现代数学基础丛书 166

交换代数与同调代数

（第二版）

李克正 著

科学出版社

现代

交换代数与同调代数

(第二版)

李克正　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

交换代数与同调代数是代数学中的重要领域，也是代数几何、代数数论等领域的强大工具，因此是很多不同方向的研究生和研究人员所需要甚至必备的。

本书针对各方面读者的基本需要，内容包括多重线性代数、交换代数(包括“硬交换代数”)与同调代数等方面的基本理论，在取材上只注意这些学科中最重要且实用的基本内容，而不涉及很专门的课题。在内容的安排上，采取了“低起点，高坡度”的方式。在预备知识方面，只假定读者学过群论和域论(包括伽罗华理论)，而从环的基本理论讲起。每一章后面都有若干习题，标有星号的习题在附录 B 中有解答或提示。

本书适合作为高等院校数学及相关专业的教科书或参考书。

图书在版编目(CIP)数据

交换代数与同调代数/李克正著. —2 版. —北京: 科学出版社, 2017. 3
(现代数学基础丛书; 166)
ISBN 978-7-03-051940-5

I. ①交… II. ①李… III. ①交换环 ②同调代数 IV. ①O187.3 ②O154

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 040539 号

责任编辑: 陈玉琢 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com
北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 3 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2017 年 3 月第一次印刷 印张: 12 3/4
字数: 240 000

定价: 78.00 元
(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用。许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益。

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着。1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会。当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述。据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷。它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用。

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍。既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新。

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科。我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域。

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动。它获得了广大读者的喜爱。我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献。

杨　乐

2003年8月

第二版前言

本书第一版于 1998 年出版, 1999 年第二次印刷时作了一些小修订。此后不久脱销, 但一直有持续的需求, 现在读者一般是用影印书或扫描版。多年来读者对本书有很多反馈意见, 且学科的发展也提出一些新的需求, 因此很有必要作全面的修订。

在过去的 17 年中, 多个学校采用了本书作为教科书或教学参考书, 例如，林节玄 (T. Y. Lam) 教授在美国加利福尼亚大学伯克莱分校, 黎景辉 (K. F. Lai) 教授在澳大利亚悉尼大学, 徐克舰教授在青岛大学教学中都使用本书, 均给予好评。仅徐克舰教授的讨论班就对本书指出数十处错误 (大多数为印刷错误)。特别是首都师范大学的研究生在交换代数讨论班中的报告质量相当高, 对于作者很有启发, 他们写的某些文章 (如 [27], [28], [29]) 可以作为本书的进一步读物; 而且他们严格地审读了本书第一版, 指出了很多缺点和错误。这些反馈意见对于作者都有很大的帮助。

第二版主要有下列修订:

(1) 根据徐飞教授的建议, 在第 II 章增加了“赋值与赋值环”一节。

(2) 鉴于近年来张量范畴日益受到重视, 增加了这方面的内容。在第 XII 章增加了“阿贝尔张量范畴”一节, 而将第 XIII.5 节改为对于一般张量函子的同调, 该节中原有的关于模的张量函子的内容则移到第 XIV 章作为第 1 节。

(3) 将哲学性的报告“同调代数的起源和发展”收入本书作为一个附录, 其内容并不是正文的直接需要, 但有助于对于同调代数的思想的理解。

(4) 某些章节增补了一些内容, 如 IX.3 节中的 Hensel 引理。

(5) 某些处理有所改动, 如命题 II.2.2 的证明。

(6) 增补了一些习题, 并相应地增补了一些习题解答。

(7) 对于所发现的原版中的错误均作了更正, 并作了全面的校订。

作者希望借此机会对所有提供帮助和建议的专家和学生表示感谢。

李克正

2016 年 9 月 5 日于北京

第一版前言

本书是由作者在中国科技大学研究生院讲授“近世代数 (II)”课程的讲义以及在南开大学代数几何年等学术活动中的有关讲义修订而成。写这本书的动因是学生对教科书一直有强烈的需求, 而在这方面又很难找到一本较为适合我国学生的外文教材。出了油印讲义后, 已使用过三年, 并给若干学校用作参考。现在修订出版, 目的是提供一本较为适合我国硕士和博士研究生的基础课教科书, 其中包括了学习代数几何与代数数论 (例如 [12]) 所必需的多重线性代数、交换代数和同调代数基础 (但对于做交换代数方面的研究工作则是远远不够的)。

