NEW SOLUTION FOR THREE MATHEMATICS PROBLEMS

三个数学难题新解

谷春安 著

华南理工大学出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

三个数学难题新解

谷春安 著

華南理工大學出版社
SOUTH CHINA UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS
·广州·

图书在版编目（CIP）数据

三个数学难题新解 / 谷春安著．—广州：华南理工大学出版社，2017.8
ISBN 978-7-5623-5368-3

Ⅰ.①三…　Ⅱ.①谷…　Ⅲ.①哥德巴赫猜想-研究　Ⅳ.①O156.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第217715号

三个数学难题新解

谷春安　著

出 版 人：卢家明
出版发行：华南理工大学出版社
（广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640）
http://www.scutpress.com.cn　E-mail：scutc13@scut.edu.cn
营销部电话：020-87113487　87111048（传真）
责任编辑：吴兆强
印 刷 者：虎彩印艺股份有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16　印张：7.25　字数：119千
版　　次：2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
定　　价：30.00元

前言

本书研究的是这样三个数学问题：奇合数是怎样的数？如何精准地获取完全数？可不可以用直接的方式求证哥德巴赫猜想？书中，三个数学问题放在第二部分。

探索之初分别观察、比较、分析以上三个数学问题的多个实例后，笔者发现这些问题都与自然数的分类及其奇数的数性密切相关，于是构建并提出“终端数字和”与“自然数按照个位上的数字分为10类数”的思想方法，并把“终端数字和”作为第一部分。

由“数字和”这个概念引申而来的“终端数字和”，它既是自然数的一个属性，又是认识自然数的思想方法。在这一章里，着重阐述了自然数的终端数字和概念、计算方法、性质、意义以及四则运算法则等内容。

第二部分第一章为“奇合数的新认识”，它包括“自然数按照个位上的数字分为10类数”的方法、奇合数分别是由相应的两个奇数相乘得到的缘由、奇合数等差数列的性质、奇质数的性质、奇合数的另类判别方法等内容。

第二章“获取完全数的新方法”里，先是通过实例分析，得出“$C=2^n\cdot(2^{n+1}-1)$（n是≥2的偶数），如果（$2^{n+1}-1$）是一个质数，那么$2^n\cdot(2^{n+1}-1)$算出的数一定是完全数”的假设。接着，由小到大依次计算出若干组2^n、（$2^{n+1}-1$）、C值，进而发现完全数的规律性并找到获取完全数的精准方法。

第三章是“求证哥德巴赫猜想的新方式”，该章包括偶数表示为不同数族相应两个奇数和的方式、结构分析及

其用“•”代替奇数加式得到的所有千重等腰直角三角形里任何等腰直角三角形的垂边性质，和用反证法求证哥德巴赫猜想的过程等内容。

2017年8月

序一

判别奇合数，除看被判别数是不是含有某些质数的做法外，还有没有别的方式？对完全数的认识能否更深一层，探寻完全数的方法可否再精准有效？哥德巴赫猜想是一个应该肯定还是应该推翻的命题？这些，就是书名所指的三个数学难题。

笔者退休以后，用满满十年时间专心研究了这三个数学难题。

探索期间，笔者曾多次将较为成熟的思考撰写成文。于2016年第3期的《博览群书》刊发了《关于完全数的几个结论》一文。该文提出6除外的完全数，它们的终端数字和都是“1”，以及只有6，8氏数族里才有完全数的新论断；给出了“如果（$2^{3+4m}-1$）（$m\geqslant 0$）是质数，那么2^{2+4m}•（$2^{3+4m}-1$）算出的数一定是一个完全数；如果（$2^{5+4m}-1$）是质数，那么2^{4+4m}•（$2^{5+4m}-1$）算出的数一定是一个完全数”的两个获取完全数的精准计算公式，并期待人们根据完全数的这些特征、计算公式寻觅出新的完全数。或许是读过该文的却没有熟练的计算机技术，精通计算机技术的却未能见过此文的巧合，至今尚未有新的完全数问世。

