·河南省高等院校公共数学统编教材·

经济数学基础

（上册）

张秀英 主编

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$$

$$U(x,y)=2x^{0.5}y^{0.5}$$

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

河南省高等院校公共数学统编教材

JINGJI SHUXUE JICHU

经济数学基础

（上册）

主　编　张秀英
副主编　贺　欣　李　静　李海燕

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS
·郑州·

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础.上册/张秀英主编.—郑州:河南大学出版社,2015.4
ISBN 978-7-5649-1960-3

Ⅰ.①经… Ⅱ.①张… Ⅲ.①经济数学—高等职业教育—教材 Ⅳ.①F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 086398 号

责任编辑 张雪彩
责任校对 李 蕾
装帧设计 郭 灿

出版发行 河南大学出版社
地址:郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号 邮编:450046
电话:0371-86059701(营销部) 网址:www.hupress.com
排 版 河南金河印务有限公司
印 刷 郑州市富田印务有限公司
版 次 2015 年 8 月第 1 版
印 次 2015 年 8 月第 1 次印刷
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 11.25
字 数 267 千字
定 价 28.00 元

前　言

本书依照教育部制定的高职高专数学教学基本要求而编写.本书共两册,上册的主要内容包括函数和极限、导数与微分、导数的应用、一元函数的积分学、多元函数的微分学、数学软件 Matlab 简介共 6 章.

为适应高职高专数学教学改革的要求,全面推进素质教育,培养创新人才,适应高职高专教育的发展趋势,我们组织了多年从事一线教学的老师,经过深入探讨并征求经济学相关专家的意见和建议,为高职高专经济管理类专业学生量身定制了这本教材.

在编写的过程中,我们一方面注重经济体系完整、框架结构合理、内容编选丰富,教与学结合、学与用呼应,另一方面以掌握概念、强化应用、培养技能为重点,深入浅出,以满足学生的学习需求.

本教材在编写中突出了以下特色:

(1)对以应用为主的经济管理类专业的高职高专学生来讲,学习经济数学的主要目的是将数学用于解决各自专业领域内的相关问题.基于这一点,适当地弱化了高等数学的学科性和理论严密性,并结合实际背景叙述有关概念和主要结论.

(2)侧重于基本方法的掌握和概念的解释,概念的把握和基本方法的正确运用是解决实际问题的关键,例题与习题的设置也突出这一特点.

(3)用实例或几何解释引出数学概念,并用通俗简洁的语言,深入浅出地阐述概念的内涵和实质,着力表现解决问题的基本步骤和思想方法.

(4)贯穿了以数学思想为核心、以经济应用为主线的理念,体现了数学教学的应用性、知识案例的一体化,使“教、学、用”合为一体.

(5)重视基本计算.例题、习题难易程度层次分明,便于学生学习和教师讲授.每章后配有复习题,书末附有答案,便于学生进行巩固练习.

本书由张秀英策划和组织实施.本册编者的具体分工如下:第 1 章,徐宝林;第 2 章,郭静;第 3 章,张秀英;第 4 章,李静、王峥;第 5 章,贺欣;第 6 章,李海燕.本书由周素静主审.

在编写此书的过程中,许多同行和专家提出了很多宝贵意见和建议,付出了极为辛勤的劳动,我们谨于此致以谢意.

受我们的水平所限,书中难免会有缺点和错误,真诚欢迎读者批评指正.

编　者

2015 年 3 月

目 录

第 1 章 函数和极限 …… (1)
§1.1 函数 …… (1)
习题 1－1 …… (5)
§1.2 经济学中的常用函数 …… (5)
习题 1－2 …… (8)
§1.3 极限的概念 …… (9)
习题 1－3 …… (14)
§1.4 极限的运算和两个重要极限 …… (15)
习题 1－4 …… (19)
§1.5 函数的连续性 …… (20)
习题 1－5 …… (24)
复习题 1 …… (25)
第 2 章 导数与微分 …… (27)
§2.1 导数的概念 …… (27)
习题 2－1 …… (31)
§2.2 导数的计算 …… (32)
习题 2－2 …… (36)
§2.3 高阶导数 …… (36)
习题 2－3 …… (37)
§2.4 函数的微分 …… (38)
习题 2－4 …… (40)
复习题 2 …… (41)
第 3 章 导数的应用 …… (43)
§3.1 函数的单调性 …… (43)
习题 3－1 …… (45)
§3.2 函数的极值与最值 …… (46)
习题 3－2 …… (50)
§3.3 导数在经济分析中的应用 …… (50)
习题 3－3 …… (57)
复习题 3 …… (59)

