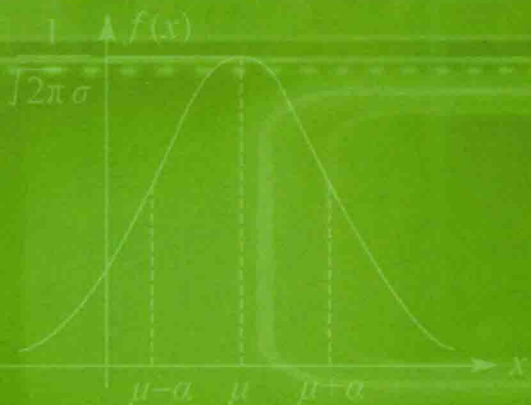


高等学校统编教材

误差理论与 测量平差基础习题集

Exercises in Error Theory and
Basis of Surveying Adjustment

左廷英 朱建军 鲍建宽 编



$$AV + B\hat{x} - f = 0$$

$$C\hat{x} - f_s = 0$$

$f(z)$

$$N_s K + B\hat{x} - f = 0$$

$$B^T K + C^T K = 0$$

$$C\hat{x} - f_s = 0$$



测绘出版社

0

$F(m, n)$

高等学校统编教材

误差理论与测量平差基础

——习题集

Exercises in Error Theory and Basis of Surveying Adjustment

左廷英 朱建军 鲍建宽 编



测绘出版社

·北京·

© 左廷英 朱建军 鲍建宽 2016

所有权利(含信息网络传播权)保留,未经许可,不得以任何方式使用。

内容简介

本习题集内容包括观测误差、衡量精度的指标、测量平差数学模型、最小二乘平差、测量平差计算、点和线的位置误差、近代平差等。本书难易结合、题型覆盖面广,且新增加与测绘新技术相关的平差内容。

本书可作为测绘类相关专业的配套教学用书,也可作为测绘类考研者及相关专业工程技术人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差基础:习题集/左廷英,朱建军,
鲍建宽编. —北京:测绘出版社,2016.6

高等学校统编教材

ISBN 978-7-5030-3869-3

I. ①误… II. ①左… ②朱… ③鲍… III. ①误差理论—高等学校—习题集②测量平差—高等学校—习题集
IV. ①O241.1-44②P207-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 034151 号

责任编辑	巩 岩	执行编辑	侯杨杨	责任印制	陈 超
封面设计	李 伟	责任校对	董玉珍		
出版发行	测绘出版社	电 话	010-83543956(发行部)		
地 址	北京市西城区三里河路 50 号		010-68531609(门市部)		
邮政编码	100045		010-68531363(编辑部)		
电子邮箱	smp@sinomaps.com	网 址	www.chinasmp.com		
印 刷	北京京华虎彩印刷有限公司	经 销	新华书店		
成品规格	184mm×260mm				
印 张	11.5	字 数	275 千字		
版 次	2016 年 6 月第 1 版	印 次	2016 年 6 月第 1 次印刷		
印 数	001-500	定 价	24.00 元		

书 号 ISBN 978-7-5030-3869-3

本书如有印装质量问题,请与我社门市部联系调换。

前 言

误差理论与测量平差基础是测绘工程本科专业的一门重要的专业基础课,它是测绘类数据处理的理论基础。为了配合误差理论与测量平差基础教学、增强读者运用所学理论知识分析和解决实际问题的能力,编写了《误差理论与测量平差基础——习题集》。本书在内容的安排上,注重由浅入深,不仅强调理论方法的应用性,更注重实践能力的培养。习题集题型包括基本概念、理论方法归纳、平差计算模型的建立、算法设计、解算技巧以及反映能力培养的综合练习题。本着少而精的原则,避免重复性,力争每一道习题都能起到举一反三的作用。所有习题均有详细解题步骤及参考答案,供学习者检核自己所学知识的掌握程度。

由于作者水平有限,加上题集计算量较大,难免有不足之处,恳请读者提供宝贵意见,以便重印或再版时修订。

习题目录

第 1 章 测量误差理论	1
1.1 观测误差与测量平差任务	1
1.2 偶然误差的统计特质	1
1.3 衡量精度的指标	1
1.4 精度、准确度与精确度.....	3
1.5 协方差传播律	3
1.6 协因数传播律与广义传播律	4
1.7 广义传播律在测量中的应用	5
1.8 综合练习	7
第 2 章 最小二乘平差	9
2.1 测量平差的数学模型	9
2.2 最小二乘平差准则.....	12
2.3 间接平差法.....	12
2.4 条件平差法.....	15
2.5 附有限制条件的条件平差法.....	16
2.6 最小二乘估计的统计特性.....	17
2.7 综合练习.....	18
第 3 章 测量控制网平差	20
3.1 三角网间接平差.....	20
3.2 三角网条件平差.....	24
3.3 导线网平差.....	28
3.4 GPS 网平差	31
3.5 回归模型平差.....	33
3.6 综合练习.....	33

