



全国中医药行业高等教育“十三五”规划教材



全国高等中医药院校规划教材（第十版）

# 线性代数

（供中药学、药学类、制药工程类、医学类、管理类等专业用）

主 编 李秀昌

全国百佳图书出版单位  
中国中医药出版社

全国中医药行业高等教育“十三五”规划教材

全国高等中医药院校规划教材（第十版）

# 线性代数

（供中药学类、药学类、制药工程类、医学类、管理类等专业用）

## 主 审

周仁郁（成都中医药大学）

## 主 编

李秀昌（长春中医药大学）

## 副主编（以姓氏笔画为序）

尹立群（天津中医药大学）

陈世红（江西中医药大学）

魏兴民（甘肃中医药大学）

包 红（辽宁中医药大学）

崔红新（河南中医药大学）

## 编 委（以姓氏笔画为序）

韦 杰（贵阳中医学院）

孙 健（长春中医药大学）

李 杰（广西中医药大学）

李晓红（浙江中医药大学）

要玉坤（河北中医学院）

徐 永（成都中医药大学）

白丽霞（山西中医药大学）

孙继佳（上海中医药大学）

李 嘉（黑龙江中医药大学）

胡灵芝（陕西中医药大学）

洪全兴（福建中医药大学）

曾 聃（湖北中医药大学）

中国中医药出版社

· 北 京 ·

图书在版编目 ( CIP ) 数据

线性代数 / 李秀昌主编. —北京: 中国中医药出版社, 2017.7

全国中医药行业高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978 - 7 - 5132 - 4141 - 0

I . ①线… II . ①李… III . ①线性代数 - 中医药院校 - 教材

IV . ① 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 073742 号

中国中医药出版社出版

北京市朝阳区北三环东路 28 号易亨大厦 16 层

邮政编码 100013

传真 010 64405750

山东百润本色印刷有限公司印刷

各地新华书店经销

开本 850×1168 1/16 印张 10.5 字数 262 千字

2017 年 7 月第 1 版 2017 年 7 月第 1 次印刷

书号 ISBN 978 - 7 - 5132 - 4141 - 0

定价 26.00 元

网址 [www.cptcm.com](http://www.cptcm.com)

社长热线 010-64405720

购书热线 010-89535836

侵权打假 010-64405753

微信服务号 zgzyycbs

微商城网址 <https://kdt.im/LIdUGr>

官方微博 <http://e.weibo.com/cptcm>

天猫旗舰店网址 <https://zgzyycbs.tmall.com>

如有印装质量问题请与本社出版部联系 (010 64405510)

