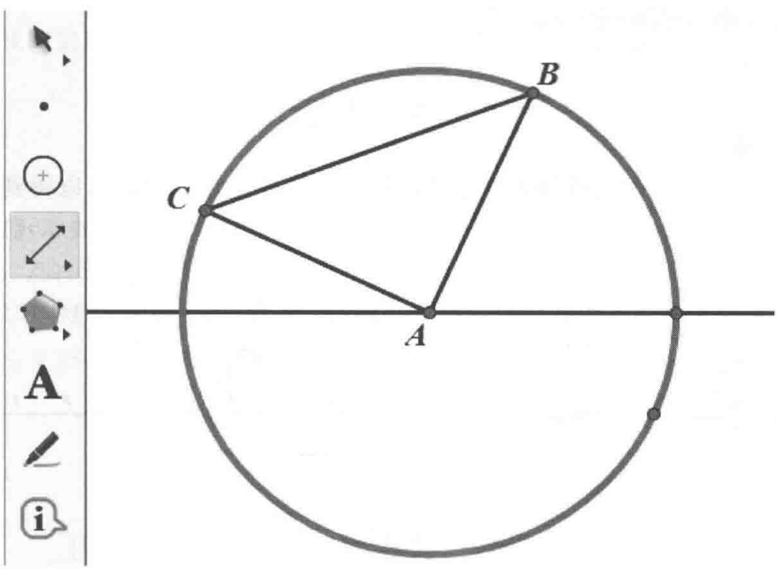


图 1-2-2