国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

TSCHEBYSCHEFF APPROXIMATION THEOREM

Tschebyscheff逼近定理

佩捷 等 编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

TSCHEBYSCHEFF APPROXIMATION THEOREM

Tschebyscheff逼近定理

佩捷　等　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了 Tschebyscheff 逼近问题的相关知识及应用. 全书共 21 章,读者可以较全面地了解 Tschebyscheff 这一类问题的实质,并且还可以认识到它在其他学科中的应用.

本书适合数学专业的本科生和研究生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Tschebyscheff 逼近定理/佩捷等编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2016.6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5779-9

Ⅰ.①T… Ⅱ.①佩… Ⅲ.①切比雪夫逼近 Ⅳ.①O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 003391 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 聂兆慈
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 33.25 字数 356 千字
版　　次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-5779-9
定　　价 88.00 元

⊙代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量．书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉．失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理．浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭．吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主．

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会．大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工．一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了．屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看．封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》．管它呢，且往下看．第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪．

三岁孩童千两价，保主跨海去征东．

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）．那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字．这是我有生以来独立看的第一本书．尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:"康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也."可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即"涉猎")相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即"始于精于一,返于精于博".正如中国革命一

样，必须先有一块根据地，站稳后再开创几块，最后连成一片.

丰富我文采，澡雪我精神

辛苦了一周，人相当疲劳了，每到星期六，我便到旧书店走走，这已成为生活中的一部分，多年如此. 一次，偶然看到一套《纲鉴易知录》，编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材. 这部书提纲挈领地讲中国历史，上自盘古氏，直到明末，记事简明，文字古雅，又富于故事性，便把这部书从头到尾读了一遍. 从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说，例如《三国演义》和《东周列国志》. 我常对人说，这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全. 即以近年来极时髦的人质问题（伊朗人质、劫机人质等），这些书中早就有了，秦始皇的父亲便是受害者，堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗，不屑于名利. 其中"秋水""解牛"诸篇，诚绝唱也.《论语》束身严谨，勇于面世，"己所不欲，勿施于人"，有长者之风. 司马迁的《报任少卿书》，读之我心两伤，既伤少卿，又伤司马；我不知道少卿是否收到这封信，希望有人做点研究. 我也爱读鲁迅的杂文，果戈理、梅里美的小说. 我非常敬重文天祥、秋瑾的人品，常记他们的诗句："人生自古谁无死，留取丹心照汗青""谁言女子非英物，夜夜龙泉壁上鸣". 唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》，丰富我文采，澡雪我精神，其中精粹，实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》，既叹服其广博，也使我动了写《科学发现纵横谈》的心. 不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信. 以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起，我就喜读方法论方面的论著.我想，做什么事情都要讲究方法，追求效率、效果和效益，方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书，并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际，先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵，我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处，现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书：有的不值一看，有的只值看20分钟，有的可看5年，有的可保存一辈子，有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著，由于我们的精力与时间有限，也必须加以选择.决不要看坏书，对一般书，要学会速读.

读书要多思考.应该想想，作者说得对吗？完全吗？适合今天的情况吗？从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书，带着问题去读，或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位，就像猎人追找猎物一样主动，很快就能找到答案，或者发现书中的问题.

有的书浏览即止，有的要读出声来，有的要心头记住，有的要笔头记录.对重要的专业书或名著，要勤做笔记，“不动笔墨不读书”.动脑加动手，手脑并用，既可加深理解，又可避忘备查，特别是自己的灵感，更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说：“札记之功必不可少，如不札记，则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品,都是长期积累和短期突击相结合的产物.涓涓不息,将成江河;无此涓涓,何来江河?

爱好读书是许多伟人的共同特性,不仅学者专家如此,一些大政治家、大军事家也如此.曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷,嗜书如命的人.他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

目录

引 言

第 0 章

先看一道清华大学金秋营试题.

例 1 求方程 $x^5+10x^3+20x-4=0$ 的所有根.

解法 1 设 $x=z-\frac{2}{z}$,则方程 $x^5+10x^3+20x-4=0$ 可化为

$$z^5-\frac{32}{z^5}-4=0$$

于是 $z^5=8$ 或 $z^5=-4$,故 $z=\sqrt[5]{8}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ 或 $z=-\sqrt[5]{4}\,e^{-\frac{2k\pi}{5}i}$(其中 $k=0,1,2,3,4$).