版权专有 侵权必究

全国中医药行业高等教育“十三五”规划教材

全国高等中医药院校规划教材（第十版）

## 专家指导委员会

### 名誉主任委员

王国强（国家卫生计生委副主任 国家中医药管理局局长）

### 主任委员

王志勇（国家中医药管理局副局长）

### 副主任委员

王永炎（中国中医科学院名誉院长 中国工程院院士）

张伯礼（教育部高等学校中医学类专业教学指导委员会主任委员  
天津中医药大学校长）

卢国慧（国家中医药管理局人事教育司司长）

### 委员（以姓氏笔画为序）

马存根（山西中医药大学校长）

王 键（安徽中医药大学教授）

王省良（广州中医药大学校长）

王振宇（国家中医药管理局中医师资格认证中心主任）

方剑乔（浙江中医药大学校长）

孔祥骊（河北中医学院院长）

石学敏（天津中医药大学教授 中国工程院院士）

匡海学（教育部高等学校中药学类专业教学指导委员会主任委员  
黑龙江中医药大学教授）

吕文亮（湖北中医药大学校长）

刘 力（陕西中医药大学校长）

刘振民（全国中医药高等教育学会顾问 北京中医药大学教授）

安冬青（新疆医科大学副校长）

许二平（河南中医药大学校长）

孙忠人（黑龙江中医药大学校长）  
严世芸（上海中医药大学教授）  
李占永（中国中医药出版社副总编辑）  
李秀明（中国中医药出版社副社长）  
李金田（甘肃中医药大学校长）  
杨 柱（贵阳中医学院院长）  
杨关林（辽宁中医药大学校长）  
余曙光（成都中医药大学校长）  
宋柏林（长春中医药大学校长）  
张欣霞（国家中医药管理局人事教育司师承继教处处长）  
陈可冀（中国中医科学院研究员 中国科学院院士 国医大师）  
陈立典（福建中医药大学校长）  
陈明人（江西中医药大学校长）  
武继彪（山东中医药大学校长）  
范吉平（中国中医药出版社社长）  
林超岱（中国中医药出版社副社长）  
周仲瑛（南京中医药大学教授 国医大师）  
周景玉（国家中医药管理局人事教育司综合协调处副处长）  
胡 刚（南京中医药大学校长）  
洪 净（全国中医药高等教育学会理事长）  
秦裕辉（湖南中医药大学校长）  
徐安龙（北京中医药大学校长）  
徐建光（上海中医药大学校长）  
唐 农（广西中医药大学校长）  
彭代银（安徽中医药大学校长）  
路志正（中国中医科学院研究员 国医大师）  
熊 磊（云南中医学院院长）

### **秘 书 长**

王 键（安徽中医药大学教授）  
卢国慧（国家中医药管理局人事教育司司长）  
范吉平（中国中医药出版社社长）

### **办公室主任**

周景玉（国家中医药管理局人事教育司综合协调处副处长）  
林超岱（中国中医药出版社副社长）  
李秀明（中国中医药出版社副社长）  
李占永（中国中医药出版社副总编辑）

## 编审专家组

### 组 长

王国强（国家卫生计生委副主任 国家中医药管理局局长）

### 副组长

张伯礼（中国工程院院士 天津中医药大学教授）

王志勇（国家中医药管理局副局长）

### 组 员

卢国慧（国家中医药管理局人事教育司司长）

严世芸（上海中医药大学教授）

吴勉华（南京中医药大学教授）

王之虹（长春中医药大学教授）

匡海学（黑龙江中医药大学教授）

王 键（安徽中医药大学教授）

刘红宁（江西中医药大学教授）

翟双庆（北京中医药大学教授）

胡鸿毅（上海中医药大学教授）

余曙光（成都中医药大学教授）

周桂桐（天津中医药大学教授）

石 岩（辽宁中医药大学教授）

黄必胜（湖北中医药大学教授）

# 前言

为落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要（2010-2020年）》《关于医教协同深化临床医学人才培养改革的意见》，适应新形势下我国中医药行业高等教育教学改革和中医药人才培养的需要，国家中医药管理局教材建设工作委员会办公室（以下简称“教材办”）、中国中医药出版社在国家中医药管理局领导下，在全国中医药行业高等教育规划教材专家指导委员会指导下，总结全国中医药行业历版教材特别是新世纪以来全国高等中医药院校规划教材建设的经验，制定了“‘十三五’中医药教材改革工作方案”和“‘十三五’中医药行业本科规划教材建设工作总体方案”，全面组织和规划了全国中医药行业高等教育“十三五”规划教材。鉴于由全国中医药行业主管部门主持编写的全国高等中医药院校规划教材目前已出版九版，为体现其系统性和传承性，本套教材在中国中医药教育史上称为第十版。

本套教材规划过程中，教材办认真听取了教育部中医学、中药学等专业教学指导委员会相关专家的意见，结合中医药教育教学一线教师的反馈意见，加强顶层设计和组织管理，在新世纪以来三版优秀教材的基础上，进一步明确了“正本清源，突出中医药特色，弘扬中医药优势，优化知识结构，做好基础课程和专业核心课程衔接”的建设目标，旨在适应新时期中医药教育事业发展和教学手段变革的需要，彰显现代中医药教育理念，在继承中创新，在发展中提高，打造符合中医药教育教学规律的经典教材。

本套教材建设过程中，教材办还聘请中医学、中药学、针灸推拿学三个专业德高望重的专家组成编审专家组，请他们参与主编确定，列席编写会议和定稿会议，对编写过程中遇到的问题提出指导性意见，参加教材间内容统筹、审读稿件等。