第 4 章 测量平差计算	35
4.1 分组平差概述	35
4.2 间接分组平差	35
4.3 参数可变的间接分组平差	36
4.4 条件分组平差	37
4.5 法方程的解算方法	38
第 5 章 点和线的位置误差	40
5.1 点位误差	40
5.2 误差曲线与误差椭圆	41
5.3 相对误差椭圆	42
5.4 条件平差法误差椭圆的计算	43
5.5 直线元位置误差	43
5.6 综合练习	43
第 6 章 假设检验理论	46
6.1 数理统计中的基本概念	46
6.2 正态分布	46
6.3 常见的抽样分布	46
6.4 假设检验的基本概念	46
6.5 假设检验的常用方法	46
6.6 综合练习	47
第 7 章 近代测量平差	48
7.1 自由网平差	48
7.2 附加系统参数的平差方法	49
7.3 验后方差分量估计	50
7.4 粗差探测与稳健估计	50

参考答案目录

第 1 章 测量误差理论	52
1.1 观测误差与测量平差任务	52
1.2 偶然误差的统计特质	54
1.3 衡量精度的指标	54
1.4 精度、准确度与精确度	59
1.5 协方差传播律	59
1.6 协因数传播律与广义传播律	61
1.7 广义传播律在测量中的应用	67
1.8 综合练习	70
第 2 章 最小二乘平差	73
2.1 测量平差的数学模型	73
2.2 最小二乘平差准则	78
2.3 间接平差法	79
2.4 条件平差法	87
2.5 附有限制条件的条件平差法	95
2.6 最小二乘估计的统计特性	98
2.7 综合练习	100
第 3 章 测量控制网平差	105
3.1 三角网间接平差	105
3.2 三角网条件平差	111
3.3 导线网平差	122
3.4 GPS 网平差	128
3.5 回归模型平差	131
3.6 综合练习	133

第 4 章 测量平差计算	137
4.1 分组平差概述	137
4.2 间接分组平差	137
4.3 参数可变的间接分组平差	140
4.4 条件分组平差	145
4.5 法方程的解算方法	150
第 5 章 点和线的位置误差	151
5.1 点位误差	151
5.2 误差曲线与误差椭圆	152
5.3 相对误差椭圆	154
5.4 条件平差法误差椭圆的计算	157
5.5 直线元位置误差	160
5.6 综合练习	160
第 6 章 假设检验理论	163
6.1 数理统计中的基本概念	163
6.2 正态分布	163
6.3 常见的抽样分布	163
6.4 假设检验的基本概念	163
6.5 假设检验的常用方法	164
6.6 综合练习	165
第 7 章 近代测量平差	167
7.1 自由网平差	167
7.2 附加系统参数的平差方法	171
7.3 验后方差分量估计	173
7.4 粗差探测与稳健估计	174

第 1 章 测量误差理论

1.1 观测误差与测量平差任务

1. 何谓观测条件？观测结果质量与观测条件有怎样的联系？
2. 观测误差产生的原因有哪些？并详细说明。
3. 观测误差按其性质分为哪几类？各种误差对观测结果有何影响？测量工作中是如何处理的？试举例说明。
4. 何谓多余观测？多余观测为何在测量工作中又是必需的？
5. 测量平差的任务是什么？
6. 用钢尺丈量距离，有下列几种情况使得结果产生误差：
 - a. 尺长不准确；
 - b. 尺不水平；
 - c. 估读小数不准确；
 - d. 尺垂曲；
 - e. 尺端偏离直线方向

试按照要求完成：

(1) 判定误差的性质及符号；

(2) 并简要说明误差处理的方法。

7. 在水准测量中，有下列几种情况使得水准尺读数有误差：

- a. 视准轴与水准轴不平行；
- b. 仪器下沉；
- c. 读数不准确；
- d. 水准尺下沉

试按照要求完成：

(1) 判断误差的性质及符号；

(2) 并简要说明误差处理的方法。

1.2 偶然误差的统计特质

1. 何谓真误差？若某水准闭合路线高差观测值为 $\sum h$ ，则该水准路线的真误差为多少？
2. 在相同的观测条件下，大量的偶然误差有怎样的统计规律？
3. 误差曲线与观测精度之间有怎样的对应关系？与观测条件有无关系？
4. 偶然误差的数学期望是多少？依据是什么？

1.3 衡量精度的指标

1. 何谓观测精度？
2. 常用衡量精度的指标有哪些？测量平差中是如何定义各种精度指标的？在衡量精度

时,各种指标有无区别?

