



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

TSCHEBYSCHIEFF APPROXIMATION THEOREM

Tschebyscheff逼近定理

佩捷 等 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编 王梓坤

TSCHEBYSCHOFF APPROXIMATION THEOREM

Tschebyscheff 逼近定理

佩捷 等 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书详细介绍了 Tschebyscheff 逼近问题的相关知识及应用. 全书共 21 章, 读者可以较全面地了解 Tschebyscheff 这一类问题的实质, 并且还可以认识到它在其他学科中的应用.

本书适合数学专业的本科生和研究生以及数学爱好者阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Tschebyscheff 逼近定理/佩捷等编著. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2016. 6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-5779-9

I. ①T… II. ①佩… III. ①切比雪夫逼近

IV. ①O174.41

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 003391 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 聂兆慈

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 33.25 字数 356 千字

版 次 2016 年 6 月第 1 版 2016 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-5779-9

定 价 88.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

◎
代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。
真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种社会、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；老年人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄，我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“谁言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎
目

录

第0章	引言	//1
第1章	Tschebyscheff 小传	//9
第2章	什么是逼近	//22
第3章	Tschebyscheff 多项式	//41
第4章	多项式动力学和 Fermat 小定理的一个证明	//51
4.1	引言	//51
4.2	Tschebyscheff 多项式	//52
4.3	结论	//54
第5章	最佳逼近多项式的特征	//58
第6章	Tschebyscheff 多项式的三角形式在几何中的应用	//64
6.1	第一型 Tschebyscheff 多项式	//66
6.2	第二型 Tschebyscheff 多项式	//70
第7章	Tschebyscheff 多项式的三角形式不等式	//76

第 8 章	Tschebyscheff 多项式的拉格朗日形式	//81
第 9 章	再谈最佳逼近多项式	//86
第 10 章	最小偏差多项式	//94
第 11 章	高次 Tschebyscheff 逼近	//98
11.1	一道集训队试题	//98
11.2	Π, Π . Tschebyscheff 定理	//100
第 12 章	Tschebyscheff 多项式与不等式	//136
第 13 章	Tschebyscheff 多项式与马尔可夫定理	//143
13.1	多项式与三角多项式的导数增长的阶	//144
13.2	函数的可微性质的表征	//148
第 14 章	多元逼近	//153
第 15 章	多元逼近问题中的未解决问题	//155
第 16 章	非线性 Tschebyscheff 逼近	//158
第 17 章	巴拿赫空间中的 Tschebyscheff 多项式	//161
第 18 章	FIR 数字滤波器设计的 Tschebyscheff 逼近法	//163
18.1	Tschebyscheff 最佳一致逼近原理	//165
18.2	利用 Tschebyscheff 逼近理论设计 FIR 数字滤波器	//166
18.3	误差函数 $E(\omega)$ 的极值特性	//172
第 19 章	苏格兰咖啡馆的大本子	//176
第 20 章	逼近论中的伯恩斯坦猜测	//184
20.1	引言	//184

20.2	高精度计算 $\{2nE_{2n}(x)\}_{n=1}^{52}$	//189
20.3	计算伯恩斯坦常数 β 的上界	//192
20.4	计算伯恩斯坦常数 β 的下界	//202
20.5	数 $\{2n \sum_{2n} (x)\}_{n=1}^{52}$ 的理查森外插	//205
20.6	某些未解决的问题	//207
20.7	$ x $ 在 $[-1, +1]$ 上的有理逼近	//210
附录 I	关于非线性 Tschebyscheff 逼近的几点注记	//219
附录 II	几个多项式问题	//225
	1. 全 k 次方值蕴涵 k 次方式	//225
	2. Tschebyscheff 多项式引申出的几个问题	//227
	3. 二次函数的几个问题	//234
附录 III	离散逼近论	//240
	1. Banach 空间的离散逼近	//241
	2. 闭算子的离散逼近	//244
附录 IV	Tschebyscheff 正交多项式问题	//246
	1. Tschebyscheff 正交多项式	//246
	2. 用 Tschebyscheff 方法逼近函数	//253
附录 V	联合最佳 L_p 逼近	//258
	1. 引言	//258
	2. 存在定理	//260
	3. L_1 逼近的特征定理	//262
	4. L_p 逼近的特征定理	//268
附录 VI	多元函数的三角多项式逼近	//276
	1. 引论	//276
	2. 定理 6.2 的证明	//282

	3. 定理 6.3 的证明 //286
	4. 定理 6.3 的另一证明 //290
附录 VII	多元周期函数的非整数次积分与三角 多项式逼近 //297
	1. 多元周期函数的非整数次积分 //297
	2. 非整数次积分的性质 //304
	3. 三角多项式逼近 //314
附录 VIII	在具有基的 Banach 空间中的最佳逼近 问题 //325
附录 IX	C. H. Мергелян 定理的推广 //346
附录 X	平方逼近 //362
	1. 函数按最小二乘法的逼近 //362
	2. 周期函数借助于三角多项式的平方逼近 //369
	3. 借助于线性无关函数组的逼近表示 //374
	4. 平方逼近的 Tschebyscheff 公式 //378
	5. 非线性的依从于一个或几个参数的函数的逼近 //388
	6. 分段连续函数的逼近 //390
	7. 用以确定平方逼近的系数的方程组 //394
	8. 平方误差的计算 //397
	9. 多个自变量函数的平方逼近 //399
参考文献	//403
编辑手记	//515



引言

第

0

章

先看一道清华大学金秋营试题.