基于上述目的, 在取材上只注意这些学科中最重要且实用的基本内容, 而不涉及很专门的课题。在多重线性代数方面, 有不少教科书可供参考, 但在本书中作了较系统的整理。在交换代数方面, 尤其是所谓“硬交换代数”方面, 作者认为松村英之的书 [22] 无论在取材上还是处理上都堪称上乘。本书在取材上很受 [22] 的影响, 但在处理上则有较大的不同, 这一方面是因为要采取尽可能简明的处理方式 (读者不难看到这一点), 另一方面也是出于我国学生的具体情况。例如, 国外的交换代数教材 (即使像 [1] 这样较为初等的) 常假定读者已熟悉代数同调论, 这使我国很多学生感到困难。因而本书前面有几章是“初等的”交换代数, 其中完全不用同调, 而把必须用同调的交换代数放在同调代数的后面。此外这方面还受到 A. Ogus 教授的代数几何课程的影响 (特别是第 XVI 章)。至于在同调代数方面, 作者尚未见到一本像 [22] 这样既精炼又现代化的书可供参考, 在这方面主要是参考了 A. Ogus 教授的同调代数课程讲义, 而对于关键的“蛇形引理”采用了作者的处理方式, 这也是为了使这部分内容尽可能简明。(读者可能会发现一般的同调代数教科书所包含的内容都远比本书多, 但所多的往往都是较为专门的内容, 而这是本书不拟涉及的。)

在教材的安排上, 采取了“低起点, 高坡度”的方式。在预备知识方面, 只假定读者学过群论和域论 (包括伽罗华理论), 而从环的基本理论讲起。前 5 章的内容基本上是一般抽象代数基础课程中的交换环论, 已学过这方面内容的读者当然不必细读。另一方面, 在正文中一般都是“主干”内容, 即最主要的且一般在后文中要用到的内容, 而一些重要的但在后文中用不到的内容则常放在习题中。

每一章后面都有若干习题, 这些习题是作者在教学中积累的。其中有些是作者的研究工作, 如习题 VI.5 的证明和习题 XVI.10。标有星号的习题在附录 C 中有解答或提示。

本书中的数学用语均参照全国自然科学名词审定委员会 1993 年公布的《数学

名词》, 对《数学名词》中未收入的词语一般采用一些暂定译名, 但对其中未收入的人名则保留英文原名。

作者希望借此机会感谢 A. Ogus 教授和不幸逝世的松村英之教授的教诲, 他们的学术思想不仅影响了作者, 也影响到本书的写作。

李克正

1996 年 9 月 5 日于北京

目　　录

I 环与模

1. 环与代数

一个 (结合) 环是一个具有两种运算 (加法和乘法) 的集合 R, 按加法为阿贝尔群, 满足如下条件 (其中 r, r', r'' 为 R 的任意元):

i) $(r'+r'')r = r'r + r''r$, $r(r'+r'') = rr' + rr''$ (分配律);

ii) $(rr')r'' = r(r'r'')$ (乘法结合律)。

环 R 称作交换的, 如果它还满足交换律

iii) $rr' = r'r$。

称为有单位元的, 如果存在单位元 $1 \in R$, 使得

iv) $1r = r1 = r$。

(显然此时单位元是唯一的。)

