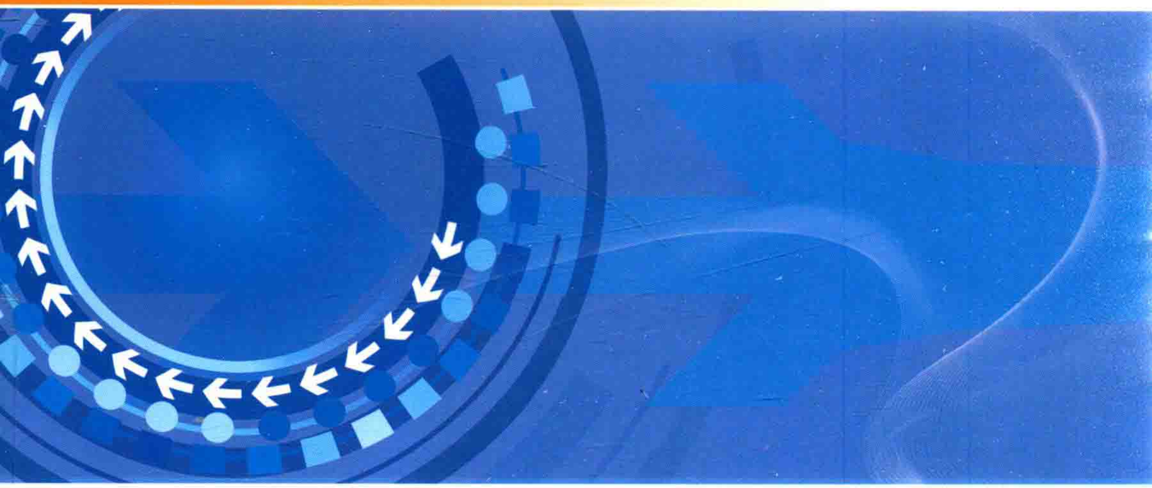
随机系统的控制理论和控制方法

王以忠　许曰才　袁照平　著



北京交通大学出版社
http://www.bjtup.com.cn

随机　　理论和控制方法

王以忠　许曰才　袁照平　著

北京交通大学出版社

·北京·

内 容 简 介

现实世界中的各种动态系统几乎都要受到各种随机因素的干扰，当精度要求比较高或是这些随机因素不能被忽略时，就要把这些系统当作随机系统来对待。随机系统的控制理论和控制方法在控制论中占有非常重要的地位，本书结合作者的研究工作，介绍随机系统控制的一些基本概念、基本理论和控制方法。主要内容包括：不确定随机系统的鲁棒自适应控制、混合控制和容错控制；随机系统的 Razumikhin-type 控制理论与方法；模糊随机双曲正切模型及其控制；基于线性矩阵不等式的随机系统控制和非线性随机系统的鲁棒 H_∞ 控制理论与控制方法。

本书可作为从事控制理论和自动控制工作的科研人员、工程技术人员和高等院校从事相关专业的教师和研究生的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

随机系统的控制理论和控制方法 / 王以忠，许曰才，袁照平著. —北京：北京交通大学出版社，2016.12
ISBN 978-7-5121-2905-4

I. ① 随… II. ① 王… ② 许… ③ 袁… III. ① 随机系统–自动控制理论 ② 随机系统–控制方法 IV. ① TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 277094 号

随机系统的控制理论和控制方法
SUIJI XITONG DE KONGZHI LILUN HE KONGZHI FANGFA

策划编辑：韩 乐 责任编辑：谭文芳 助理编辑：龙嫚嫚
出版发行：北京交通大学出版社 电话：010-51686414 http://www.bjtup.com.cn
地 址：北京市海淀区高梁桥斜街 44 号 邮编：100044
印 刷 者：北京艺堂印刷有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：170 mm×235 mm 印张：9.25 字数：192 千字
版 次：2016 年 12 月第 1 版 2016 年 12 月第 1 次印刷
书 号：ISBN 978-7-5121-2905-4/TP・839
定 价：36.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映。
投诉电话：010-51686043，51686008；传真：010-62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn。