2016年底，笔者初步写就了《哥德巴赫猜想可以这样求解》，此文先将0，2，4，6，8氏数族的200以内的偶数分别一个个地表示为不同数族相应两个奇数和；接着用“•”表示每一个奇数加式，并勾勒出它们所构成的图形——千重等腰直角三角形；然后，根据等腰直角三角形是轴对称图形的性质，用直接方式证明任何等腰直角三角

形的底边上一定至少有一个C类“●”（质数+质数加式），即大于2的所有偶数都可以表示为两个质数的和。

几经打磨之后，2017年1月《哥德巴赫猜想可以这样求解》一文发出去了。这次和之前的几篇阶段性研究文稿一样，编辑们总是以篇幅太长为由婉拒。一些机构，则始终沉默不语。太忙，无暇顾及？山寨货，半成品？见所未见，不敢担当？谋事在人，成事在天。乞求？强要？大可不必。任其自然，随遇而安吧！

读过这些论文的友人们说，将这些论文结集，不就成事了吗！还说：倘若将论文之外的东西也写进书里，则更能启示后来人。自己也觉得：书，能承载曾经的岁月，曾经的认知，曾经的艰辛，曾经的愉悦；书，能守望今后的探索，今后的快乐。这些冲动，成就了这样一本书。

三个数学难题的探索过程，都是曲折的。

研究哥德巴赫猜想时，和众多探索者一样，笔者首先想到的是将大于2的偶数N表示为P_1、P_2两个质数的和，即$N=P_1+P_2$的方式。分析$N=P_1+P_2$，可知P_1，P_2必须分别是一类质数，而2除外的质数都是奇数。据此，得出要找到能够概括一类奇质数的P_1，P_2就必须从源头上弄清奇合数是怎样得来的。

于是，先将自然数按照个位上的数字分为10类。接着，探索个位上数字为1，3，7，9的奇合数分别是由怎样的两个数相乘得到的。

接下来，由1氏数族非3奇合数生成式计算出1氏数族12 260以内的所有非3奇合数，筛选出359个质数；由3氏数族非3奇合数生成式计算出9 820以内的所有非3奇合数，筛选出287个质数；由7氏数族非3奇合数生成式计算出12 250以内的所有非3奇合数，筛选出370个质数；由9氏数族非3奇合数生成式计算出12 250以内的所有非3奇合数，筛选出362个质数。

然后，按照数族反复分析、比较质数间的数量关系，发现1，3，7，9氏数族各自的300来个质数都不能用3、5个代数式表示之。这就是说，企盼用$N=P_1+P_2$求证哥德巴赫猜想的路径是走不通的，必须另辟蹊径。

反复思考、苦苦寻路的日子里，心想能不能从偶数自身的特点去认识、找规律呢？于是按照数族大量地演算偶数表示为两个质数积的式子，发现有的偶数只能表示为2与另一个质数的积，如$26=2\times13$，$34=2\times17$，$46=2\times23$，

$38=2\times19$，这类偶数称之为二质偶数。显然这类偶数是能够根据乘法的意义证明其可以表示为两个质数和的。

然而，更多的偶数表示为质数积的式子，则有3个以上的质数，如$12=2\times2\times3$，$54=2\times3\times3\times3$，$56=2\times2\times2\times7$，$30=2\times3\times5$，$48=2\times2\times2\times2\times3$，这类偶数叫作多质偶数。再进一步探索，发现多质偶数是不能转化为二质偶数的，因而第二条思路又被堵住了。

思考到数字和是自然数的共性，深入研究数字和后，提出了自然数终端数字和的思想方法。

偶数表示为两个质数和，会不会与自然数终端数字和相关呢？

于是，大量地计算出自然数的终端数字和，发现0，1，2，3，4，5，6，7，8，9氏数族的偶数都可以按照终端数字和分为9类，并归纳出偶数表示为两个质数和的终端数字和法则。