第4章 一元函数的积分学 …… (62)
§4.1 不定积分的概念与性质 …… (62)
习题4-1 …… (66)
§4.2 不定积分的计算方法 …… (67)
习题4-2 …… (73)
§4.3 定积分的概念与性质 …… (74)
习题4-3 …… (80)
§4.4 微积分基本公式 …… (81)
习题4-4 …… (84)
§4.5 无限区间上的广义积分 …… (85)
习题4-5 …… (87)
§4.6 积分的应用 …… (87)
习题4-6 …… (92)
复习题4 …… (93)
第5章 多元函数的微分学 …… (96)
§5.1 空间直角坐标系简介 …… (96)
习题5-1 …… (99)
§5.2 多元函数 二元函数的极限 …… (100)
习题5-2 …… (103)
§5.3 偏导数 …… (104)
习题5-3 …… (107)
§5.4 复合函数与隐函数求导法 …… (108)
习题5-4 …… (110)
§5.5 多元函数的极值与最值 …… (111)
习题5-5 …… (115)
§5.6 偏导数在经济分析中的应用 …… (116)
习题5-6 …… (120)
复习题5 …… (121)
第6章 数学软件Matlab简介 …… (123)
§6.1 基本操作与基本运算 …… (123)
§6.2 数组与矩阵 …… (129)
§6.3 Matlab程序和M文件 …… (134)
§6.4 函数作图 …… (139)
§6.5 求极限、导数和积分运算 …… (148)
§6.6 解方程和求最值运算 …… (152)
复习题6 …… (154)
习题答案与提示 …… (155)
参考文献 …… (171)

第 1 章　函数和极限

函数是微积分研究的基本对象，极限是研究微积分的基本概念和重要工具.经济类高等数学的核心是微积分及其在经济方面的应用，因此，在本章我们将重点学习初等函数、极限和连续的相关知识并介绍一些经济学常用函数.

§1.1　函　　数

一、函数的概念

1. 函数的定义

某一变化过程中可以取不同数值的量叫变量，而始终保持相同数值的量叫常量.

在某个变化过程中，如果有两个变量，其中一个变量的变化会引起另一个变量随之发生变化，那么这两个量之间就有了函数关系.

例如，某空调厂生产一批某型号空调的固定成本为 8800 元，每生产一台空调成本增加 800 元，那么生产这批空调的总成本 y 与产量 x 之间的关系可以表示为

$$y=800x+8800.$$

又如利息和存期的关系，个人所得税的纳税额和收入的关系等，这里每一个问题中的两个变量之间都有着函数关系.

定义 1.1　设 x,y 是两个变量，D 是一个非空数集.若对于 D 中的每一个 x 值，按照某一对应规则 f，都有唯一确定的 y 值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$.这里 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数**，D 称为函数的**定义域**，与 x 值相对应的 y 值的集合叫作**函数的值域**.

当 $x_0\in D$ 时，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值记作 $f(x_0)$ 或 $y\big|_{x=x_0}$.

函数除用 $f(x)$ 表示外，还常用 $F(x),G(x),q(p),S(p),L(q),C(q)$ 等记号来表示.

2. 函数的表示法

函数的表示方法常用的有三种，即**公式法**（又称**解析法**）、**表格法**和**图像法**.