本套教材具有以下特点：

## 1. 加强顶层设计，强化中医经典地位

针对中医药人才成长的规律，正本清源，突出中医思维方式，体现中医药学科的人文特色和“读经典，做临床”的实践特点，突出中医理论在中医药教育教学和实践工作中的核心地位，与执业中医（药）师资格考试、中医住院医师规范化培训等工作对接，更具有针对性和实践性。

## 2. 精选编写队伍，汇集权威专家智慧

主编遴选严格按照程序进行，经过院校推荐、国家中医药管理局教材建设专家指导委员会专家评审、编审专家组认可后确定，确保公开、公平、公正。编委优先吸纳教学名师、学科带头人和一线优秀教师，集中了全国范围内各高等中医药院校的权威专家，确保了编写队伍的水平，体现了中医药行业规划教材的整体优势。

## 3. 突出精品意识，完善学科知识体系

结合教学实践环节的反馈意见，精心组织编写队伍进行编写大纲和样稿的讨论，要求每门



教材立足专业需求,在保持内容稳定性、先进性、适用性的基础上,根据其在整个中医知识体系中的地位、学生知识结构和课程开设时间,突出本学科的教学重点,努力处理好继承与创新、理论与实践、基础与临床的关系。

#### 4. 尝试形式创新,注重实践技能培养

为提升对学生实践技能的培养,配合高等中医药院校数字化教学的发展,更好地服务于中医药教学改革,本套教材在传承历届教材基本知识、基本理论、基本技能主体框架的基础上,将数字化作为重点建设目标,在中医药行业教育云平台的总体构架下,借助网络信息技术,为广大师生提供了丰富的教学资源 and 广阔的互动空间。

本套教材的建设,得到国家中医药管理局领导的指导与大力支持,凝聚了全国中医药行业高等教育工作者的集体智慧,体现了全国中医药行业齐心协力、求真务实的工作作风,代表了全国中医药行业为“十三五”期间中医药事业发展和人才培养所做的共同努力,谨向有关单位和个人致以衷心的感谢!希望本套教材的出版,能够对全国中医药行业高等教育的发展和中医药人才的培养产生积极的推动作用。

需要说明的是,尽管所有组织者与编写者竭尽心智,精益求精,本套教材仍有一定的提升空间,敬请各高等中医药院校广大师生提出宝贵意见和建议,以便今后修订和提高。

国家中医药管理局教材建设工作委员会办公室

中国中医药出版社

2016年6月



## 编写说明

线性代数是数学中代数学的一个重要分支。它以向量空间、线性映射为研究对象，广泛地应用于自然科学、工程技术、社会科学、经济管理等各个领域，它的理论、思想和方法在各领域中的应用取得了巨大的成就，是大学素质教育的重要组成部分，是各类高等学校一门重要的基础课程。

本教材是全国中医药行业高等教育“十三五”规划教材之一。随着我国经济建设与科学技术发展的需要，高等教育也迎来了一个快速发展的春天，许多中医药院校相继开设了制药工程、药物制剂、管理、营销、经济等专业，以往只在理工科、管理、经济类院校开设的线性代数课程，现在许多中医药院校也已经开设。为适应高等教育快速发展需要并体现中医药院校开设线性代数课程的特点而编写了本教材。

全书共分8章，主要包括行列式、矩阵、矩阵的变换、向量、线性方程组、矩阵的特征值、二次型、线性代数实验，主要介绍线性代数中的基本概念、定理和方法。本教材力求在知识结构严谨的基础上，内容丰富、知识点突出、难点详略得当、例题有代表性，体现线性代数的知识特点。

本教材是在新世纪全国高等中医药院校创新教材的基础上编写而成。我们非常感谢参加创新教材编写的各位老师，特别要感谢周仁郁老师为本教材所做的大量坚实的奠基工作。此次编写是由全国17所中医药院校长期从事数学教学工作的教师编写而成。

本教材在编写过程中参考了大量同类书刊并借鉴了同行们的经验，同时还得到了编者所在单位及同事和广大读者的大力支持、帮助和鼓励，在此一并表示衷心的感谢。编委会成员在编写过程中认真负责，对教材内容进行了反复推敲、修改，若仍有疏漏之处，恳请广大师生和读者提出宝贵意见，以便再版时修订提高。