前　言

目前，随机控制理论已经成为自动控制理论的一个重要分支，这一领域的发展将会对生产和科学技术的进步产生巨大的推动作用，因此，深入研究非线性随机系统的控制理论与方法具有重要的理论意义和实际意义。本书是关于随机系统控制理论和控制方法的专业书籍，就非线性随机系统的鲁棒控制理论和控制方法问题展开研究，比较系统地介绍了随机系统控制的无穷小算子和 Lyapunov 第二方法等基本概念和理论，讨论了非线性随机系统的鲁棒自适应控制的理论和方法，介绍了随机系统控制的 Razumikhin-type 控制方法、基于线性矩阵不等式的随机系统控制方法、随机马尔科夫跳变系统的混合控制和容错控制理论和方法。另外，还提出了一种新的模糊随机双曲正切模型，基于模糊随机双曲正切模型，研究了一些非线性随机系统的鲁棒 H_∞ 控制理论和控制方法。本书结合作者的研究工作，介绍了一些随机系统典型的控制方法和一些具有如下鲜明特点的新颖成果。

（1）研究了一类不确定随机系统的鲁棒自适应控制问题。综合运用线性矩阵不等式方法、自由权矩阵方法，并结合积分不等式、数学恒等变换和范数的性质等控制方法与数学工具，给出了一种鲁棒自适应控制器的设计方法。由于综合合理地运用多种工具，以及在不等式放大过程中没有舍弃任何负定项，所得结果具有较少的保守性。

（2）研究了一类含有不确定性参数和时变时滞扰动的非线性随机区间系统的均方指数稳定问题。利用随机微分方程的 Razumikhin-type 定理研究了系统的内部稳定性，给出了系统的均方指数稳定性的充分条件，在此基础上提出了保证系统具有均方指数稳定的控制器设计方法。直接利用 Lyapunov 函数中的正定矩阵进行控制器的设计，回避了传统的利用上述正定矩阵的逆矩阵的处理方法，减少了保守性。

（3）提出了一类新的模型——模糊随机双曲正切模型（FSHTM），并研究了

基于 FSHTM 的非线性随机系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。同时，还提出了一种新的把非线性矩阵线性化的方法，这种方法减少了计算环节，提高了控制精度。另外，通过选择一种新的 Lyapunov–Krasovskii 泛函，设计了双曲正切函数形式的非线性状态反馈控制器，这种控制器实现简单，不仅可保证闭环系统均方渐近稳定，而且还能够达到给定的 H_∞ 性能指标。

（4）研究了具有时变时滞和分布时滞的随机马尔科夫跳变系统鲁棒控制和容错控制问题，提出了新的控制器设计方法，传统的控制增益的确定总要涉及正定矩阵，本书一些相关结果将这一限制放宽到了非奇异矩阵，使相应的控制方法更容易实现。

本书选材精炼，内容与结构新颖，创新性强，对从事随机系统控制理论与控制工程等相关专业的科技工作者具有一定的参考价值。本书由山东科技大学的王以忠、许曰才和袁照平合作完成。本书的撰写得到了山东省教育科学“十二五”规化课题（YBS15002）、山东科技大学群星计划和创新团队项目的支持，在此表示衷心的感谢，同时真诚地感谢北京交通大学出版社领导和编辑的鼎力支持和热心帮助。

本书作者水平有限，书中不妥之处，敬请广大师友和读者批评指正。

王以忠　许曰才　袁照平

2016 年 7 月

目　录

第1章　随机系统控制导引

1.1　引言

现代工业及社会经济等领域中的各种动态系统，严格说来，几乎都要受到各种各样的随机因素的干扰，当随机因素的干扰比较小或对系统精度要求不高时，常把系统当作确定性系统来处理，但当随机因素的干扰较大以至难以回避时，或是为了提高系统的分析设计精度时，就必须考虑随机因素的影响，这些动态系统就必须被当作随机系统来研究。