例如：$y=2x^3-3\sin x$ 就是用公式法表示的函数；我们的成绩单、财务报表以及统计报表等都是用表格法来表示的；反映一天内温度随时间变化的曲线，心电图机从体表记录心

脏每一心动周期所产生的电活动变化的图形等函数关系是通过图像法表示出来的.

例 1 已知函数 $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$,求:

(1) $f(x)$ 的定义域; (2) $f(-3)$, $f(x-1)$.

解 (1)要使函数有意义,需满足 $1-x>0$,即 $x<1$,因此函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,1)$.

(2) $f(-3)=-1$, $f(x-1)=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$.

3. 分段函数

在定义域的不同范围内,由不同公式表示的函数关系叫作**分段函数**.

例如,绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0;\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是分段函数,它的图像如图 1-1 所示.

再如,某网络运营商的 4G 手机上网流量包每月 30 元,包 500 M 国内流量,超出 500 M 后按 0.29 元/M 收费. 如果用 t 表示每月上网使用的流量(单位:M),$f(t)$ 表示上网费用,那么有

$$f(t)=\begin{cases}30, & 0\leqslant t\leqslant 500;\\ 30+0.29(t-500), & t>500.\end{cases}$$

这个函数的图像如图 1-2 所示.

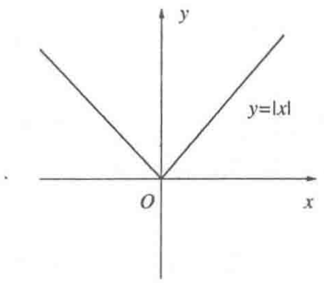


图 1-1

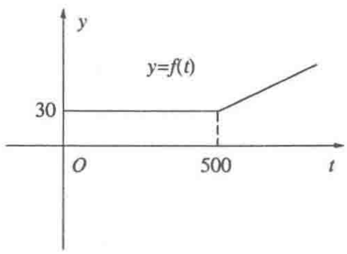


图 1-2

二、函数的几个基本性质

函数的单调性、奇偶性、周期性这三种特性在中学已有详细描述,此处不再介绍,下面说明有界性.

设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有定义,如果存在一个正数 M,使得对 D 中的任一 x,其相应的函数值 $f(x)$ 都满足 $|f(x)|\leqslant M$,那么称函数 $f(x)$ 在 D 上是**有界的**,也说 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**;若不存在这样的正数 M,则称函数 $f(x)$ 在 D 上是**无界的**,也说 $f(x)$ 是 D 上的**无界函数**.

例如,对任意的 $x\in\mathbf{R}$ 有 $|\sin x|\leqslant 1$, $\left|\dfrac{2}{x^2+1}\right|\leqslant 2$,所以 $y=\sin x$, $y=\dfrac{2}{x^2+1}$ 在它们的定义域

$(-\infty,+\infty)$上都是有界的,而函数 $y=x^3+x$ 在它的定义域$(-\infty,+\infty)$上是无界的.

当函数 $y=f(x)$ 在数集 D 上有界时,它在 D 上的图像一定在两条平行线 $y=M$ 和 $y=-M$ 之间.

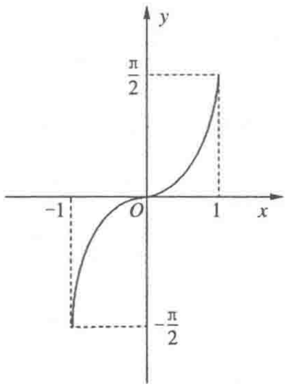
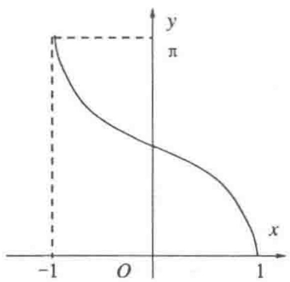
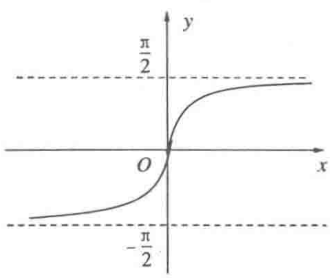
三、初等函数

1. 基本初等函数

常值函数 $y=C$(C 为常数),幂函数 $y=x^\alpha$,指数函数 $y=a^x$,对数函数 $y=\log_a x$,三角函数 $y=\sin x,\cdots,y=\csc x$ 以及反三角函数 $y=\arcsin x,\cdots,y=\arctan x$,这六大类函数称为**基本初等函数**.