例 1 求方程 $x^5 + 10x^3 + 20x - 4 = 0$ 的所有根.

解法 1 设 $x = z - \frac{2}{z}$, 则方程 $x^5 +$

$10x^3 + 20x - 4 = 0$ 可化为

$$z^5 - \frac{32}{z^5} - 4 = 0$$

于是 $z^5 = 8$ 或 $z^5 = -4$, 故 $z = \sqrt[5]{8} e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ 或 $z = -\sqrt[5]{4} e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ (其中 $k=0, 1, 2, 3, 4$).

解法 2 设

$$x = \lambda \left(t - \frac{1}{t} \right)$$

则原方程变为

$$\lambda^5 \left(t - \frac{1}{t} \right)^5 + 10\lambda^3 \left(t - \frac{1}{t} \right)^3 + 20\lambda \left(t - \frac{1}{t} \right) = 4$$

即

$$\begin{aligned} & \lambda^5 \left(t^5 - \frac{1}{t^5} \right) - 5\lambda^2 (\lambda^2 - 2) \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right) + \\ & 10(\lambda^2 - 1)(\lambda^2 - 2) \left(t - \frac{1}{t} \right) = \frac{4}{\lambda} \end{aligned}$$

令 $\lambda = \sqrt{2}$, 则

$$t^5 - \frac{1}{t^5} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

由单调性可知

$$t^5 = \sqrt{2}$$

从而

$$t = \sqrt[5]{2} e^{\frac{2k\pi}{5}} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

因此

$$x = \sqrt{2} \left(t - \frac{1}{t} \right) = \sqrt[5]{8} e^{\frac{2k\pi}{5}} - \sqrt[5]{4} e^{-\frac{2k\pi}{5}} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4)$$

解法 3 首先介绍一类特殊的一元五次方程

$$x^5 + px^3 + \frac{p^2}{5}x + q = 0$$

的解法.

令 $x = u + v$, 则

$$(u+v)^5 + p(u+v)^3 + \frac{p^2}{5}(u+v) + q = 0$$

而

$$\begin{aligned} (u+v)^5 &= u^5 + v^5 + 5uv(u^3 + v^3) + 10u^2v^2(u+v) = \\ &= u^5 + v^5 + 5uv(u+v)^3 - 5u^2v^2(u+v) \end{aligned}$$

故

$$u^5 + v^5 + (5uv + p)(u+v)^3 - \left(5u^2v^2 - \frac{p^2}{5}\right)(u+v) + q = 0$$

令 $uv = -\frac{p}{5}$, 则

$$u^5 + v^5 + q = 0$$

由

$$\begin{cases} uv = -\frac{p}{5} \\ u^5 + v^5 = -q \end{cases}$$

可解得 u, v .

回到原题, $p = 10, q = -4$, 有

$$\begin{cases} uv = -2 \\ u^5 + v^5 = 4 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} u_1 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{\pi}{5}} \\ v_1 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{4\pi}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{3\pi}{5}} \\ v_2 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{2\pi}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = \sqrt[5]{4} e^{i\pi} = -\sqrt[5]{4} \\ v_3 = \sqrt[5]{8} e^{i0} = \sqrt[5]{8} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_4 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{7\pi}{5}} \\ v_4 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{8\pi}{5}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_5 = \sqrt[5]{4} e^{i\frac{9\pi}{5}} \\ v_5 = \sqrt[5]{8} e^{i\frac{6\pi}{5}} \end{cases}$$

Tschebyscheff 逼近定理

因此原方程的五个根为

$$x_i = u_i + v_i$$

其中 $i=1, 2, \dots, 5$.

解法 4 注意到满足 $f(2\sqrt{2} \sinh t) = 8\sqrt{2} \cosh 5t$ 的多项式是

$$f(x) = x^5 + 10x^3 + 20x$$

即

$$8\sqrt{2} \cdot \frac{e^{5t} - e^{-5t}}{2} = 4$$

所以 $e^{5t} = \sqrt{2}$ 或 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

于是 $e^t = \sqrt[10]{2} e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ 或 $-\frac{1}{\sqrt[10]{2}} e^{\frac{2k\pi}{5}i}$ (其中 $i=0, 1, 2, 3, 4$),

故 $x = \sqrt{2}(e^t - e^{-t}) = \sqrt[5]{8} e^{\frac{2k\pi}{5}i} - \sqrt[5]{4} e^{-\frac{2k\pi}{5}i}$ (其中 $k=0, 1, 2, 3, 4$).

评注 本题的背景是 Tschebyscheff(切比雪夫)多项式, 若不熟悉 Tschebyscheff 多项式, 要做出此题, 难度异常之大.

例 2 对于 $-1 \leq x \leq 1$, 令

$$T_n(x) = \frac{1}{2^n} [(x + \sqrt{1-x^2}i)^n + (x - \sqrt{1-x^2}i)^n] \quad (n \in \mathbf{N})$$

(1) 求证: 对于 $-1 \leq x \leq 1$, $T_n(x)$ 是 x 的首项系数为 1 的 n 次多项式, 且 $T_n(x)$ 的最大值是 $\frac{1}{2^{n-1}}$.

(2) 假设 $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ 是首项系数为 1 的实系数多项式, 使得对在 $-1 \leq x \leq 1$ 内的所有 x , $p(x) > -\frac{1}{2^{n-1}}$. 求证: $[-1, 1]$ 内存在 x^* , 使得 $p(x^*) \geq \frac{1}{2^{n-1}}$. (1994 年中国台北数学奥林匹克试题)