3. 对某三角形内角和闭合差进行了两组观测,观测结果分别为

第一组: $+0.2''$, $-0.8''$, $+1.2''$, $+2.5''$, $-0.7''$, $+1.7''$, $-2.2''$, $+0.6''$, $+2.2''$, $-0.5''$

第二组: $+0.9''$, $-2.0''$, $+1.8''$, $+2.0''$, $-0.9''$, $-1.7''$, $-2.9''$, $+0.6''$, $+0.2''$, $-0.1''$

试计算三角形内角和测量的中误差、平均误差和或然误差,并比较两组观测的精度。

4. 为了鉴定经纬仪的精度,对已知精确测定的水平角 $\alpha = 45^\circ 00' 00''$ 做 12 次同精度观测,结果为 $45^\circ 00' 06''$ 、 $44^\circ 59' 55''$ 、 $44^\circ 59' 58''$ 、 $45^\circ 00' 04''$ 、 $45^\circ 00' 03''$ 、 $45^\circ 00' 04''$ 、 $45^\circ 00' 00''$ 、 $44^\circ 59' 58''$ 、 $44^\circ 59' 59''$ 、 $44^\circ 59' 59''$ 、 $45^\circ 00' 06''$ 、 $45^\circ 00' 03''$ 。设 α 无误差,试求观测值的中误差。

5. 相对误差分为哪几种? 相对误差常用来衡量什么量的精度?

6. 已知两段距离的长度分别为 $S_1 = 100.465 \text{ m}$ 、 $S_2 = 800.350 \text{ m}$, 对应中误差分别为 $\sigma_{S_1} = \sigma_{S_2} = 4.5 \text{ cm}$, 试说明这两段距离的真误差是否相等? 它们的精度是否相等?

7. 测量中权是如何定义的? 为什么单个权无意义? 它是如何衡量观测精度的?

8. 何谓单位权? 单位权观测值? 单位权方差? 同一个平差问题中,这些值是否是唯一的? 并说明原因。

9. 同精度观测两段高差 h_1 和 h_2 , 其权分别为 $P_1 = \frac{1}{4}$ 、 $P_2 = \frac{1}{2}$, 已知 $\sigma_1 = 2 \text{ mm}$, 试求单位权中误差 σ_0 以及观测高差 h_2 的中误差 σ_2 。

10. 协方差矩阵和协因数矩阵是如何定义的? 它们是衡量什么量的何种精度指标?

11. 设有观测向量 $\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$ 的协方差矩阵 $\mathbf{D}_{LL} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, 试写出观测值 L_1 、 L_2 、 L_3 的中误差及其协方差 $\sigma_{L_1 L_2}$ 、 $\sigma_{L_1 L_3}$ 和 $\sigma_{L_2 L_3}$ 。

12. 设有观测向量 $\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$ 的协因数矩阵为 $\mathbf{Q}_{LL} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$, 试写出观测值 L_1 、 L_2 、 L_3 的权倒数以及两两相关的权倒数。

13. 权矩阵是如何定义的? 设观测向量 \mathbf{L} 的权矩阵为 $\mathbf{P}_{LL} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 试求观测值的权 P_{L_1} 和 P_{L_2} 。

14. 协方差矩阵与协因数矩阵以及权矩阵的关系如何? 设观测向量 $\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2 \quad L_3]^T$ 的协因数矩阵为 \mathbf{Q}_{LL} , 权矩阵为 \mathbf{P}_{LL} , 则协因数矩阵中主对角线元素是对应观测值的权吗? 权矩阵中主对角线元素是对应观测值的权吗?