当系统具有随机输入、随机干扰或随机参数时，系统的状态、输出和控制量必然也是随机过程。这种具有随机性系统的控制问题，就叫作随机控制问题[1]。

随机控制理论是专门研究具有随机干扰的动态系统的理论。与确定性动态系统理论一样，它包含随机系统数学模型的建立问题、系统分析问题、确定控制问题及系统的估计问题。

为了分析设计一个随机系统，就必须建立相应的数学模型。随机系统的数学模型建立与确定性系统的没有什么区别，首先要抓住所研究问题的主要矛盾，确定系统的主要随机过程和主要参数，然后借助于数学理论与数学工具建立起它们之间的相互联系，从而得出描述系统的随机微分方程、随机差分方程或随机积分方程。但由于系统本身具有一定的随机特性，因此，随机控制理论研究起来也就更加困难一些。

系统分析问题就是分析动力学系统和系统变量的统计特性，也就是分析给定的系统在规定的工作条件下所具有的统计性能，它包括提取被控对象的结构和参数的信息，并分析这些信息对系统统计性能的影响，为下一步的工作，诸如系统的控制、状态变量的估计及预测等做好准备。

当前期工作准备完毕，需要制订一个控制目标，即希望系统达到一个什么样的状态，然后根据一定的准则或性能指标求出系统的控制输入即系统的控制问题，也就是确定随机系统的控制律。如果控制律是按某一性能指标达到极小确定的，那么它就是随机最优控制。

要研究一个随机系统，经常需要知道系统的状态信息，这就需要对系统的状态或结构信息进行测量，但测量值往往带有随机误差。根据观测量估计实际系统的状态，或根据观测量估计实际系统的数学模型。前者就是系统的状态估计问题，后者则是系统的模型估计问题，即辨识问题。

随着社会经济活动的日益丰富，现代各行各业生产技术及科学技术的进步，随机控制理论已渗透到各个领域，在经济、人口系统等社会领域及航空航天、导航与控制、制造工等工程领域中得到了广泛应用[2–7]。因此，掌握随机控制理论的基础知识，学会用“随机”的观点分析和解决问题，已逐渐成为众多科技工作者必备的知识。近几十年来，随机控制理论已成为自动控制理论的一个重要分支。数字计算机的出现使大量的计算变得简洁、快速和可能，同时也使随机控制理论的研究和应用得到了极大的进展。

1.2 随机控制的发展概述

随机系统的观测量和被控量都是随机过程，随机过程是随时间推移的随机现象的数学抽象。随机控制理论的发展与随机过程理论的发展密切相关。一些特殊的随机过程早在 20 世纪初就引起了科学家们的注意。1907 年前后，马尔科夫研究了一列有特定相依性的随机变量，后人称之为马尔科夫链，1923 年维纳给出了布朗运动的数学定义，这些随机过程至今仍是重要的研究对象。随机过程一般理论的研究通常被认为开始于 20 世纪 30 年代，1931 年科尔莫哥洛夫奠定了随机过程的数学理论基础。1953 年，杜布在其论文 *Stochastic Processes* 中论述了随机过程的数学理论基础。伊藤于 1951 年发表了论文 *On Stochastic Differential Equations*[8]，创立随机积分和随机微分方程理论，此后，随机微分方程的研究受到了广泛的重视，并在随机控制理论、航空航天、经济学、运筹学、机械工程、

结构稳定性等领域得到了广泛应用。20 世纪三四十年代是经典控制理论的形成时期，与此同时，随机控制理论也得到了相应的发展。之后，随着现代工业技术的飞速发展，以及卡尔曼–布西滤波理论的建立和数字计算机的广泛应用，现代控制理论逐步形成并得到充分的发展，这其中作为控制理论分支的随机控制理论扮演了一个很重要的角色。除此之外，随机控制理论与控制理论其他分支的密切相关性还表现为随机控制理论又是其他复杂系统（如自适应控制系统、自学习系统等）的理论基础。发展和应用与实际物理系统及其环境更接近的理论是十分重要的，所以，20 世纪 70 年代以来，随机控制及其滤波与估计等问题，都得到了研究人员的高度重视，并且取得了很大的进展。如今，随机控制理论及其应用，仍需要大力研究和发展，虽有相当多的困难，但它却是一个有待进一步开发的丰富宝藏。