比如终端数字和为2的偶数可以表示为$2\doteq1+1\doteq2+9\doteq3+8\doteq4+7\doteq5+6$，显然，在这些式子里，$2\doteq2+9\doteq3+8\doteq5+6$可以排除，因为它们含有一个3，6，9的奇数，剩下$2\doteq1+1\doteq4+7$两个有效式子。然而，终端数字和具有高度的概括性，终端数字和为1，4，7的奇数分别既有质数又有合数，且满足这些条件的奇数有无数个，因而这条路也是走不通的。

似乎穷尽路子时，又一次返回到第一条思路的检索上来，企盼能有新的发现。尔后，则是穷思苦想。2014年9月的一天，“偶数表示为两个质数和是不是偶数表示为两个奇数和的一个特例”的问题浮上脑海。于是，一纸接一纸地演算着0氏数族10至470各数分别表示为5氏数族相应两个奇数和、3氏与7氏数族相应两个奇数和的式子；演算着2氏数族12至342各数分别表示为1氏数族相应两个奇数和、3氏与9氏数族相应两个奇数和的式子；演算着4氏数族14至384各数分别表示为7氏数族相应两个奇数和、1氏与3氏数族相应两个奇数和的式子；演算着6氏数族16至476各数分别表示为3氏数族相应两个奇数和、7氏与9氏数族相应两个奇数和的式子；演算着8氏数族18至308各数分别表示为9氏数族相应两个奇数和、7氏与1氏数族相应两个奇数和的式子。

接下来，仔细观察这些式子，发现0氏数族的偶数表示为5氏数族相应两个奇数和的所有加式里，只有$10=5+5$，即只有10才能表示为“质数+质数”。还

看到2氏数族的32，152表示为1氏数族相应两个奇数和的式子里也没有“质数+质数”的式子。而大于12，4，16，8的0，2，4，6，8氏数族的偶数，分别表示为3氏与7氏、3氏与9氏、3氏与1氏、7氏与9氏、7氏与1氏数族相应两个奇数和的式子里至少都有一个“质数+质数”的式子。

面对那一个个偶数都能够表示为不同数族相应两个质数的和的例子，大有呼之欲出的感慨。然而，想要找到这样一个证明等式，却不知该从何处下手。

一些时日之后，心想：如果能够证明12，4，16，8除外的偶数表示为不同数族相应两个奇数和的加式组合体里一定至少有一个“质数+质数”的加式组合，则就证明了哥德巴赫猜想。或采用排除法证明偶数表示为两个奇数的加式组合体里一定没有纯“合数+合数”、纯“合数+质数”的加式组合，这也就证明了哥德巴赫猜想。

于是，先尝试着用排除法去证明。然而，经过翻来覆去的思考、演算，却始终未能证明0，2，4，6，8氏数族偶数分别表示为不同数族相应两个奇数和的式子里，一定没有纯“合数+质数”类加式组合体。此时，已是2015年的2月。

又一些时日后，分别观察0，2，4，6，8氏数族偶数表示为不同数族相应两个奇数和的式子的结构形状，发现它们分别酷似一个等腰直角三角形。于是，用“•”表示一个奇数加式的做法，将0，2，4，6，8氏数族偶数表示为不同数族相应两个奇数和的式子分别勾勒出来，得到5个点子图。再将5个点子图左起第一条垂线上的“•”、上起第一条斜线上的“•”以及每条水平线上的“•”分别顺次连接起来，把“质数+质数”的加式称为C类“•”，把这样得到的图形分别叫作0、2、4、6、8氏千重等腰直角三角形。

反复地、深沉地阅数聆图之后，要证明哥德巴赫猜想是成立的，就是要分别证明0，2，4，6，8氏千重等腰直角三角形的底边至少有一个C类“•”的念想浮现脑海。怎样去求证呢？

当发现千重等腰直角三角形中的平行四边形是自上而下一一衔接的，而且“质数+质数”加式也是不间断地自上而下延续开来的，心想这些C类“•”是不是具有传导性？然而，图上看到的千重等腰直角三角形只是冰山一角，尚未显现部分的平行四边形将是怎样的情形却不得而知，说明这样的推导是无效的。