15. 已知观测向量 $\mathbf{L} = [L_1 \quad L_2]^T$ 的权矩阵为 $\mathbf{P}_{LL} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 单位权方差 $\sigma_0^2 = 2$, 试求观测向量 \mathbf{L} 的协方差矩阵。

16. 已知观测向量的协方差矩阵为

$$\mathbf{D}_{LL} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

令单位权方差 $\sigma_0^2 = 2$ 。试求

(1) 观测向量的协因数矩阵 Q_{LL} ;

(2) 观测量的权 P_{L_1} 、 P_{L_2} 、 P_{L_3} 。

17. 已知观测向量的权矩阵为 $P_{LL} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, 设单位权方差为 $\sigma_0^2 = 8$ 。试求观测值的

权 P_{L_1} 、 P_{L_2} 以及观测向量的协因数矩阵 Q_{LL} 、协方差矩阵 D_{LL} 。

18. 已知平面一点坐标中误差为 $\sigma_x = 4$ cm、 $\sigma_y = 3$ cm。试求:

(1) 若已知坐标的协方差是 $\sigma_{xy} = 9$ cm², 写出向量 $Z = [x \ y]^T$ 的方差-协方差矩阵及坐标的相关系数 ρ_{xy} ;

(2) 若已知坐标的相关系数是 $\rho_{xy} = -0.5$, 试写出 $Z = [x \ y]^T$ 的方差-协方差矩阵;

(3) 若取 $\sigma_0^2 = 9$ cm², 试分别写出(1)和(2)中的 $Z = [x \ y]^T$ 的权矩阵和协因数矩阵。

19. 设三角形三个内角的中误差是 $\sigma_A = 2''$ 、 $\sigma_B = 4''$ 、 $\sigma_C = 8''$, 取 σ_A 为单位权中误差, 试求各角的权。

1.4 精度、准确度与精确度

1. 何谓精度? 何谓准确度? 何谓精确度? 它们各是反映何种误差影响的大小?

2. 设观测值 $L = 1\ 200.500$, 且观测值的期望和中误差分别为 $E(L) = 1\ 200.503$ 、 $\sigma_L = 0.003$ 。若观测值真值为 $\tilde{L} = 1\ 200.510$, 则观测值的系统误差是多少? 观测值的均方误差又是多少?

1.5 协方差传播律

1. 协方差传播律是用来解决什么问题的?

2. 简述协方差传播律的计算步骤。

3. 已知观测值 L_1 、 L_2 的中误差 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, 协方差为 $\sigma_{12} = 0$, 设由观测值构成函数 X 和 Y 分别为 $X = 3L_1 - 9$ 、 $Y = 2L_1 - L_2$, 试求 X 、 Y 的中误差和协方差。

4. 水准测量时, 设前后视读数中误差均为 1 mm, 则一测站观测高差的中误差为多少?

5. 等精度独立观测三角形三个内角 β_1 、 β_2 、 β_3 , 设观测中误差为 $\sigma = 2''$ 。

试求: (1) 三个内角构成观测向量的协方差矩阵 D_{LL} ;

(2) 三角形内角和闭合差的中误差。

6. 设由一个待定点构成的闭合水准路线, 其两段水准路线高差观测值中误差均为 3.1 mm, 且为独立观测。试求经过闭合差调整后的两段水准路线观测高差的中误差。

7. 某观测向量 $L = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$, 其协方差矩阵为

$$D_{LL} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

设有函数 $F_1 = L_1 + L_2 + L_3$ 、 $F_2 = 2L_1 - 5L_3$ 。试求两个函数的方差 σ_{F_1} 、 σ_{F_2} 及互协方差 $\sigma_{F_1 F_2}$ 。

8. 设观测值向量 \mathbf{X} 的协方差矩阵为 \mathbf{D}_{XX} , \mathbf{X} 的线性函数为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{H}_0, \mathbf{Z} = \mathbf{U}\mathbf{Y} + \mathbf{U}_0$$

式中, \mathbf{H} 、 \mathbf{U} 是系数矩阵, \mathbf{H}_0 、 \mathbf{U}_0 是常数向量。求协方差矩阵 \mathbf{D}_{YY} 、 \mathbf{D}_{ZZ} 、 \mathbf{D}_{XY} 、 \mathbf{D}_{XZ} 、 \mathbf{D}_{YZ} 。

9. 证明: 等精度独立观测值的算术平均值的中误差等于 $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 。其中, n 为观测次数, σ 为一次观测中误差。

1.6 协因数传播律与广义传播律

1. 协因数传播律是用来解决什么问题的? 与协方差传播律有何关系?

2. 何谓误差传播律? 何谓权倒数传播律? 能否用二者代替广义传播律?

3. 简述协因数传播律的计算步骤。

4. 应用广义传播律时, 当观测值的函数是非线性形式时, 其计算步骤与线性函数的计算有哪些不同?