随机过程理论内容十分丰富，随着研究的日益深入，促进了随机控制理论与方法的深入发展。由于随机系统的复杂性和多样性，因此，不可能有一种对所有随机系统都行之有效的控制方法。随机系统控制方法的研究是一个富有挑战性的工作，因此引起了众多学者的兴趣，自然它也是数学家们感兴趣的研究课题，他们从数学概念出发，以数学理论为基础，运用分析的方法来研究随机系统控制问题。如文献［9］就一列非降的 F_t 停时，即 $0=\tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \cdots \leqslant \tau_i \leqslant \cdots$，引入脉冲控制 $\nu=\{(\tau_i,\xi_i),i\geqslant 1\}$，其中 ξ_i 是 F_{τ_i} 可测的随机变量 $(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，考虑脉冲控制的平均期望费用 $J_x(\nu)=\dfrac{1}{T}E\left[\int_0^T h(X_t)\mathrm{d}t+\sum_{\tau_i<T}B(\xi_i)\right]$，利用变分理论等数学工具，给出了最优控制 ν^* 的具体结构。文献［10–15］对时变随机系统的稳定性、估计与控制问题给出了许多有价值的结论。

Lyapunov 稳定性理论是现代控制理论重要的理论基础，很多结果都是在此理论基础上得到的。Lyapunov 提出的稳定性定理、渐近稳定性定理及两个不稳定性定理，奠定了运动稳定性的基础，被誉为基本定理[16]。早在 17 世纪，Torricelli 就指出如果系统在某一点具有最小能量，那么该点将成为系统的一个稳定平衡点。19 世纪末，Lyapunov 给出了稳定性的抽象定义。Lyapunov 方法可分为第一方法和第二方法，它是研究确定性系统与随机系统即一般非线性系统稳定性最重要的方法之一。第一方法是由非线性系统的运动方程找出其一次近似的线性化方程，

通过对线性化方程进行稳定性分析并给出原系统在平衡点附近的稳定性信息；第二方法则不需要对原系统进行线性化处理，直接从原非线性系统的运动方程出发，通过构造 Lyapunov 能量函数，并分析此函数及其一阶导数的保号性，从而获得非线性系统的稳定性信息。但对于一般的非线性系统，构造出合适的 Lyapunov 函数却不是一件容易的事情，于是，对于某些具体情况，相应地产生了一些特殊的方法，比如克拉索夫斯基方法、变量梯度方法和鲁尔法等。由于 Lyapunov 方法是迄今为止最具一般性的非线性系统分析理论，所以在非线性系统的综合设计方面也发挥了相当大的作用。然而，同样因为 Lyapunov 方法是一般性理论，所以必须根据具体情况构造不同的 Lyapunov 函数，而如何根据具体情况来构造合适的 Lyapunov 函数成为人们感兴趣的问题。

文献［17］提出了一种广义模型变换方法，通过引进一个新的变量得到一个新的广义系统，与其他模型变换方法相比，它的优点是所得新系统与原始系统等价，另外，它对原始系统没有更多的附加假设，因此，利用这种方法所得的结果保守性更小些，现在这种方法已被广泛地应用到各种系统和各种控制问题中[32–35]。

线性矩阵不等式方法是最重要的控制方法之一[13]。它通过构造适当的 Lyapunov 泛函，并经过一系列的推导把系统的稳定性问题转化为一个线性矩阵不等式的求解问题，借助于 Matlab 软件能够比较容易地求出 Lyapunov 泛函中的正定矩阵或其他所需要的矩阵，从而使问题得以解决，这种方法应用起来十分便利，受到广大学者的高度重视。