2016年2月份以后，笔者潜心于千重等腰直角三角形的垂边与底边C类

“•”关系的研究，直至得出每个直角三角形的底边至少有一个C类“•”的证明为止，又足足用了10个月。

同样地，期盼找到一种较为简便的判别奇合数的方法的探索，也不是容易的事情。

以上三个数学难题，不少国家的数学家、数学爱好者竞相研究过或正在研究着。可以说，这些问题是一个世界性的难题。谁找到了答案，谁攻克了它，谁就有话语权。不抢先解决它，就只能成为感叹者、遗憾者。像这样关乎国家荣誉的事，我们每个人都不要指望着别人先上，自己要挺身而出。

2016年春节期间，在电话里与一位数学家说起自己探索哥德巴赫猜想之事，这位好心的数学家当即快言快语地说：哥德巴赫猜想这个课题很大，人的智慧力是有限的，趁早放弃，别影响生活质量。此番话，足见求证哥德巴赫猜想之难。

完全数、哥德巴赫猜想这些厚重的数学难题，其实就是一个数学方面的困难。什么是困难？困难就是因为“困”而难。哥德巴赫猜想久久未决，是因为探索者有“困”。因而我坚信，若能全面、深入地认识哥德巴赫猜想，这个问题就一定能够解决。

这样认识困难，才能迎难而上，才能一步步地沿着识“困”解“难”的路径勇往直前。

这里讲的认识，指的就是数学认识。所谓数学认识，是对数学现象、数学事物的感悟；是关于数学事物间内在关系的理解。数学认识是有序、逐步、刻骨铭心的；遇到想不通、道不明的问题时，务必回到认识上来；认识、认识，直到不“困”，这是获取数学知识、解决数学问题的必经之路。

三个数学难题的探索都不是轻松的，其过程漫长而又艰辛。

——那一排排质数，难觅其数韵与共性；那一串串奇合数，不能用以一概全的式子表达；那连绵不断的自然数，望不到尽头。

——那一张张纸的演算，浸透着汗水；那一本本尝试方略，镌刻着年轮；那一叠叠稿纸，印记了迷惑中探索、探索中迷惑的曲曲折折、反反复复的路径；那一次次的推倒重来，经年累月的坎坷……

然而，一列自然数的灵性，一个式子的不同寻常，一个数学现象的显露，

一个数学名词的取名，一个微不足道的发现，一个新的数学体系，一个数学词条里没有的规律……都能给人以快感与欣慰。真可谓：探索——是生活，是诗，是远方。

对于自己想做的事要耐得住寂寞、耐得住艰辛、耐得住冷嘲热讽，要有锲而不舍、百折不挠、持之以恒的意志。在三个数学难题的探索过程中，我夜以继日地演算、观察、分析、比较、归纳相关知识；不分寒暑地思考着、探索着。面对整版累篇的式子，枯燥无味的数字，推倒重来的艰辛，不知者的冷言冷语，始终不低迷，不消沉，不放弃——人生能有几回搏！

创新，是不可或缺的数学思维。数学创新，就是构建新的数学知识体系和新的数学思想方法。在求证哥德巴赫猜想的过程中，如果没有自然数分为10类之方法和数族短数列观念的建构，就很难发现求证哥德巴赫猜想的核心知识——数族短数列的基本性质；如果没有千重等腰直角三角形的搭建，就不能实现数学问题的转化，就不能最终得到人们追逐200多年却未获取的那个等式。

想问题，做学问，都必须遵循由一般到特殊的认知规律。之所以能够用直接方式找到一个等量关系，就是因为有了偶数表示为两个奇数和的探索才有了偶数的序数值等于相应“•”个数的等式，才能从一般性的演绎中找到垂边与底边C类“•”的同一关系。

270多年来，受“直接证明哥德巴赫猜想不行”的影响，人们纷纷绕着弯子去求证哥德巴赫猜想，将直接证明方式丢到九霄云外。不唯书，不唯上，走自己的路，坚持用直接方式证明哥德巴赫猜想乃笔者初心。要感谢那些先人们，他们的一句话把直接证明哥德巴赫猜想的机遇留存至今。值得互勉的是：对数学知识、数学问题、数学思想方法不要过早地下结论，以免束缚人们的思维。