《线性代数》编委会

2017年3月

# 目 录

|                        |           |                     |           |
|------------------------|-----------|---------------------|-----------|
| <b>1 行列式</b>           | <b>1</b>  | <b>2.3.4 逆矩阵的计算</b> | <b>38</b> |
| 1.1 行列式的定义             | 1         | 2.4 分块矩阵            | 40        |
| 1.1.1 二阶与三阶行列式         | 1         | 2.4.1 矩阵的分块         | 40        |
| 1.1.2 排列与逆序            | 2         | 2.4.2 矩阵的分块乘法       | 42        |
| 1.1.3 $n$ 阶行列式         | 3         | 2.4.3 分块对角阵         | 43        |
| 1.2 行列式的性质             | 5         | 2.4.4 特殊分块阵         | 44        |
| 1.3 行列式的计算             | 9         | 习题 2                | 46        |
| 1.3.1 特殊行列式            | 9         | <b>3 矩阵的变换</b>      | <b>49</b> |
| 1.3.2 余子式与代数余子式        | 10        | 3.1 初等变换            | 49        |
| 1.3.3 行列式的计算           | 13        | 3.1.1 消元法           | 49        |
| 1.4 克莱姆法则              | 16        | 3.1.2 矩阵的初等变换       | 50        |
| 1.4.1 二元一次方程组的克莱姆法则    | 16        | 3.1.3 矩阵的标准形        | 52        |
| 1.4.2 $n$ 元一次方程组的克莱姆法则 | 17        | 3.1.4 初等矩阵          | 52        |
| 习题 1                   | 20        | 3.1.5 初等变换计算逆矩阵     | 54        |
| <b>2 矩阵</b>            | <b>24</b> | 3.2 矩阵的秩            | 57        |
| 2.1 矩阵概念               | 24        | 3.2.1 矩阵秩的定义        | 57        |
| 2.1.1 矩阵的定义            | 24        | 3.2.2 初等变换求矩阵的秩     | 58        |
| 2.1.2 特殊矩阵             | 25        | 3.2.3 矩阵秩的性质        | 59        |
| 2.1.3 线性变换             | 26        | 习题 3                | 60        |
| 2.2 矩阵的运算              | 27        | <b>4 向量</b>         | <b>62</b> |
| 2.2.1 矩阵的加法            | 27        | 4.1 $n$ 维向量及其运算     | 62        |
| 2.2.2 数与矩阵相乘           | 28        | 4.1.1 $n$ 维向量       | 62        |
| 2.2.3 矩阵乘法             | 28        | 4.1.2 $n$ 维向量的运算    | 63        |
| 2.2.4 矩阵的转置            | 32        | 4.2 向量组的线性相关性       | 65        |
| 2.2.5 方阵的幂             | 33        | 4.2.1 线性组合          | 65        |
| 2.3 逆矩阵                | 34        | 4.2.2 线性相关          | 66        |
| 2.3.1 方阵的行列式           | 34        | 4.2.3 线性相关的常用结论     | 67        |
| 2.3.2 逆矩阵              | 35        | 4.3 向量组的秩           | 68        |
| 2.3.3 可逆的充要条件          | 36        | 4.3.1 极大线性无关组       | 68        |