还有一种被广泛使用的方法就是自由权矩阵方法[51–52]。未用自由权矩阵方法处理时变时滞系统的控制问题时，一般都要求时滞项的导数要严格小于 1，因此，给问题的研究带来了比较大的局限性，随着自由权矩阵方法的出现，这一问题便迎刃而解。不仅如此，自由权矩阵方法对扩大线性矩阵不等式解的可行域及处理其他一系列相关问题都起着至关重要的作用。

当随机非线性系统不能被精确建模时，模糊模型方法常用来对这些系统进行建模和控制。模糊理论是由 L. A. Zadeh 于 1965 年在一篇名为《模糊集合》[18]的开创性文章中创立的。随后，他又提出了模糊算法、模糊决策的概念。1971 年他

又研究了模糊排序问题[19]，并于 1973 年发表了另一篇开创性文章《分析复杂系统和决策过程的新方法纲要》[20]，该文章建立了研究模糊控制的基础理论，在引入语言变量这一概念的基础上，提出了用模糊 IF–THEN 规则来量化人类知识，从此模糊理论进入了一个应用阶段，在此后的 20 多年中，模糊控制技术得到了较快的发展，在控制领域中越来越受到人们的关注和重视。迄今为止，模糊控制技术已成功地应用于各种控制对象及科学与工程的各个领域，如控制、机械工程、电子、医学、经济等领域。模糊控制理论中模糊 T–S 模型[21]占有非常重要的地位，它可以提供一个把语言规则集合转变为非线性映射的系统化过程，由于非线性映射易于实现，因此模糊 T–S 模型在许多领域得到了很好的应用。由于随机现象是普遍存在的，近年来模糊理论被应用到随机系统建模和控制方面，并取得了不少成果[22–27]。文献［11］讨论了一类具有参数不确定的随机模糊时滞系统的优化保成本控制问题，用线性矩阵不等式形式给出了时滞依赖的状态反馈控制器存在的充分条件，这个控制器可以保证闭环系统在均方意义下是渐近稳定的，同时保证闭环系统的二次成本函数值最小。

张化光教授提出了一种新的模糊模型，称之为模糊双曲正切模型（fuzzy hyperbolic model，FHM）[23]，该模型的状态矩阵是状态变量的双曲正切函数，其输入矩阵是线性常数矩阵。模糊双曲正切模型是一种全局模型，与其他模糊模型相比，它更适用于对控制对象所知有限的多变量非线性系统，此模型为本质非线性模型，易于由几条模糊规则得到。模糊双曲正切模型作为未知非线性函数的辨识器，具有辨识参数少、辨识复杂性较小、易于提高逼近精度等优点，从而有效地克服了模型的辨识器精度要求较高时的规则爆炸问题，同时它可以被看作神经网络模型，可以利用神经网络的学习方法学习模型的参数；根据此模型设计的最优控制器可以使整个系统性能指标达到最优。目前，模糊双曲正切模型与其他控制理论相结合已经取得了许多的研究成果，对这种新颖模型的研究正在成为一个研究热点，本文也将研究一类随机模糊双曲正切模型的鲁棒控制问题。

其他常见的控制方法还有 Backstepping 方法和滑模控制等，在此不一一赘述。

迄今为止，就随机系统的均方渐近稳定、指数稳定及 H_∞ 控制等问题已经有了一些结果。那么，如何选取更合适的 Lyapunov 泛函，采用怎样的研究方

法，以及使用什么样的数学工具与数学理论，以降低所研究问题的保守性，还有马氏跳变随机系统的控制问题等是众多学者目前非常感兴趣的问题。另外，随机控制与其他控制问题或其他学科的结合必将大大推动其自身与其他学科的发展。比如，随机控制与网络控制或经济和金融学科的结合就将会有广阔的发展前景。