在此给出三个常用反三角函数的图像及性质(见表 1-1),其他几类基本初等函数的图像及特性不再一一列出.

表 1-1　三个常用反三角函数的图像及性质

函数及其定义域、值域	图像	性质
$y=\arcsin x$ 定义域:$[-1,1]$ 值域:$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数 单调增加 有界
$y=\arccos x$ 定义域:$[-1,1]$ 值域:$[0,\pi]$		单调减少 有界
$y=\arctan x$ 定义域:$(-\infty,+\infty)$ 值域:$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数 单调增加 有界

2. 复合函数

在现实经济生活中,生产成本 C 是产量 q 的函数($C=f(q)$),而产量 q 又是时间 t 的函数($q=g(t)$),时间 t 通过产量 q 间接影响生产成本 C. 我们称函数 $C=f[g(t)]$ 是由函数 $C=f(q)$ 与 $q=g(t)$"复合"而成的函数. 下面给出复合函数的定义.

定义 1.2 设 y 是 u 的函数,$y=f(u)$,其定义域为 A. u 又是 x 的函数,$u=\varphi(x)$,其值域为 B. 如果 $B\subseteq A$,那么称以 x 为自变量的函数 $y=f[\varphi(x)]$ 是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,x 是自变量,u 称为中间变量.

例如,称函数 $y=\sin\sqrt{x}$ 是由函数 $y=\sin u$ 和 $u=\sqrt{x}$ 复合而成的,其中 u 为中间变量.

必须注意,不是任意两个函数都可复合成一个复合函数的. 例如,函数 $y=\arcsin u$ 和 $u=2+x^2$ 就不能复合成 $y=\arcsin(2+x^2)$,因为函数 $y=\arcsin u$ 的定义域 $A=[-1,1]$,而函数 $u=2+x^2$ 的值域 $B=[2,+\infty)$,不符合条件 $B\subseteq A$.

复合函数的概念可以推广到三个或更多个函数复合的情形. 例如,函数 $y=2^{\sqrt{x-1}}$ 是由 $y=2^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=x-1$ 这三个函数复合而成的,其中 u,v 都是中间变量,x 为自变量. 复合函数 $y=2^{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为 $[1,+\infty)$.

研究复合函数时,有时需要把几个函数复合成为一个函数,有时又要弄清一个复合函数是由哪几个简单函数复合而成的. 这里说的简单函数是指基本初等函数以及由它们的和、差、积、商所构成的函数.

例 2 说出下列复合函数是由哪些简单函数复合而成的,并说出其定义域.

(1) $y=\sin(\mathrm{e}^{\sqrt{x}})$;　　(2) $y=\arctan\sqrt{x^2-2x}$.

解 (1) 函数 $y=\sin(\mathrm{e}^{\sqrt{x}})$ 可以看成是由简单函数 $y=\sin u$,$u=\mathrm{e}^v$ 和 $v=\sqrt{x}$ 复合而成的,定义域为 $[0,+\infty)$.

(2) 函数 $y=\arctan\sqrt{x^2-2x}$ 可以看成是由简单函数 $y=\arctan u$,$u=\sqrt{v}$ 和 $v=x^2-2x$ 复合而成的,定义域为 $(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$.

注意:求复合函数的定义域时要考虑其复合过程中各简单函数的定义域.

3. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合步骤而构成,并能用一个数学式子表示的函数叫作**初等函数**.

例如,复合函数 $y=\sqrt{\lg(\cos^3 x)}$,多项式函数 $y=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$,有理函数 $y=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$ 等都是初等函数,而

$$f(t)=\begin{cases}30, & 0\leqslant t\leqslant 500;\\ 30+0.29(t-500), & t>500\end{cases}$$

不能用一个式子表示,不是初等函数.