数学中的一个定义，有万千世界；一个定理、公式，能包罗万象；一个方寸的千重等腰直角三角形，能表达无穷偶数都可以表示为两个质数和的大意境；一句“大于2的所有偶数都可以表示为两个质数和”的短语，却蕴含着一个厚重的数学问题。人们的居家日子、生活方式、人生符号要力求像数学那样可简可约。

将三个数学问题的新解析做到现在的份上，是坚守之使然，是循律之使然，是创新之使然。

这本薄薄的书，有十年的艰辛，五十年的积淀，还是拓荒者。它丰厚深远，弥足珍贵！

自然数分为10类数的理念，终端数字和思想方法，奇合数的判断方式，探寻完全数、求证哥德巴赫猜想的做法等都是全新的。其中的疏漏、不妥、谬误之处恳请读者指正。

谷春安

2017年5月于广州

序二

读完《三个数学难题新解》这本书，你会深深地被感动，会为作者点赞。

公元前6世纪的毕达哥斯拉是最早研究完全数的人，他已经知道6和28是完全数。完全数诞生以后，众多数学家与业余爱好者像淘金一样去寻找。时至今日，人们只发现48个完全数。

哥德巴赫猜想至今已有270多年，尽管许许多多的数学家为解决这个猜想付出了艰辛的劳动，但它依然是个既没有得到正面证明也没有被推翻的命题。

对于这两个数学难题以及试图以新的视角认识奇合数的困难程度，作为数学教师的作者不会不知道吧！

一旦涉及这些数学难题，就势必从源头思考：奇合数是怎样来的？还有何属性？完全数是怎样形成的，它们具有怎样的特质？偶数是如何表示为两个质数和的？这样，必然会有大堆的演算，必然会有续篇累版的数据和式子观察、比较、分析、整理，必然会有没完没了的推倒重来。

对于这样的“大工程”，作为数学教师的作者不会想不到吧！

退休后的人们，有的做第二职业，但一般都会选择轻松自在的退休生活。

然而，退休后的作者却担起以极具难度的三个数学问题作为课题的研究任务，过着退而不休的生活。他的这种忘我精神和不畏惧困难的品行定会感动你我他，这是其一。

其二，《三个数学难题新解》这本书，充满着创新。

要进一步认识奇合数，就必须将其置于某个新知识体系中去。于是提出了将自然数按照个位上的数字分为10类的新方法。在这样的方法下，可以分门别类地去研究奇合数，可以将奇合数的研究落实到1、3、7、9氏数族的研究上，可以分别从它们的由来、性质、判别方法上去展开研究。自然数分为10类数的做法，还为探索完全数、哥德巴赫猜想做好了准备。

创立了认识自然数的另一个思想方法——终端数字和。用终端数字和观念可以丰富自然数的分类方法，可以深化对完全数的认识，可以帮助人们认识到完全数的终端数字和都是“1”的成因。

对数族短数列概念的创新，于是就有了“所有1氏数族短数列都有1个或1个以上的质数，所有3氏数族短数列都有2个或2个以上的质数，所有7氏数族短数列都有2个或2个以上的质数，所有9氏数族短数列都有1个或者1个以上的质数”的数族短数列基本性质的重要发现。有了这些基本性质，才能得出0、2、4、6、8氏千重等腰直角三角形的垂边性质，才能实现求证哥德巴赫猜想的目标。

由于“偶数表示为两个质数和，是偶数表示为两个奇数和的一种特例”思想的确立，于是就有了0、2、4、6、8氏数族偶数分别表示为不同数族相应两个奇数和的大量演算与探索，就有了偶数与相应奇数加式间数量关系的构建。