1.3 预备知识

1.3.1 符号与记法

符号 $P>0$ 表示矩阵 P 是一个对称正定矩阵。假设 δ 是一个正常数，符号 $C([-\delta,0];\mathbf{R}^n)$ 表示带有范数 $|\varphi|=\sup\limits_{-\delta\leqslant\theta\leqslant0}\|\varphi\|$ 的从 $[-\delta,0]$ 到 n 维欧式空间 $\mathbf{R}^n$ 的连续函数的全体；$L_{F_t}^2([-\delta,0];\mathbf{R}^n)$ 表示满足 $\sup\limits_{-\delta\leqslant\theta\leqslant0}E\{|\varphi(\theta)|\}<+\infty$ 的 F_t 可测的随机变量的全体，其中 E 是数学期望算子；$\lambda_{\max}$ ($\lambda_{\min}$) 表示相应矩阵的最大（最小）特征值。$L_2[0,+\infty)$ 表示在 $[0,+\infty)$ 上平方可积的函数全体。

1.3.2 随机过程的概念

设(Ω,F,P)是一完备概率空间，T 为指标 t 的集合，如果对于每个 $t\in T$ ，有定义在 (Ω,F,P) 上的实的随机变量 $X(t,\omega)$ 与之对应，那么则称随机变量族 $X=\{X(t,\omega),t\in T\}$ 为一随机过程。对随机过程研究最多的是 T 为实数集 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$ 的子集的情形。如果 T 为整数集的子集，也称 X 为随机序列；如果 T 是 n 维欧几里得空间 $\mathbf{R}^n$ 的子集，则称 X 为多参数随机过程。

随机过程 X 实际上是定义在 $T\times\Omega$ 上的二元函数。当 t 固定时，X 是定义在样本空间 Ω 上的函数，即为一随机变量。对于 $\omega\in\Omega$ ，X 是参数 $t\in T$ 的一般函数，称此函数为随机过程对应于 ω 的轨道，或称之为随机过程的一个实现。

1.3.3 布朗运动

布朗运动最初是由英国生物学家布朗于 1827 年根据观察花粉微粒在水溶液

上做“无规则运动”的物理现象而提出的。爱因斯坦于 1905 年首次对这一现象的物理规律给出了一种数学描述，使这一课题有了显著的发展。1923 年，维纳从数学上严格地定义了一个随机过程来描述布朗运动。

定义 1.1 设 $\boldsymbol{X}=\{\boldsymbol{X}(t),t\in\mathbf{R}_+\}$ 为定义在完备概率空间(Ω, F, P)上取值于 m 维实空间 $\mathbf{R}^m$ 中的随机过程，若满足

（1）$\boldsymbol{X}(0)=\mathbf{0}$；

（2）独立增量性，即对任意的 $0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n$，$\boldsymbol{X}(t_0)$，$\boldsymbol{X}(t_1)-\boldsymbol{X}(t_0)$，$\boldsymbol{X}(t_2)-\boldsymbol{X}(t_1)$，…，$\boldsymbol{X}(t_n)-\boldsymbol{X}(t_{n-1})$ 是相互独立的随机向量；

（3）对于任意的 $s\geqslant 0$，$\tau>0$，增量 $\boldsymbol{X}(s+\tau)-\boldsymbol{X}(s)$ 服从密度 $p(\tau, x)=(2\pi\tau)^{\frac{m}{2}}\exp\left(-\frac{\|\boldsymbol{x}\|^2}{2\tau}\right)$ 的 m 维正态分布，其中 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^m$，$\|\bullet\|$为欧几里得范数；

（4）$\boldsymbol{X}$ 的一切样本函数都连续。

则称 $\boldsymbol{X}$ 为标准布朗运动。

1.3.4 伊藤随机积分

首先引进一个符号 L_T^2。设随机过程$\{\boldsymbol{X}(t,\omega), t\geqslant 0\}$，对 $T>0$ 满足以下条件：

（1）$\boldsymbol{X}(t,\omega)$ 关于$[0,T]\times\Omega$ 可测；

（2）$\forall t\geqslant 0$，$\boldsymbol{X}(t,\bullet)$ 关于 F_t 可测；

（3）$\int_0^T E[\boldsymbol{X}(t,\omega)]^2\mathrm{d}t<+\infty$，$E[\boldsymbol{X}(t,\omega)]^2<+\infty$，$\forall t\geqslant 0$，其中 E 为数学期望算子。