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{2-x}$；　(2) $y=\sqrt{\lg(x-4)}$；　(3) $y=\dfrac{x^2-4}{x-2}$；

(4) $y=(3-x)^{\frac{1}{4}}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-9}}$；　(5) $y=\dfrac{x-4}{x^2+2x-8}$；　(6) $y=\dfrac{\ln(x^2-1)}{5-x}$；

(7) $y=\sqrt{3^x-1}$；　(8) $y=\sqrt{\sin x}$；　(9) $y=\arcsin(x+2)$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}2, & x<0;\\ x^2-1, & 0\leqslant x<1;\\ 1-x, & x\geqslant 1.\end{cases}$ 画出函数 $y=f(x)$ 的图像，并求 $f(-3)$，$f(0)$，$f(3)$，$f[f(0.5)]$ 和 $f[f(-1)]$ 的值.

3. 判断下列函数是奇函数、偶函数，还是非奇非偶函数：

(1) $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x}$；　(2) $f(x)=e^x-e^{-x}$；　(3) $f(x)=x^3\arctan x$；

(4) $f(x)=\lg(\sqrt{1+x^2}+x)$；　(5) $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$；　(6) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$.

4. 说出下列函数是由哪些简单函数复合而成的：

(1) $y=\cos^3 x$；　(2) $y=e^{\tan^3 x}$；　(3) $y=\sqrt[3]{3x^2+1}$；

(4) $y=\sin\left(\ln\dfrac{x-1}{x+1}\right)$；　(5) $y=\arcsin\sqrt{x-1}$；　(6) $y=\ln(\arctan\sqrt{x})$.

5. 求解应用题：

(1) 一个矩形窗户，它的周长是 8 m，试将窗户的面积 A 表示为宽 x 的函数.

(2) 王某 2014 年的总收入为 10 万元，如果年增长 8%，那么求 t 年后他的年总收入 R 的函数关系 $R=R(t)$，并计算出 2020 年他的年总收入.

§1.2　经济学中的常用函数

在用数学方法解决经济问题时，往往需要找出经济变量之间的函数关系，建立数学模型. 下面介绍几种常用的经济函数.

一、需求函数与供给函数

1. 需求函数

一种商品的市场需求量 q 与商品的价格 p 有着密切的关系. 通常降低商品的价格会

使需求量增加,而提高商品的价格会使需求量减少. 如果不考虑其他因素的影响,需求量 q 可以看成是价格 p 的一元函数,称为需求函数,记作

$$q=q(p).$$

一般来说,需求函数 $q=q(p)$ 为单调减函数. 常见的需求函数有以下几种类型:

(1)线性需求函数:$q=a-bp(a>0,b>0)$;

(2)二次需求函数:$q=a-bp-cp^2(a>0,b>0,c>0)$;

(3)指数需求函数:$q=ae^{-bp}(a>0,b>0)$.

需求函数 $q=q(p)$ 的反函数就是**价格函数**,记作 $p=p(q)$,也反映商品的需求量与价格的关系.

2. 供给函数

某种商品的市场供给量 S 与商品的价格 p 有着密切的关系. 通常价格上涨将刺激生产者向市场提供更多的商品;反之,价格下跌将使生产者向市场提供的商品量减少. 如果不考虑其他因素的影响,供给量 S 可以看成是价格 p 的一元函数,称为**供给函数**,记作

$$S=S(p).$$

供给函数为价格 p 的单调递增函数. 线性供给函数常表示为

$$S=-c+dp(c>0,d>0).$$

3. 市场均衡

当某种商品的市场需求量 q 与市场的供给量 S 相等时,就称**市场均衡**,这时商品的市场价格 p_0 就称为均衡价格. 当市场价格 p 大于均衡价格 p_0 时,供给量将增加,需求量将相应地减少,此时出现“供大于求”的现象;反之,当市场价格 p 低于均衡价格 p_0 时,供给量将减少,需求量将相应增加,此时出现“供不应求”的现象.