5. 设某量独立观测 n 次, 已知观测值 L_1, L_2, \dots, L_n 的权分别为 P_1, P_2, \dots, P_n 。试求观测值的加权平均值的权。

6. 已知观测向量 \mathbf{L} 的协因数矩阵为

$$\mathbf{Q}_{LL} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

设有函数 $X = L_1 + 2L_2 + 3L_3$ 、 $Y = 2L_1 - L_3$ 。试求函数 X 和 Y 的协因数 Q_{XX} 、 Q_{YY} 及互协因数 Q_{XY} 。

7. 下列函数中的 $L_i (i=1, 2, 3)$ 均为等精度独立观测值, 设其权为 P 。试分别求各函数 X 的协因数。

$$(1) X = \frac{1}{2}L_1 - L_2 + 2L_3;$$

$$(2) X = 2L_1 + 2L_2;$$

$$(3) X = L_1 L_2;$$

$$(4) X = L_1^2 + L_2 L_3。$$

8. 已知观测向量 $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2]^T$ 的协方差矩阵为 $\mathbf{D}_{LL} = \begin{bmatrix} 2.8 & -0.2 \\ -0.2 & 3.5 \end{bmatrix}$, 设有观测值函数 $X = L_1 - 0.2L_2$ 、 $Y = L_1^2 + 2L_2 + 1$, 试求 σ_X 、 σ_Y 、 σ_{XY} 。

9. 已知观测向量 $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ 的权矩阵为 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, 观测值为 $L_1 = 1.2$ 、 $L_2 = 3$ 、 $L_3 = 4$ 。设有函数 $X = L_1 + 2L_2 - 4$ 、 $Y = 2L_1^2 - L_2 + L_2 L_3 + 8$ 。试求函数 X 和 Y 的权。

10. 设有同精度独立观测值向量 $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2 \ L_3]^T$ 的函数为 $Y_1 = S_{AB} \frac{\sin L_1}{\sin L_2}$ 、 $Y_2 = \alpha_{AB} -$

$L_2 - L_3 + 180^\circ$, 式中 α_{AB} 和 S_{AB} 为无误差的已知方位角和已知边长, 设测角中误差 $\sigma = 1''$, 试求 $\sigma_{Y_1}^2$ 、 $\sigma_{Y_2}^2$ 及其协方差 $\sigma_{Y_1 Y_2}$ 。

11. 如图 1.1 所示, $\triangle ABC$ 中测得一个角 $\angle A$ 和两条边长 b 、 c , 设观测值的中误差分别为 σ_A 、 σ_a 、 σ_b , 试求三角形面积的中误差 σ_s 。

12. 设有观测值向量 \mathbf{X} 的协方差矩阵为 \mathbf{D}_{XX} , 协因数矩阵为 \mathbf{Q}_{XX} 。 \mathbf{X} 的线性函数为

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{H}_0, \quad \mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{U}\mathbf{Y} + \mathbf{U}_0$$

式中, \mathbf{H} 、 \mathbf{U} 是系数矩阵, \mathbf{H}_0 、 \mathbf{U}_0 是常数向量。求协因数矩阵 \mathbf{Q}_{YY} 、 \mathbf{Q}_{ZZ} 、 \mathbf{Q}_{YZ} 和协方差矩阵 \mathbf{D}_{YY} 、 \mathbf{D}_{ZZ} 、 \mathbf{D}_{YZ} 。

13. 设等精度独立观测向量 \mathbf{L} 组成如下两个方程

$$\mathbf{V} = \mathbf{B}\mathbf{X} - \mathbf{L}$$

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B}\mathbf{X} - \mathbf{B}^T \mathbf{L} = 0$$

式中, \mathbf{B} 是常系数矩阵, 且 $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ 是可逆矩阵, \mathbf{X} 是未知参数, \mathbf{V} 是观测值 \mathbf{L} 的改正数, 即 $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \mathbf{V}$ 。试完成:

(1) 求协因数矩阵 \mathbf{Q}_{XX} 、 $\mathbf{Q}_{L\hat{L}}$;

(2) 证明未知参数向量 \mathbf{X} 与改正数向量 \mathbf{V} 、改正数向量 \mathbf{V} 与观测值平差值向量 $\hat{\mathbf{L}}$ 的相关性。

14. 如图 1.2 所示的水准网中, 设各路线长度为 S_i , 观测高差为 h_i ($i = 1, 2, \dots, 8$)。试求:

(1) 各闭合环高差闭合差 f_i ($i = 1, 2, 3$) 的协因数矩阵 \mathbf{Q}_{ff} ;

(2) 各闭合环高差闭合差的权。

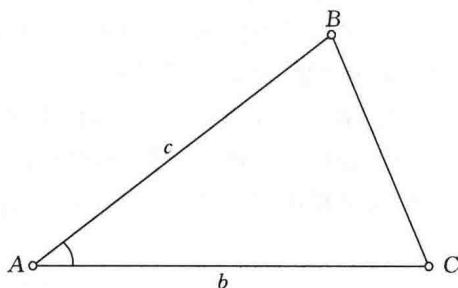


图 1.1

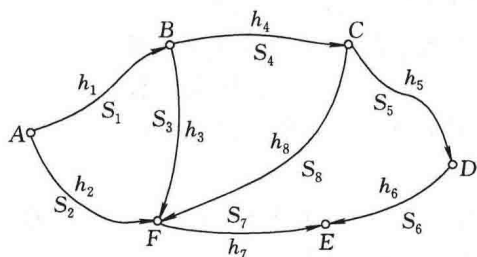


图 1.2

1.7 广义传播律在测量中的应用

1. 证明: 水准测量中, 常用计算观测高差中误差的计算公式为 $\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{N} \sigma_{\text{站}}$ 、 $\sigma_{h_{AB}} = \sqrt{S} \sigma_{\text{km}}$, 并说明这两个公式的应用前提条件。

2. 水准测量中常用定权的两个公式是什么? 应用这两个常用公式的前提条件是什么?

3. 在相同观测条件下, 水准测量测定了三角形的三个角顶点 A 、 B 、 C 之间的高差, 设三段水准路线长度分别为 $S_1 = 10 \text{ km}$ 、 $S_2 = 8 \text{ km}$ 、 $S_3 = 4 \text{ km}$, 试求各段观测高差之权及其单位权中误差。

4. 上题中,若令 80 km 的高差观测值权为单位权观测,试求各段观测高差之权及其单位权中误差。

5. 对角度 β_1 观测 4 测回,取平均值得 \bar{X}_1 值,设每测回观测中误差均为 $4''$ 。对角度 β_2 观测 9 测回,取平均值得 \bar{X}_2 值,设每测回观测中误差均为 $4''$ 。试计算平均值 \bar{X}_1 、 \bar{X}_2 的权。

6. 电磁波测距时,距离测量的中误差为 $\sigma_i = a + bs_i$,其中 a 为固定误差, b 为比例误差, s_i 为测量距离值,则距离测量权为多少?

7. 某一角度测 6 个测回,得中误差为 $0.84''$,问再增加多少个测回其中误差为 $0.38''$?

8. 如图 1.3 所示的附合水准路线,设每千米观测高差中误差为 6 mm,为使平差后线路中点 P 的高程中误差不大于 10 mm,则该路线长度最多可以达到多少千米?

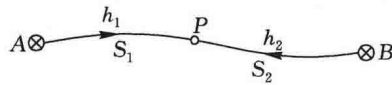


图 1.3

9. 水准测量中,设每站观测高差的中误差均为 10 mm,欲使从已知点推求待定点的高程中误差不大于 40 mm,则其水准路线应该设多少站?

10. 如图 1.4 所示, A 、 B 为已知点,为了计算 P 点坐标,由已知点 A 测量了距离 s 和水平角度 β 。观测值分别为 $s = 130.050$ m、 $\beta = 30^\circ 20'$ 。观测值的中误差分别为 $\sigma_s = 0.02$ m、 $\sigma_\beta = 1'$ 。设已知点坐标无误差,试求待求点 P 的点位中误差 σ_p 。(提示: $\sigma_p = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_u^2}$, σ_s 为纵向中误差, σ_u 为横向中误差)

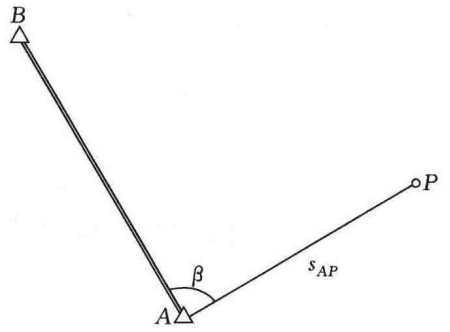


图 1.4

11. 三角高程测量中,两点间高差计算公式为 $h_{AB} = S_{AB} \tan \tau + i_A - l_B$ 。其中, S 为水平距离, τ 为竖直角观测值, i 是仪器高, l 是目标读数。假设仪器高、目标高读数误差忽略不计。设距离测量中误差为 σ_s , 角度测量中误差为 σ_τ , 试求高差观测值的中误差。