例如, 体都是有单位元的环, 域都是交换环。有理数域 $\mathbb{Q}$, 实数域 $\mathbb{R}$ 和复数域 $\mathbb{C}$ 之间有包含关系 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$。一般地, 若环 R 的非空子集 R' 在减法和乘法下封闭, 则 R' 称为 R 的一个子环, 而称 R 为 R' 的扩环; 此时对任意子集 $S \subset R'$ 可以定义 S 在 R 上生成的扩环 $R[S] \subset R'$, 即 R (在 R' 中) 的包含 S 的最小扩环 (参看习题 I.4)。

例 1.1. i) 整数环 $\mathbb{Z}$ 的子环 $2\mathbb{Z}$ 没有单位元。

ii) 任一集合 S 上的所有实值函数全体按加法和乘法组成一个有单位元的交换环。

iii) 对两个环 R 与 R' 可以定义直积 $R \times R'$ (加法和乘法按分量)。

iv) 对任一正整数 n, $R = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 是一个有限的有单位元的交换环。特别地, 对任意素数 p, $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 为一个有限域。若 n 非素数, 例如 $n = 18$, 则在 R 中有两个非零元 $\bar{2}$ 和 $\bar{9}$ 的积是 0, 此外有 $\bar{6}^2 = 0$。

两个环之间的一个映射 $f : R \to R'$ 称作 (环) 同态, 如果它与加法和乘法交换, 即 $f(r+r') = f(r) + f(r')$, $f(rr') = f(r)f(r')$ (若我们讨论有单位元的环, 则我们还要求 $f(1) = 1$)。此时 R' 连同 f 称作一个 R-代数。若 f 还是一一映射, 则说 f

是 (环) 同构。与群论类似, 我们可以定义自同态、自同构、单同态、满同态等。设 $g: R \to R''$ 是另一个环同态 (因而 R'' 也是 R-代数), 一个环同态 $\phi: R' \to R''$ 称作一个 R-**代数同态**, 如果 $\phi \circ f = g$。

例 1.2. i) 对任一环 R 可以定义 R 上的 $n \times n$ 矩阵代数 $M_n(R)$, 当 $R = \mathbb{R}$, $n > 1$ 时这是一个典型的非交换环。

ii) 对任一环 R 可以定义 R 上的**多项式代数** $R[x]$, 它由所有以 R 的元为系数的多项式组成。若 R 是交换的, 则 $R[x]$ 也是交换的。还可以定义多个变元的多项式环。次数、常数项、首一多项式、不可约多项式、零点等术语都可以用于 $R[x]$。用归纳法我们可以在 R 上建立多个变元的多项式代数。

iii) 定义一个 (非交换) $\mathbb{R}$-代数 Q 如下: 作为 $\mathbb{R}$-线性空间, Q 具有基 $\{1, i, j, k\}$, 且 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$。Q 称作 $\mathbb{R}$ 上的**四元数代数**。不难验证 Q 是一个体 (习题 2.i))。

对任一 R-代数 R' 及任一元 $a \in R'$, 存在唯一的 R-代数同态 $f: R[x] \to R'$ 使得 $f(x) = a$。这称作多项式代数的**泛性**。

例 1.3. 在交换环 R 上可以 (用拉普拉斯展开式) 定义行列式。设 $A = (a_{ij})$ 为 R 上的 $n \times n$-矩阵 $(n > 1)$, A_{ij} 为 A 的 (i, j)-代数余子式, 则 $\det(A_{ij}) = (\det A)^{n-1}$。证明很简单: 若 $R = \mathbb{Z}$ 而 $a_{ij} = x_{ij}$ 为独立变元, 这是线性代数中熟知的恒等式; 任意 R 都是 $\mathbb{Z}$-代数, 由多元多项式代数的泛性, 存在 $\mathbb{Z}$-代数同态 $f: \mathbb{Z}[x_{ij} | 1 \leqslant i, j \leqslant n] \to R$ 使得 $f(x_{ij}) = a_{ij}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 这就给出 R 中的等式