例 1 当鸡蛋收购价格为 4.5 元/kg 时,某收购站每月能收购 5000 kg. 若收购价提高 0.1 元/kg,则收购量可增加 400 kg. 求鸡蛋的线性供给函数.

解 设鸡蛋的线性供给函数为 $S=-c+dp$. 由题意可得

$$\begin{cases}5000=-c+4.5d,\\5400=-c+4.6d,\end{cases}$$

解得 $d=4000,c=13000$. 因此所求供给函数为 $S=-13000+4000p$.

例 2 已知某商品的需求函数为 $q=14.5-1.5p$,供给函数为 $S=-7.5+4p$,求该商品的均衡价格 p_0.

解 由市场均衡知 $q=S$,即

$$14.5-1.5p_0=-7.5+4p_0,$$

解得均衡价格 $p_0=4$.

二、成本函数

1. 总成本函数

生产某特定产量的产品所需的成本总额叫总成本,通常用 C 表示. 显然,C 与产量 q 有关,构成的函数关系就是总成本函数,记为 $C=C(q)$.

总成本 C 由固定成本 C_0 和可变成本 $C_1(q)$ 两部分组成. 固定成本 C_0 与产量 q 无关，如设备维修费、企业管理费等；可变成本 $C_1(q)$ 随产量 q 的增加而增加，如原材料费、动力费等. 即

$$C(q)=C_0+C_1(q).$$

总成本函数 $C(q)$ 是产量 q 的单调增函数.

2. 平均成本函数

生产 q 件产品时，单位产品的总成本称为**平均成本函数**，记作 $\overline{C}(q)$，则

$$\overline{C}(q)=\frac{C(q)}{q}.$$

例3 已知生产 q 个单位某种产品时的总成本函数为

$$C(q)=2000+\frac{q^2}{8},$$

求生产200个单位产品时的总成本和平均成本(单位:元).

解 由题意，产量为200个单位时，总成本为

$$C(200)=2000+\frac{200^2}{8}=7000(\text{元}),$$

平均成本为

$$\overline{C}(200)=\frac{7000}{200}=35(\text{元/单位}).$$

三、收入函数

产品售出后应收到的金额称为收入，通常用 R 表示. 显然，R 与销售量 q 有关，如果产品的单位售价为 p，销售量为 q，那么**收入函数**为

$$R(q)=q\cdot p(q).$$

销售单位商品的总收入称为**平均收入函数**，用 $\overline{R}(q)$ 表示，即

$$\overline{R}(q)=\frac{R(q)}{q}.$$

四、利润函数

利润是收入扣除成本后的剩余部分，它是销售量 q 的函数，称为**利润函数**，记为 $L(q)$，即

$$L(q)=R(q)-C(q).$$

由上式可以将利润函数分三种情况讨论：

(1) 当 $R(q)>C(q)$ 时，$L(q)>0$，此时企业盈利；

(2) 当 $R(q)=C(q)$ 时，$L(q)=0$，此时企业既不盈利也不亏损，即收支相抵，我们将满足 $L(q)=0$ 的点 q_0 称为**盈亏平衡点**(又称为保本点)；

(3) 当 $R(q)<C(q)$ 时，$L(q)<0$，此时企业将发生亏损.

又由 $L(q)=[R(q)-C_1(q)]-C_0$ 可知，$R(q)-C_1(q)$ 为总收入减去变动成本，称为**毛利润**(简称**毛利**)，如果再减去固定成本 C_0，就是**纯利润**(简称**纯利**).

单位产品的利润称为**平均利润**，平均利润函数为 $\overline{L}(q)=\dfrac{L(q)}{q}$.