12. 如图 1.5 所示的支导线,其中 A 点坐标和方位角 α_0 均无误差,角度观测值为 β_1 、 β_2 ,其中误差均为 σ_β ;边长观测值为 S_1 、 S_2 ,其中误差均为 σ_s 。试写出:

(1) P_2 点坐标方差的计算公式;

(2) P_2 点位方差的计算公式。

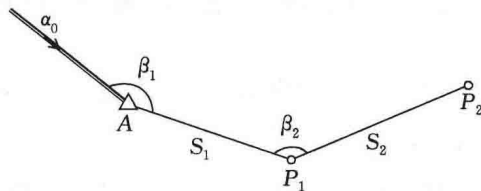


图 1.5

13. 某一水准路线分三段进行测量,每段均变动仪器高观测两次,观测值见表 1.1。

表 1.1

测段	高差/m		路线长/km
	h'_i	h''_i	
1	5.580	5.586	2.1
2	-2.345	-2.342	4.5
3	1.450	1.455	1.4

- 试求:(1)每千米观测高差的中误差;
 (2)各段一次观测高差的中误差;
 (3)各段高差平均值的中误差;
 (4)全长一次观测高差中误差;
 (5)全长高差平均值的中误差。

1.8 综合练习

- 观测误差是不可避免存在的。测量中是如何处理这些观测误差的? 试举例说明。
- 常用衡量单个量精度的绝对指标是(), 相对指标是(); 衡量向量的绝对指标是(), 衡量向量的相对指标是()。
- 对某一距离进行了两组观测, 距离观测值见表 1.2。

表 1.2

L_1/m	100.456	100.450	100.442	100.450	100.449	100.453	100.460	100.459	100.468
L_2/m	100.450	100.448	100.459	100.445	100.456	100.453	100.450	100.446	100.445

- 试求:(1)两组观测值间的相关系数;
 (2)观测值向量 $\mathbf{L} = [L_1 \ L_2]^T$ 的协方差矩阵 \mathbf{D}_{LL} 。
4. 已知观测向量的协方差矩阵为

$$\mathbf{D}_{LL} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

设单位权方差 $\sigma_0^2 = 2$ 。设有函数 $\varphi_1 = L_1 - 2L_2 + 4L_3 - 10$ 、 $\varphi_2 = 3L_1L_3$, 试求:

- 观测值的中误差 σ_{L_1} 、 σ_{L_2} 、 σ_{L_3} ;
- 函数中误差 σ_{φ_1} 、 σ_{φ_2} 及协方差 $\sigma_{\varphi_1\varphi_2}$;
- 函数向量 $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2]^T$ 的协因数矩阵 $\mathbf{Q}_{\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\varphi}}$ 。

5. 三角高程测量中, 设仪器高及目标高的测量中误差均为 1 mm, 竖直角测量值 $\tau = 16^\circ 30' 36''$, 中误差 $\sigma_\tau = 1.5''$, 两点间斜距测量值为 180.300 m, 中误差 $\sigma_s = 2.5$ mm, 试求两点间高差观测值的中误差。

6. 如图 1.6 所示的附合水准路线, 观测高差为 h_1 、 h_2 、 h_3 , 水准路线长度分别为 2.1 km、3.5 km 和 4.0 km。设每千米水准路线观测高差中误差为 $\sigma_{km} = 2.0$ mm, 试求待定点高程平差值的中误差 $\hat{\sigma}_{H_1}$ 、 $\hat{\sigma}_{H_2}$ 。

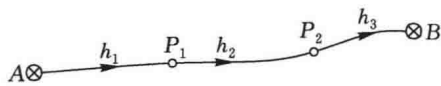


图 1.6

7. 设由已知水准点 A 、 B 、 C 、 D 向待定点 P 进行水准测量(图 1.7), 得独立观测高差值及其相应的路线长度。已知高程

$$H_A = 217.250 \text{ m}, H_B = 210.450 \text{ m}, H_C = 215.000 \text{ m}, H_D = 218.000 \text{ m}$$