$$\det(A_{ij}) = (\det A)^{n-1}$$

设 R 为有单位元的交换环, $a \in R$。若存在 $b \in R$ 使得 $ab = 1$, 则称 a 为 R 的**单位**; 若 $a \neq 0$ 且存在非零元 $b \in R$ 使 $ab = 0$, 则称 a 为 R 的**零因子**; 特别地, 若 $a \neq 0$ 但存在正整数 n 使 $a^n = 0$, 则称 a 是**幂零的** (参看例 1.1.iv)。若 R 中没有零因子且 $1 \neq 0$, 则称 R 为**整环**。此时我们可以把 R 按如下方法嵌入一个域 K。在集合 $R \times (R - \{0\})$ 中定义一个关系 $\sim$: $(r, s) \sim (r', s')$ 当且仅当 $rs' = sr'$, 易见 $\sim$ 是一个等价关系。令 $K = R \times (R - \{0\}) / \sim$, 则不难验证 R 的环结构诱导 K 的一个域结构, 而 $r \mapsto (r, 1)$ 将 R 等同于 K 的一个子环, 使得 K 的元都是 R 中元的商。我们称 K 为 R 的**商域**, 记为 $K = \mathrm{q.f.}(R)$。

2. 理想

设 $f: R \to R'$ 为环同态, 则 f 的**核** $I = \ker(f) = \{a \in R | f(a) = 0\}$ 为 R 的加法子群, 且满足

$(*)$ 对任意 $r \in R, a \in I$ 都有 $ar, ra \in I$。

满足 $(*)$ 的加法子群 $I \subset R$ 称为 R 的**理想**。(更一般地, 若对任意 $r \in R, a \in I$ 都有 $ra \in I$, 则称 I 为**左理想**, 类似地可以定义**右理想**。)

设 I 为环 R 的理想, 则易见加法商群 R/I 具有诱导的环结构 ($a+I$ 与 $b+I$ 的积为 $ab+I$), 称作 R 模 I 的**剩余类环**。**投射** $p: R \to R/I$ ($p(r) = r+I$) 是环的满同态 (从而可以将 R/I 看作一个 R-代数), 且显然 $\ker(p) = I$。若 I 是同态 $f: R \to R'$ 的核, 则 f 诱导一个单同态 $R/I \hookrightarrow R'$。

以下设 R 为有单位元的交换环。若 I, J 为 R 的理想, 则 $I + J, IJ, I \cap J$ 和 $(I : J) = \{a \in R | aJ \subset I\}$ 都是 R 的理想。包含一个子集 $S \subset R$ 的所有理想的交是一个理想, 称作 **S 生成的理想**, 记作 (S)。作为一个加法群, (S) 由所有 rs ($r \in R, s \in S$) 生成。

一个理想 $P \subsetneq R$ 称作**素理想**, 如果 R/P 是整环; 称作**极大理想**, 如果 R 中除 R 和 P 外没有包含 P 的理想。易见一个理想 I 是极大的当且仅当 R/I 只有两个理想 R/I 与 0, 换言之 R/I 是域。故极大理想都是素理想。记 $\mathrm{Spec}(R)$ 为 R 中素理想全体的集合, 称为 R 的**谱**。若 A 也是有单位元的交换环且 $f: R \to A$ 为同态, 则对任意理想 $I \subset A$, $f^{-1}(I)$ 为 R 的理想, 且 f 诱导单射同态 $R/f^{-1}(I) \hookrightarrow A/I$; 特别地, 若 I 为素理想, 则 $R/f^{-1}(I)$ 是整环 (因为它同构于整环 A/I 的子环), 即 $f^{-1}(I)$ 为素理想, 故 f 诱导映射

$$\hat{f}: \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(R)$$

$$P \mapsto f^{-1}(P)$$

若 $a \in R$ 不是单位, 则由佐恩引理存在极大理想包含 a。

一个元 $a \in R$ 称为**素的**, 如果 (a) 是素理想。若 R 为整环且每个非零非单位元都能分解成素元素的积, 则称 R 为**唯一因子分解整环** (简称 UFD)。若 R 是整环且每个理想都是由一个元素生成的, 则称 R 为**主理想环** (简称 PID), 例如 $\mathbb{Z}$ 和任一域 K 上的多项式环 $K[x]$ 都是主理想环。任一 PID 都是 UFD (见习题 III.1)。