分别将0、2、4、6、8氏数族偶数从小到大依次表示为不同数族相应两个奇数和的每个奇数加式都用“•”表示的构图——千重等腰直角三角形一一勾勒出来的做法，又是一个重要创新，它为沟通任意等腰直角三角形的垂边与底边相对应C类“•”的等价关系铺平了道路。

其三，三个难题硕硕成果。《三个数学难题新解》一书阐述的内容，其实就是“奇合数的新认识”“获取完全数的新方法”“求证哥德巴赫猜想的新方式”三个课题的成果展示。

在“奇合数是怎样生成的”问题导引下，作者分析归纳出来的“奇合数生成数表”里，一个个奇合数等差数列跃然纸上，于是就有了所有奇合数都在一定的奇合数等差数列里；能由奇合数生成式计算出来的奇数都是表内数，不能计算出来的数都是表外数；所有的表内数都是合数，所有的表外数都是质数的

推论。这样人们对奇合数的认识就深了一层，判别奇合数的方法就多了一些。

只有6、8氏数族里才有完全数；6除外的所有完全数的终端数字和一定是1；如果（$2^{3+4m}-1$）是一个质数，那么2^{2+4m}·（$2^{3+4m}-1$）算出的数一定是完全数，如果（$2^{5+4m}-1$）是一个质数，那么2^{4+4m}·（$2^{5+4m}-1$）算出的数一定是完全数等结论都是由2^n·（$2^{n+1}-1$）求得的数经过分析、比较后得出的，因而是科学的、可信服的。此处如果能够进一步得出（$2^{3+20m}-1$）、（$2^{5+20m}-1$）为质数时m值的规律，那就更加完美了。

哥德巴赫猜想属于规律性知识，它不是概念、法则这些人为“规定”的数学知识，而是某种知识体系建立后所表现出来的一种自然属性，是知识内部结构、关系的本质体现。在这样的认识下，该书将哥德巴赫猜想建立在0、2、4、6、8氏数族偶数分别表示为不同数族相应两个奇数和的5种奇数加式体系上，继而将其转化为相应的千重等腰直角三角形，使其属性蕴含其中。

具体求证“大于2的所有偶数，都可以表示为两个质数的和”的命题的求证过程是分五步进行的：第一步，建立起0氏数族偶数表示为3氏与7氏、2氏数族偶数表示为3氏与9氏、4氏数族偶数表示为3氏与1氏、6氏数族偶数表示为7氏与9氏、8氏数族偶数表示为7氏与1氏数族相应两个奇数和的架构。第二步，分析并得到0、2、4、6、8氏数族偶数分别表示为相应数族两个奇数和的奇数加式的前置奇数、后置奇数连线的性质。第三步，用“•”代替奇数加式，将0、2、4、6、8氏数族偶数表示为相应数族两个奇数和的奇数加式分别描绘成一种图形，并证明这样的图形都是等腰直角三角形。第四步，由1、3、7、9氏数族短数列的基本性质推导出0、2、4、6、8氏千重等腰直角三角形的任意垂边上（又在质数斜线上）一定有2个或2个以上（包括1个或1个以上）C类“•”的性质。第五步，根据等腰直角三角形的对称性，用反证法分别证明0、2、4、6、8氏千重等腰直角三角形里任何等腰直角三角形的底边一定至少有一个C类“•”。在这样的过程中，相关推导都是有根有据的，因而该书证明的哥德巴赫猜想的方式是科学的。诚然，也有欠完备的地方，尽管它不影响大势。

自然数按照个位上的数字分为10类数的做法以及终端数字和观念，有利于人们从多角度、全方位地认识相关数学知识，很有意义，可以考虑将它们编入

中小学数学教材。因为个人的智慧是有限的，故建议相关部门组织力量，对数族短数列概念及其基本性质、奇合数的新认识、获取完全数的新方法、用直接方式求证哥德巴赫猜想的新方式等成果做进一步研究，使之更具科学性、规范性，并适时向外推介。

该书行文平直、舒展，易读易懂。但由于书中有不少闻所未闻、见所未见的数学新事物、新方法，你不妨多读两遍。

春草

2017年7月

目录