那么函数的全体记作 L_T^2。

定义 1.2 设 $\{w(t),t\geqslant 0\}$ 为标准布朗运动，$\{\boldsymbol{g}(t,\omega),t\geqslant 0\}$ 满足上述假设，即 $\boldsymbol{g}(t,\omega)\in L_T^2$，$[0,t]\subset[0,T]$。对 $\forall 0\leqslant t_0<t_1<\cdots<t_n\leqslant t$，令 $\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$ $(1\leqslant k\leqslant n)$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\Delta t_k$。若

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{g}(t_{k-1})[w(t_k)-w(t_{k-1})]\overset{\text{m.s.}}{=}\boldsymbol{Ig}(t)$$

均方极限存在，则称

$$\boldsymbol{Ig}(t)=\int_0^t\boldsymbol{g}(s,\omega)\mathrm{d}w(s,\omega) \tag{1.1}$$

为$\{\boldsymbol{g}(t,\omega),t\geqslant 0\}$关于$\{w(t),t\geqslant 0\}$在$[0,t]$上的伊藤积分。

下面介绍伊藤积分的两个重要性质：

（1）$E\left[\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}w(t)\right]=\int_a^b E[\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}E[w(t)]$；

（2）$E\left[\left(\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}w(t)\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}\left(\int_a^b \boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}w(t)\right)\right]=\int_a^b E[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(t)]\mathrm{d}t$。

1.3.5 伊藤随机微分方程解的存在性与唯一性

考虑如下的伊藤随机状态方程：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}w(t)\quad (0\leqslant t\leqslant T)\tag{1.2}$$

其中$\boldsymbol{x}(t)$为状态向量，$w(t)$为标准布朗运动，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)$和$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t)$是非线性函数。

下面介绍伊藤随机微分方程解的存在唯一定理。

定理 1.1 设随机过程$\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}(t),\ t\geqslant 0\}$满足伊藤随机微分方程式（1.2），若$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$：$[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$满足以下条件。

（1）可测性：$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$与$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$二元可测，$\left|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\right|^{\frac{1}{2}}$，$\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\in L^2_{[T\times\mathbf{R}]}$；

（2）Lipschitz 条件：存在常数K，满足对$\forall t\in[0,T]$，$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}$

$$\left|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{y})\right|+\left|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{y})\right|<K\left|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right|$$

（3）线性增长有界条件：存在常数$C>0$使得

$$\left|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\right|+\left|\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})\right|<C(1+|\boldsymbol{x}|)，\ \forall t\in[0,T]，\ \forall\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}$$

（4）初始条件：$\boldsymbol{x}(t_0)$关于F_{t_0}可测，且$E[\boldsymbol{x}^2(t_0)]<+\infty$，

则存在唯一的过程$\boldsymbol{x}=\{\boldsymbol{x}(t),\ t\geqslant 0\}$满足式（1.2），且$\boldsymbol{x}(t)$是自适应的，关于$F_t$可测。

1.3.6 伊藤微分公式

接下来介绍伊藤积分的一个重要法则——伊藤微分公式。伊藤微分公式是随机分析的基础，也是分析伊藤型随机系统的重要工具。

设$\boldsymbol{x}(t)$是一个解过程，存在函数$V\in C^{1,2}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$，$\dfrac{\partial V}{\partial t}$，$\dfrac{\partial V}{\partial\boldsymbol{x}}$连续，且$\dfrac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}$

存在，那么$V(t)=V(\boldsymbol{x}(t),t)$满足

$$\mathrm{d}V(t)=LV(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}w(t) \tag{1.3}$$

其中：

$$LV(\boldsymbol{x}(t),t)=\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t),t)\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t)\right) \tag{1.4}$$