例 4 某手表厂生产一只手表的可变成本为 15 元，每天的固定成本是 2000 元. 如果每只手表的出厂价为 20 元，那么为了不亏本，该厂每天至少应生产多少只手表？如果要盈利 1000 元，那么需要生产多少只手表？

解 设售价为 p(单位:元)，产量为 q(单位:只)，则由题意得利润为

$$L(q)=R(q)-C(q)=20q-15q-2000.$$

为了不亏本，应满足

$$L(q)=20q-15q-2000\geqslant 0,$$

解得

$$q\geqslant 400.$$

要盈利 1000 元，即有 $L(q)=20q-15q-2000=1000$，解得 $q=600$.

因此为了不亏本，该厂每天至少应生产 400 只手表；如果要盈利 1000 元，那么需要生产 600 只手表.

习题 1-2

1. 设某商品的销售收入 R 是销售量 q 的二次函数. 已知 $q=0,2,4$ 时，相应的收入 $R=0,6,8$. 试确定 R 与 q 的函数关系.

2. 已知需求函数 $q=\dfrac{100}{3}-\dfrac{2}{3}p$，供给函数 $S=-20+10p$，求市场均衡价格 p_0.

3. 某厂生产 1000 吨产品，定价为 130 元/吨. 当销售量不超过 700 吨时，按原定价出售；超过 700 吨部分按原价的九折出售. 试将销售收入 R 表示为销量 q 的函数.

4. 某种机器每台售价 500 元时，每月可销售 2000 台，每台售价 450 元时，每月可多销 400 台. 试求该机器的线性需求函数.

5. 某玩具厂每天生产 60 个玩具的总成本为 300 元，每天生产 80 个玩具的总成本为 340 元. 求线性成本函数.

6. 某洗衣机厂生产一台洗衣机的成本为 800 元，每天的固定成本是 30000 元. 如果每台洗衣机的出厂价为 1000 元，问：

(1) 每天生产多少台洗衣机才能保证工厂不亏本？

(2) 每天要生产多少台洗衣机，才能使工厂盈利 10000 元？

§1.3 极限的概念

极限是高等数学中非常重要的概念,它是学习和研究微积分的重要工具. 极限有两大类:一类是数列极限,另一类是函数的极限. 下面我们将分别对它们进行讨论.

一、数列的极限

1. 数列

按一定顺序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为**无穷数列**,简记作 $\{x_n\}$,其中 x_1 叫作数列的第1项(也称为首项),x_2 叫作数列的第2项,……,x_n 叫作数列的第 n 项,又称**通项**或**一般项**. 例如:

(1) $1, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{3^3}, \frac{1}{4^3}, \cdots, \frac{1}{n^3}, \cdots$;

(2) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, -\frac{1}{2^3}, \cdots, (-1)^{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$;

(3) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots$.

它们都是数列.

2. 数列的极限

数列可以看作是定义在正整数集合上的函数. n 取正整数且无限增大时,记作 $n \to \infty$,读作"n 趋向于无穷大".

定义 1.3 设 $\{x_n\}$ 是一个无穷数列,如果当 $n \to \infty$ 时,x_n 无限趋近于一个常数 A,那么称当 n 趋向于无穷大时,**数列** $\{x_n\}$ **的极限**为 A,记作

$$\lim_{n \to \infty} x_n = A \text{ 或 } x_n \to A (n \to \infty).$$

数列有极限时,称它收敛,否则称它发散.

$$\lim_{n \to \infty} q^n = 0 \ (q \text{ 为常数,且 } |q| < 1), \quad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0 \ (\alpha \text{ 是正常数}).$$

例如, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

二、函数的极限

1. $x \to \infty$ 时 $f(x)$ 的极限

$x \to +\infty$ 表示 x 无限增大,读作"x 趋向于正无穷大";$x \to -\infty$ 表示 x 沿 x 轴负方向取

值且 x 的绝对值无限增大,读作"x 趋向于负无穷大"; $x\to\infty$ 表示 $|x|$ 无限增大,读作"x 趋向于无穷大".

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$,如果当 $x\to\infty$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,那么就说 A 是当 x 趋向于无穷大时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

例如,从图 1-3 和图 1-4 可以看出 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$.