|                    |            |                           |            |
|--------------------|------------|---------------------------|------------|
| 4.3.2 向量组秩的定理      | 69         | 7.1.2 可逆线性变换              | 106        |
| 4.3.3 矩阵的秩         | 71         | 7.1.3 矩阵合同                | 106        |
| 4.4 向量空间           | 73         | 7.2 二次型的标准形与规范形           | 107        |
| 4.4.1 向量空间概念       | 73         | 7.2.1 二次型的标准形与标准化方法       | 107        |
| 4.4.2 子空间          | 74         | 7.2.2 二次型的规范形与惯性定理        | 114        |
| 习题 4               | 75         | 7.3 正定二次型                 | 116        |
| <b>5 线性方程组</b>     | <b>78</b>  | 习题 7                      | 120        |
| 5.1 线性方程组解的判定      | 78         | <b>8 线性代数实验</b>           | <b>121</b> |
| 5.1.1 线性方程组解的判定定理  | 78         | 8.1 MATLAB R2012b 简介      | 121        |
| 5.1.2 线性方程组解的判定方法  | 80         | 8.1.1 实验目的                | 121        |
| 5.2 线性方程组解的结构      | 81         | 8.1.2 MATLAB R2012b 的工作环境 | 121        |
| 5.2.1 齐次线性方程组解的结构  | 81         | 8.2 矩阵与向量的基本实验            | 122        |
| 5.2.2 非齐次线性方程组解的结构 | 85         | 8.2.1 实验目的                | 122        |
| 习题 5               | 87         | 8.2.2 矩阵的创建               | 123        |
| <b>6 矩阵的特征值</b>    | <b>90</b>  | 8.2.3 矩阵的基本运算             | 125        |
| 6.1 正交矩阵           | 90         | 8.2.4 向量的生成               | 128        |
| 6.1.1 向量的内积        | 90         | 8.2.5 向量的基本运算             | 129        |
| 6.1.2 正交向量组        | 91         | 8.3 矩阵的初等变换与线性方程组实验       | 131        |
| 6.1.3 向量组的正交规范化    | 91         | 8.3.1 实验目的                | 131        |
| 6.1.4 正交矩阵的概念及性质   | 93         | 8.3.2 矩阵的基本操作             | 131        |
| 6.2 矩阵的特征值与特征向量    | 94         | 8.3.3 向量组的线性相关性           | 133        |
| 6.2.1 特征值与特征向量     | 94         | 8.3.4 线性方程组的解法            | 134        |
| 6.2.2 特征值与特征向量的性质  | 97         | 8.3.5 相似矩阵与二次型            | 137        |
| 6.3 相似矩阵           | 99         | 8.4 综合应用                  | 138        |
| 6.3.1 相似矩阵的概念      | 99         | 8.4.1 实验目的                | 138        |
| 6.3.2 矩阵对角化的条件     | 100        | 8.4.2 动物数量的预测问题           | 138        |
| 6.3.3 实对称矩阵的相似矩阵   | 101        | 8.4.3 中成药药方配制问题           | 140        |
| 习题 6               | 102        | 8.4.4 最优方案的决策问题           | 142        |
| <b>7 二次型</b>       | <b>104</b> | 习题 8                      | 144        |
| 7.1 二次型及其矩阵表示      | 104        | <b>测试题</b>                | <b>146</b> |
| 7.1.1 二次型的概念及其矩阵表示 | 104        | <b>参考答案</b>               | <b>149</b> |

# 1 行列式

## 1.1 行列式的定义

### 1.1.1 二阶与三阶行列式

下面,从求解二元一次方程组的问题中引出二阶行列式的定义.

**例 1** 求解二元线性方程组,即

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

**解** 应用加减消元法,在  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$  时得到

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}$$

观察发现,方程的解  $x_1, x_2$  一般表达式中,分母都是“ $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ”.

为方便记忆和书写,引入记号和规定运算,称为二阶行列式(2 order determinant),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (1-1)$$

其中,每个数  $a_{ij}$  ( $i, j=1, 2$ ) 称为该行列式的元素. 二阶行列式,共有  $2^2=4$  个元素. 元素的第一个下标  $i$  表示该元素在行列式的行序,第二个下标  $j$  表示元素的列序,任一元素  $a_{ij}$  可以通过其行序与列序唯一交叉确定其在行列式中位置. 显然,二阶行列式的值为 2! 个项的代数和,且可以视为左上角与右下角乘积减去右上角与左下角乘积,称对角线法则(Sarrus 规则).

**例 2** 利用对角线法则计算二阶行列式的值.

$$\textcircled{1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \quad \textcircled{2} \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

**解** 由二阶行列式的对角线法则,得到

$$\textcircled{1} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \times 2 - (-1) \times 3 = 13$$

$$\textcircled{2} \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

与二阶行列式类似,三阶行列式也是从求解三元一次方程组的问题中引出. 这里,我们直接给出其定义.

由  $3^2=9$  个数,排成三行三列的式子,并规定:实线上元素的乘积前加正号,虚线上元素的乘积前加负号,称为三阶行列式的对角线法则,如图 1-1 所示.