对应的伊藤积分公式为

$$V(t)=V(a)+\int_a^t\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),t)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t),t)\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t)\right)\right]\mathrm{d}t+$$

$$\int_a^t\left(\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}w(t) \tag{1.5}$$

其中L称为流$\{\boldsymbol{x}(t),\ t\geqslant 0\}$产生的微分生成元，或者称为无穷小算子。

1.4　本书主要工作

第 1 章对随机过程理论及随机控制理论的发展做了回顾，对其研究方法及现状进行了概述和总结。之后，给出了本书所需要的预备知识并概述了本书的主要工作。

第 2 章，研究了一类不确定随机系统的鲁棒自适应控制问题，所研究系统的未知非线性时滞扰动项关于状态及时滞状态范数有界，但增益未知。综合运用线性矩阵不等式方法、自由权矩阵方法，并结合积分不等式、数学恒等变换和范数的性质等控制方法与数学工具，给出了一种鲁棒自适应控制器的设计方法，所设计的控制器能够保证相应的闭环系统均方渐近稳定。由于综合合理地运用多种工具，以及在不等式放大过程中没有舍弃任何负定项，所得结果具有较少的保守性。

第 3 章研究了一类非线性随机区间系统的均方指数稳定性问题。利用随机 Razumikhin–type 定理研究非线性随机时变时滞区间系统的稳定性的文献尚不多见，本章在这方面做了一些工作，得到了一些新的结果。首先，利用 Young 不等

式、特征值和范数的性质及随机微分方程的 Razumikhin-type 定理研究了系统的内部稳定性，给出了系统的均方指数稳定性的充分条件，在此基础上提出了保证系统均方指数稳定的控制器设计方法。传统的控制器设计方法大都涉及 Lyapunov 函数中的正定矩阵的逆，这其中必定会产生计算误差，以至于影响控制精度，本章所提出的方法则回避了这一问题，减少了保守性，仿真结果表明了所提出方法的有效性。

第 4 章和第 5 章提出了一种新的模型——模糊随机双曲正切模型（FSHTM），并研究了基于 FSHTM 的非线性随机系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。针对一类不确定时滞非线性随机系统，给出了存在期望的控制器的以线性矩阵不等式表示的充分条件。根据得到的充分条件所设计的控制器不仅可保证闭环系统均方渐近稳定，而且还能够满足给定的鲁棒 H_∞ 性能指标。同时，还提出了一种新的把非线性矩阵不等式线性化的方法，在控制器的设计过程中减少了计算负担，提高了控制精度，大大降低了所得结果的保守性。另外，通过选择一种新的 Lyapunov-Krasovskii 泛函，针对一类多时滞的随机系统的鲁棒 H_∞ 控制问题得到了新的结果，仿真结果验证了所提出方法的有效性。

第 6 章针对时变时滞不确定随机系统的鲁棒 H_∞ 控制提出了改进的方法。首先，给出时滞依赖并依赖于时滞导数上下界的稳定性准则，找到新的控制器设计方法，与以往方法的不同之处在于其控制增益没有涉及正定矩阵，而是把正定矩阵的要求放宽到了非奇异矩阵。其次，本章利用一般的正定矩阵来构造 Lyapunov-Krasovskii 泛函来研究随机系统的鲁棒 H_∞ 控制，而已有的相关结果则是利用对角正定矩阵来构造泛函的。最后，研究了一类考虑了建模误差的改进的模糊随机双曲正切模型鲁棒 H_∞ 控制问题。

第 7 章研究了基于 FSHTM 的非线性时变时滞随机系统的鲁棒 H_∞ 控制问题。系统模型中含有不确定性参数和时变时滞。首先，根据 Lyapunov 稳定性理论，利用一种数学恒等变换并结合自由权矩阵和线性矩阵不等式方法，设计了双曲正切函数形式的非线性状态反馈控制器。这种控制器实现简单，不仅可保证闭环系统均方渐近稳定，而且还能够达到给定的鲁棒 H_∞ 性能指标。

第 8 章研究了随机马尔科夫跳变系统的鲁棒控制理论和方法，提出了一类新