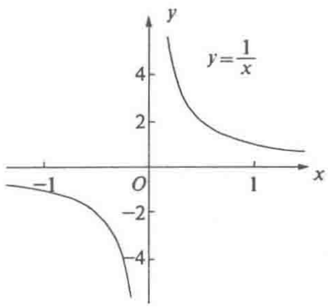


图 1-3

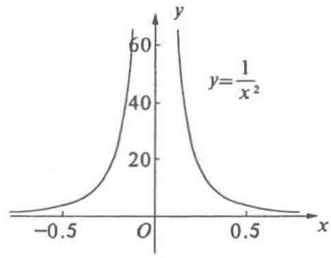


图 1-4

一般地,如果 q 是一个正有理数,那么有 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^q}=0$.

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$,如果当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,那么就说 A 是当 x 趋向于正无穷大时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to+\infty).$$

如果当 $x\to-\infty$ 时,$f(x)$ 无限趋近于一个常数 A,那么就说 A 是当 x 趋向于负无穷大时函数 $f(x)$ 的极限,记作

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to-\infty).$$

由定义 1.4 和定义 1.5 可知:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 的充要条件是 } \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=A.$$

容易知道,$\lim\limits_{x\to\infty}C=C$,$C$ 为常数.

例 1 考察 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 是否存在.

解 由图 1-5 可以看出

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$ 虽然都存在,但不相等,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

2. $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

设 δ 为正实数，称区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为点 x_0 的 **δ 邻域**，点 x_0 称为**邻域中心**，δ 称为**邻域半径**；把 $(x_0-\delta, x_0) \cup (x_0, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的**去心 δ 邻域**. 设 x_0 是一个定值，x 从 x_0 的两侧趋近于 x_0，但始终不等于 x_0，用"$x \to x_0$"表示，读作"x 趋向于 x_0".

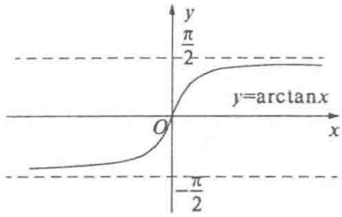


图 1-5

1) $x \to x_0$ 时 $f(x)$ 的极限

例 2 考察函数 $f(x)=\frac{x}{3}+1$ 当 $x \to 3$ 时的变化趋势.

在 $x=3$ 的左侧：

x	2.9	2.99	2.999	…	→	3
$f(x)$	1.97	1.997	1.9997	…	→	2

在 $x=3$ 的右侧：

x	3.1	3.01	3.001	…	→	3
$f(x)$	2.03	2.003	2.0003	…	→	2

由例 2 可知：当 $x \to 3$（x 不论从 3 的左侧还是右侧趋向于 3）时，函数 $f(x)=\frac{x}{3}+1$ 的值无限接近常数 2.

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域内有定义，如果当 $x \to x_0$ 时，$f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，那么就说 A 是当 x 趋向于 x_0 时函数 $f(x)$ 的**极限**，记作

$$\lim_{x \to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x) \to A(x \to x_0).$$

由常值函数 $y=C$ 和函数 $y=x$ 的图像易知：

$$\lim_{x \to x_0} C=C(C\text{ 为常数}), \quad \lim_{x \to x_0} x=x_0.$$

例 3 考察函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x \to 2$ 时的极限.

解 因为当 $x \neq 2$ 时，$\frac{x^2-4}{x-2}=x+2$，所以函数 $y=\frac{x^2-4}{x-2}$ 的图像就是函数 $y=x+2(x \neq 2)$ 的图像，如图 1-6 所示. 当 $x \to 2$ 时 $f(x)$ 有极限，且

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=4.$$

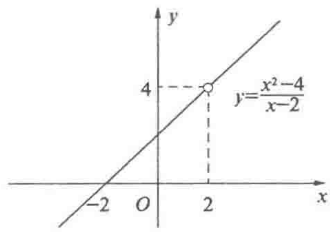


图 1-6

当函数 $y=f(x)$ 是基本初等函数时，若 x_0 是 $f(x)$ 的定义区间内部的点（端点除外），则有