观测高差及其路线长度为

$$h_1 = 1.092 \text{ m}, S_1 = 3 \text{ km}$$

$$h_2 = 7.858 \text{ m}, S_2 = 2 \text{ km}$$

$$h_3 = 3.295 \text{ m}, S_3 = 2 \text{ km}$$

$$h_4 = 0.361 \text{ m}, S_4 = 6 \text{ km}$$

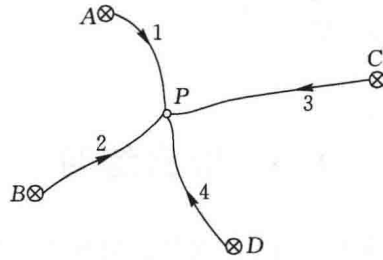


图 1.7

取权为 2 的观测高差其相应的中误差为 0.030 m , 试求 P 点高程及其中误差。

第 2 章 最小二乘平差

2.1 测量平差的数学模型

1. 什么情况下进行测量平差？测量平差中的几何模型的必要观测量与什么有关？
2. 何谓必要观测数？必要观测数的特性是什么？
3. 何谓测量平差的函数模型和随机模型？分别表示哪些量之间的什么关系？
4. 测量平差函数模型的类型分为哪几种？归纳各种平差函数模型的特点（对参数、模型个数及要求等方面论述）。
5. 试确定如图 2.1 所示的各图形中的观测值个数、必要观测数和多余观测数。

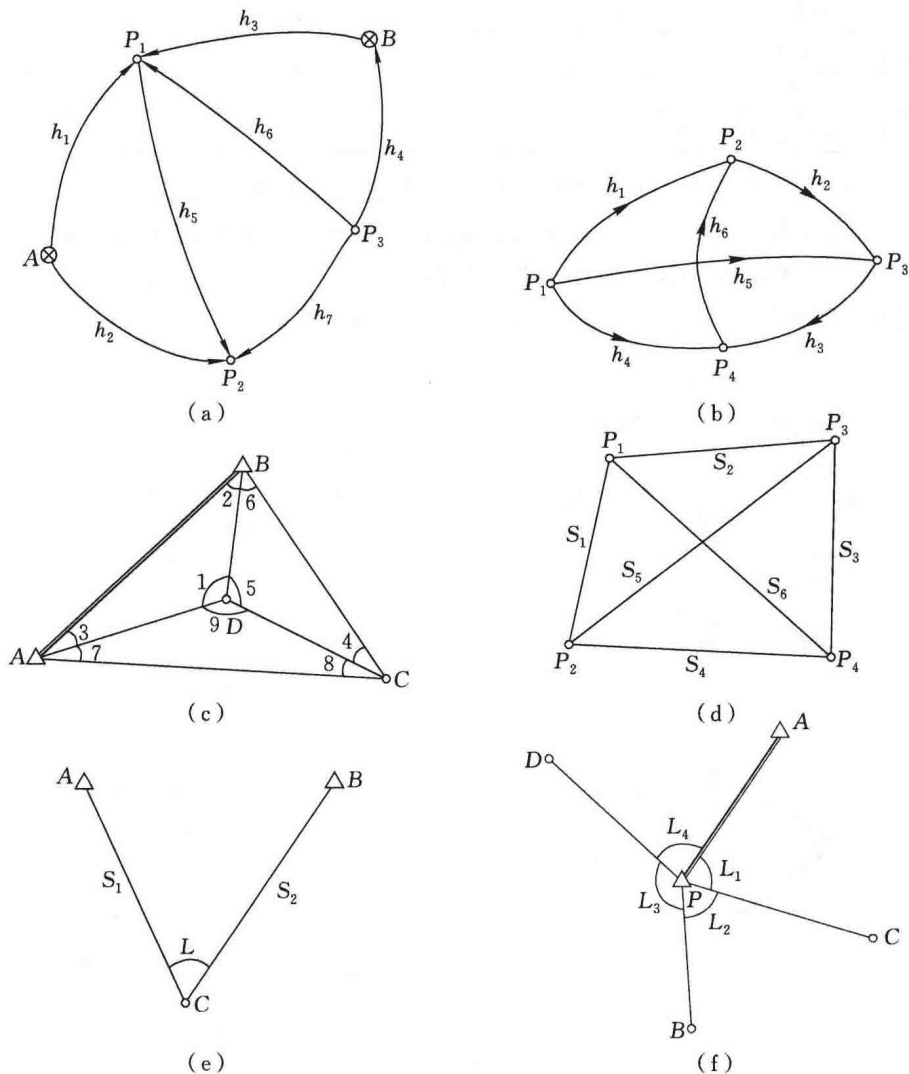


图 2.1