解法 2 设

$$x=\lambda\left(t-\frac{1}{t}\right)$$

则原方程变为

$$\lambda^5\left(t-\frac{1}{t}\right)^5+10\lambda^3\left(t-\frac{1}{t}\right)^3+20\lambda\left(t-\frac{1}{t}\right)=4$$

即

$$\lambda^5\left(t^5-\frac{1}{t^5}\right)-5\lambda^2(\lambda^2-2)\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+$$
$$10(\lambda^2-1)(\lambda^2-2)\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{4}{\lambda}$$

令 $\lambda=\sqrt{2}$,则

$$t^5-\frac{1}{t^5}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

由单调性可知

$$t^5=\sqrt{2}$$

从而

$$t=\sqrt[10]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{2k\pi}{5}\mathrm{i}}\quad(k=0,1,2,3,4)$$

因此

$$x=\sqrt{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}-\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k\pi}{5}}\quad(k=0,1,2,3,4)$$

解法 3 首先介绍一类特殊的一元五次方程

$$x^5+px^3+\frac{p^2}{5}x+q=0$$

的解法.

令 $x=u+v$,则

$$(u+v)^5+p(u+v)^3+\frac{p^2}{5}(u+v)+q=0$$

而

$$(u+v)^5=u^5+v^5+5uv(u^3+v^3)+10u^2v^2(u+v)=$$
$$u^5+v^5+5uv(u+v)^3-5u^2v^2(u+v)$$

故

$$u^5+v^5+(5uv+p)(u+v)^3-\left(5u^2v^2-\frac{p^2}{5}\right)(u+v)+q=0$$

令 $uv=-\frac{p}{5}$,则

$$u^5+v^5+q=0$$

由

$$\begin{cases}uv=-\dfrac{p}{5}\\ u^5+v^5=-q\end{cases}$$

可解得 u,v.

回到原题,$p=10,q=-4$,有

$$\begin{cases}uv=-2\\ u^5+v^5=4\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}u_1=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{5}}\\ v_1=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4\pi}{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_2=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}\\ v_2=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_3=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=-\sqrt[5]{4}\\ v_3=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}=\sqrt[5]{8}\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_4=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{5}}\\ v_4=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}u_5=\sqrt[5]{4}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{9\pi}{5}}\\ v_5=\sqrt[5]{8}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6\pi}{5}}\end{cases}$$

因此原方程的五个根为

$$x_i=u_i+v_i$$

其中 $i=1,2,\cdots,5$.

解法 4 注意到满足 $f(2\sqrt{2}\sinh t)=8\sqrt{2}\cosh 5t$ 的多项式是

$$f(x)=x^5+10x^3+20x$$

即

$$8\sqrt{2}\cdot\frac{e^{5t}-e^{-5t}}{2}=4$$

所以 $e^{5t}=\sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

于是 $e^t=\sqrt[10]{2}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt[10]{2}}e^{\frac{2k\pi}{5}i}$（其中 $i=0,1,2,3,4$），

故 $x=\sqrt{2}(e^t-e^{-t})=\sqrt[5]{8}\,e^{\frac{2k\pi}{5}i}-\sqrt[5]{4}\,e^{-\frac{2k\pi}{5}i}$（其中 $k=0,1,2,3,4$）.

评注 本题的背景是 Tschebyscheff（切比雪夫）多项式，若不熟悉 Tschebyscheff 多项式，要做出此题，难度异常之大.

例 2 对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$，令

$$T_n(x)=\frac{1}{2^n}\left[(x+\sqrt{1-x^2}\,i)^n+(x-\sqrt{1-x^2}\,i)^n\right]\quad(n\in\mathbf{N})$$

(1) 求证：对于 $-1\leqslant x\leqslant 1$，$T_n(x)$ 是 x 的首项系数为 1 的 n 次多项式，且 $T_n(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 假设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 是首项系数为 1 的实系数多项式，使得对在 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 内的所有 x，$p(x)>-\frac{1}{2^{n-1}}$. 求证：$[-1,1]$ 内存在 x^*，使得 $p(x^*)\geqslant\frac{1}{2^{n-1}}$.（1994 年中国台北数学奥林匹克试题）