以下引理的一个直接推论是 $\mathbb{Z}$ 或任意域上任意多个变元的多项式代数为 UFD。

引理 2.1. (高斯定理) 若 R 为 UFD, 则 $R[x]$ 亦然。

证. 令 $K = \mathrm{q.f.}(R)$, 则 $R[x]$ 可以看作 $K[x]$ 的子环。我们先来证明, $R[x]$ 中的素元为所有 R 中的素元及所有在 $K[x]$ 中不可约的多项式, 其系数的最大公因子为 1。

若 $a \in R$, 则 $R[x]/aR[x] \cong R/aR[x]$, 故 a 在 $R[x]$ 中是素的当且仅当它在 R 中是素的。设 $f \in R[x]$ 是素的且次数 > 0。易见 f 的系数不能有公共素因子; 若 f 在 $K[x]$ 中可分解, $f = gh$ ($g, h \in K[x]$, 且次数小于 f 的次数), 可取 $a, b \in R - \{0\}$ 使得 $ag, bh \in R[x]$, 从而在 $R[x]$ 中有 $abf = ag \cdot bh$, 而因 f 是素的, ag 或 bh 在 (f)

中, 这是不可能的。反之, 若 f 在 $K[x]$ 中不可约且其系数的最大公因子为 1, 则对任意 $g,h\in R[x]$ 使得 $gh\in(f)$, g,h 中必有一个在 $K[x]$ 中能被 f 整除, 不妨设 (在 $K[x]$ 中) $f|g$。于是存在 $a\in R-\{0\}$ 及 $g_1\in R[x]$ 使得 $ag=fg_1$。由于 f 的系数的最大公因子为 1, a 的任一素因子必为 g_1 的系数的公因子, 故由归纳法可将 a 约化为 1, 即 $g\in(f)$。因而 f 是素的。

对于 $R[x]$ 中的任一元 f, 先将它在 $K[x]$ 中分解成不可约多项式的积, 从而有 $af=bf_1\cdots f_r$, 其中 $a,b\in R-\{0\}$ 而 $f_1,\cdots,f_r\in R[x]$ 为次数 >0 的素元。不难得到 $a|b$, 从而 f 可以分解成素因子的积。证毕。

3. 模

一个环 R 上的模 (或称为一个 R-模) 是一个阿贝尔加群 M, 带有一个 R 的作用, 即一个映射

$$\begin{gathered}R\times M\to M\\(r,m)\mapsto rm\end{gathered}$$

满足下述条件:

i) $(r+r')m=rm+r'm,\ r(m+m')=rm+rm'$ (分配律);

ii) $(rr')m=r(r'm)$;

若讨论有单位元的环, 则我们还要求

iii) $1m=m$。

可以将 R-模 M 看作一个带有算子区 R 的阿贝尔加法群*, 由此就不难定义 R-子模 (在没有疑问时简称子模) 和商模、R-模的 R-同态 (在没有疑问时简称同态) 与同构、R-模的直和与直积等, 并可应用群论的同构定理等。任意多个 R (作为 R-模) 的拷贝的一个直和称为一个*自由* R-模, n 个 R 的拷贝的直和记为 $R^{\oplus n}$, n 称为它的*秩*。

注 3.1. 若 R 不是交换环, 我们常把上面定义的模称为 R-*左模*, 而若在定义中将 ii) 改为 $(rr')m=r'(rm)$, 则所定义的模称为 R-*右模* (此时常将 rm 改记为 mr)。例如 R 中的左理想为左模而右理想为右模。