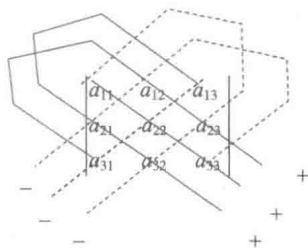


图 1-1 三阶行列式对角线法则

这样规定的记号和运算,即称为三阶行列式(3 order determinant),即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1-2)$$

显然,三阶行列式的值为  $3! = 6$  个项的代数和.

**例 3** 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

**解** 利用对角线法则得到

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 0 \times (-1) + 2 \times 1 \times 3 + 3 \times (-1) \times 1 - 3 \times 0 \times 3 - 1 \times (-1) \times 1 - (-1) \times 1 \times 2 = 6$$

### 1.1.2 排列与逆序

作为定义  $n$  阶行列式的准备,先给出一些有关排列的基本概念.

由  $n$  个不同数码  $1, 2, \dots, n$  组成的一个有序数组  $i_1 i_2 \dots i_n$ , 称为一个  $n$  级排列. 如由  $1, 2, 3$  组成的三级排列有且仅有  $3! = 6$  个, 即

$$123, 132, 213, 231, 312, 321$$

同理,  $n$  级排列一共有  $n!$  个.

**定义 1** 在一个  $n$  级排列  $i_1 i_2 \dots i_n$  中, 任意找出两个数, 若较大的数  $i_j$  排在较小的数  $i_i$  之前 ( $i_j < i_i$ ), 则称  $i_j$  与  $i_i$  构成一个逆序. 一个  $n$  级排列的逆序总数, 称为这个排列的逆序数, 记为  $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$ .

例如, 在排列  $231$  中,  $2$  与  $1$  构成一个逆序,  $3$  与  $1$  构成一个逆序, 共有  $2$  个逆序, 这个排列的逆序数为  $2$ , 记为  $\tau(231) = 2$ .

**例 4** 计算排列的逆序数.

①  $2431$

②  $n(n-1)(n-2) \dots 321$

**解** 分别计算逆序的个数, 得到

①  $2431$  的逆序有  $21, 43, 41, 31$ , 故  $\tau(2431) = 4$ .

②  $n(n-1)(n-2) \dots 321$  的逆序有

$$[n(n-1), n(n-2), \dots, n1], [(n-1)(n-2), \dots, (n-1)1], \dots, [32, 31], 21$$

故得到

$$\tau[n(n-1)(n-2) \dots 321] = (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

**定义 2** 逆序数  $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$  是偶数或  $0$  的排列称为偶排列, 逆序数  $\tau(i_1 i_2 \dots i_n)$  为奇数的排列称为奇排列.

如:由于  $\tau(2431)=4$ , 排列 2431 是偶排列.  $\tau(45321)=9$ , 排列 45321 是奇排列.

把一个排列中某两个数的位置互换, 而其余的数不动, 就得到另一个排列, 这样的变换称为一个对换. 例如, 排列 2134 施以对换  $(1,4)$  后得到排列 2431.

**定理 1** 对换改变排列的奇偶性.

也就是说, 任意一个排列经过一次对换, 奇排列变成偶排列, 偶排列变成奇排列.

**证明** 先看一个特殊的情形, 即对换的两个数在排列中是相邻的情形. 设排列为

$$\cdots jk \cdots$$

经过  $(j,k)$  对换变成新排列

$$\cdots kj \cdots$$

这里, “ $\cdots$ ” 表示那些不动的数, 显然新排列仅比原排列增加或减少了一个逆序, 显然与原排列的奇偶性相反.

再看一般的情形, 设排列为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k \cdots$$

经过  $(j,k)$  对换变成

$$\cdots k i_1 i_2 \cdots i_s j \cdots$$

可以视为原排列将数码  $j$  依次与  $i_1, i_2, \cdots, i_s, k$  作  $s+1$  次相邻对换, 变为

$$\cdots i_1 i_2 \cdots i_s k j \cdots$$

再将  $k$  依次与  $i_s, i_{s-1}, \cdots, i_1$  作  $s$  次相邻对换得到新排列. 即, 新排列可以由原排列经过  $2s+1$  次相邻对换得到.  $2s+1$  是奇数, 显然, 奇数次这样的对换的最终结果还是改变奇偶性.