例 3.1. i) 任一理想 $I\subset R$ 可以看作 R-模。

ii) 任意 R-代数 A 具有 R-模结构, 而且任意 A-模也可以看作 R-模。特别地, 对任意理想 $I\subset R$, R/I 为 R-模。

iii) 设 M,N 为 R-模, 记 $Hom_R(M,N)$ 为所有从 M 到 N 的 R-同态的集合, 则 $Hom_R(M,N)$ 具有阿贝尔加群结构; 而当 R 为交换环时 $Hom_R(M,N)$ 具有 R-模

* 不了解带算子的群的读者可参看附录 A。

结构 (对 $r \in R$, $f \in Hom_R(M,N)$, $m \in M$, 令 $(rf)(m) = rf(m)$), $End_R(M) = Hom_R(M,M)$ 具有 R-代数结构 (这是例 1.2.i) 的推广)。

注意有限多个 R-模的直和与直积是同构的, 但无穷多个 R-模则不然, 例如可数多个 R-模 $M_1, M_2, \cdots$ 的直积为序列的集合 $M = \prod\limits_i M_i = \{(a_1, a_2, \cdots) | a_i \in M_i\ \forall i\}$, 而它们的直和 $\bigoplus\limits_i M_i$ 为 M 中所有只有有限多个非零分量的序列组成的子集。像这样给出结构的定义称作 "内在的" 定义。我们可以给直和与直积以 "外在的" (即通过与其他 R-模的关系) 定义如下。设 $\mathfrak{M} = \{M_i | i \in I\}$ 为一族 R-模, 其中 I 为指标集, 则 $\mathfrak{M}$ 中模的直和是一个 R-模 M, 带有同态 $f_i : M_i \to M$ $(i \in I)$, 使得对任一 R-模 M' 及任意同态 $f'_i : M_i \to M'$ $(i \in I)$, 存在唯一的同态 $\phi : M \to M'$ 使得 $f'_i = \phi \circ f_i$ $(i \in I)$; 而 $\mathfrak{M}$ 中模的直积是一个 R-模 N, 带有同态 $g_i : N \to M_i$ $(i \in I)$, 使得对任一 R-模 N' 及任意同态 $g'_i : N' \to M_i$ $(i \in I)$, 存在唯一的同态 $\psi : N' \to N$ 使得 $g'_i = g_i \circ \psi$ $(i \in I)$。这些分别是直和与直积的 "泛性"。

设 $f : M \to N$ 为 R-模同态, 则其核 $K = \ker(f) = \{m \in M | f(m) = 0\}$ 也具有泛性: 令 $i : K \to M$ 为包含映射, 对任意 R-模 K' 及任意同态 $g : K' \to M$, 若 $f \circ g = 0$, 则存在唯一同态 $\phi : K' \to K$ 使得 $g = i \circ \phi$。这也给出核的外在定义。我们有一串同态

$$0 \to K \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} N$$

其中 i 是单射且 $\ker(f) = \mathrm{im}(i)$, 这样的一串同态称作一个**左正合列**。类似地, 称 $C = N/f(M)$ 为 f 的**余核**, 我们有**右正合列** $M \to N \to C \to 0$, 且余核也有泛性, 可用作外在定义。

更一般地, 一串 R-模同态

$$\cdots \xrightarrow{f_{n-2}} M_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} \cdots$$

称作一个**复形**, 如果对所有 n 都有 $f_n \circ f_{n-1} = 0$; 称作一个**正合列**, 如果对所有 n 都有 $\ker(f_n) = \mathrm{im}(f_{n-1})$。一个正合列 $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ 称作一个**短正合列**, 它相当于 M' 是 M 的子模且 $M'' \cong M/M'$。

若

$$0 \to N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \tag{1}$$

是一个左正合列, 则对任一 R-模 M 有 (阿贝尔群的) 左正合列

$$0 \to Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M, N'') \tag{2}$$

其中 f_* 的定义为 $f_*(\phi) = f \circ \phi$, g_* 的定义类似。理由很简单: 因为 f (或者说 N') 是 g 的核, 由核的泛性, 对任一 $\psi \in Hom_R(M,N)$, 若 $g \circ \psi = g_*(\psi) = 0$, 则存在唯

一的 $\phi \in Hom_R(M,N')$ 使得 $\psi = f \circ \phi = f_*(\phi)$, 这 (由内在定义) 正好说明 f_* 是 g_* 的核, 或者说 (2) 是左正合的。实际上我们说明了, (1) 是左正合当且仅当对任意 R-模 M, (2) 是 (阿贝尔加群的) 左正合列。

像这样的论证几乎是同义反复, 它只是把定义换个说法而已。我们把这样的论证称作**抽象废话**。最典型的抽象废话是外在定义的唯一性, 例如对 R-模的一个 R-同态 $f: M \to N$, 若 $i: K \to M$ 和 $i': K' \to M$ 都是 f 的外在意义下的核 (即满足泛性), 则存在唯一的 R-同构 $\phi: K' \to K$ 使得 $i' = i \circ \phi$。

类似地, 若

$$N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \to 0 \tag{3}$$

是一列 R-模同态, 则由抽象废话, (3) 是右正合当且仅当对任一 R-模 M, 下列 (阿贝尔群的) 同态列为左正合

$$0 \to Hom_R(N'',M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N,M) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N',M) \tag{4}$$

其中 $f^*(\phi) = \phi \circ f$, 等等。总而言之有如下结论.

引理 3.1. 一个 R-模同态列 (1) 是左正合的当且仅当对任意 R-模 M, (2) 是 (阿贝尔群的) 左正合列。类似地, 一个 R-模同态列 (3) 是右正合的当且仅当对任意 R-模 M, (4) 是 (阿贝尔群的) 左正合列。

注意即使在 (1) 中 g 是满射, (2) 中的 g_* 也未必是满射。具体地说, 一个 R-同态 $\phi: M \to N''$ 未必能提升成 M 到 N 的同态。例如当 $R = \mathbb{Z}$, g 为投射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 时, $\phi = \mathrm{id}: \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 就不能提升成 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 到 $\mathbb{Z}$ 的同态。但如果 M 是自由模 (例如 $M = R^{\oplus n}$), 则当 g 为满射时 g_* 必为满射 (注意 $Hom_R(M,N) \cong N^{\oplus n}$, 在一般情形 g_* 等于一些 g 的拷贝的直积)。更一般地, 一个 R-模 M 称为**投射的**, 如果对任意满同态 $g: N \to N''$, 诱导的 (阿贝尔群) 同态 $g_*: Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N'')$ 都是满射。不难验证一个 R-模 M 是投射模当且仅当存在 R-模 M' 使得 $M \oplus M'$ 同构于一个自由模: 若 $F = M \oplus M'$ 是自由模, 则对任一满同态 $g: N \to N''$ 有 $Hom_R(F,N) \twoheadrightarrow Hom_R(F,N'')$, 故由

$$Hom_R(F,N) \cong Hom_R(M,N) \oplus Hom_R(M',N)$$

易见 $Hom_R(M,N) \twoheadrightarrow Hom_R(M,N'')$; 反之, 若 M 是投射模, 取自由模 F 使得存在满同态 $g: F \twoheadrightarrow M$, 则由投射模的定义存在同态 $h: M \to F$ 使得 $g \circ h = \mathrm{id}_M$, 由此可见 $F = h(M) + \ker(g) \cong M \oplus \ker(g)$。我们将看到投射模不一定是自由的 (见例 VII.1.2)。

类似地, 即使在 (3) 中 f 是单射, (4) 中的 f^* 也未必是满射。具体地说, 一个 R-同态 $\phi: M' \to N$ 未必能扩张成 M 到 N 的同态。例如当 $R = \mathbb{Z}$, $f = 2\cdot:$