**定理 2**  $n$  个数码 ( $n>1$ ) 共有  $n!$  个  $n$  级排列, 其中奇偶排列各占一半.

**证明**  $n$  级排列的总数  $n!$  为偶数个 ( $n>1$ ). 若奇偶排列个数不等, 则不妨设奇排列个数少于偶排列个数. 若将所有的排列都施以相同对换, 例如都对换  $(1,2)$ , 则  $n$  级排列的全体在施以相同对换后还是相同的  $n$  级排列全体. 但由定理 1, 对换后的偶排列个数少于奇排列个数, 因而矛盾. 所以, 奇偶排列数的个数相等, 各占一半.

### 1.1.3 $n$ 阶行列式

有了排列的一些基础知识, 就可以在分析三阶行列式表达式特点的基础上, 给出  $n$  阶行列式的定义.

由式 1-2 可以看出, 每一项都是取自不同行不同列的 3 个元素的积. 在书写时, 可以把每项元素的行标排成 123 自然排列, 得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \quad (1-3)$$

行标排成 123 自然排列, 3 个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3} \quad (1-4)$$

由于 3 个数  $j_1, j_2, j_3$  为三级排列共有 6 个, 正好可以用来决定三阶行列式 6 项的符号. 现在分析式 1-3 中的一、二、三项为什么带正号, 四、五、六项为什么带负号? 可以看出, 符号与列标排列

$j_1 j_2 j_3$  的逆序数有关. 显然 123, 231, 312 都为偶排列, 321, 213, 132 都为奇排列. 当  $j_1 j_2 j_3$  为偶排列时前面带正号, 相反带负号. 故每项前所带符号可以表示为  $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)}$ . 从而, 三阶行列式可以表示为所有取自不同行、不同列的三个元素乘积  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$  的代数和, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 j_3} (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} \quad (1-5)$$

其中,  $\Sigma$  表示把所有通项  $(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$  加起来, 而  $j_1 j_2 j_3$  要取完所有三级排列.

**定义 3** 由  $n^2$  个数排成  $n$  行  $n$  列的数表, 并规定数表的运算规律所构成的记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad (1-6)$$

称为  $n$  阶行列式. 行列式可用字母  $D$  表示, 有时也记为  $\det(a_{ij})$  或  $|a_{ij}|$ , 这里称  $a_{ij}$  为行列式的元素, 其它符号与三阶行列式意义相同.

$n$  阶行列式的定义具有如下特点: 行列式由  $n!$  项求和组成; 每项是取自不同行、不同列的元素乘积, 每项各元素行标按自然数顺序排列后就组成了行列式的一般项  $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ ; 在行标按自然数顺序排列下, 各项前的符号由列标排列的奇偶性确定, 即由  $(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$  确定. 若排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为奇排列则此项取负号, 若排列  $j_1 j_2 \cdots j_n$  为偶排列则此项取正号, 故行列式项的符号正负各半.

**定理 3**  $n$  阶行列式也可定义为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n} \quad (1-7)$$

其中,  $t$  为行标排列  $p_1 p_2 \cdots p_n$  的逆序数,

**证明** 由行列式的定义

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

式 1-7 记为

$$D_1 = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

由行列式定义的特点知: 对于  $D$  中的每一项  $(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ , 总有且仅有  $D_1$  中某一项  $(-1)^s a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$  与之对应并相等; 反之, 对于  $D_1$  中的每一项  $(-1)^s a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$ , 也总有且仅有  $D$  中某一项  $(-1)^t a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  与之对应并相等; 于是  $D$  与  $D_1$  中的项是一一对应关系且相等, 所以  $D = D_1$ .

$n$  阶行列式在  $n > 3$  时, 不能使用对角线法则计算.



## 例5 计算行列式的值

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解 此行列式中有很多元素为0,则通项  $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$  中就有很多项为0,我们只需找出所有元素都不为0的项加起来即可.

由于每项取自不同的行与不同的列,第一行只有选  $a_{14}$  才不为0,第二行只有选  $a_{23}$ ,第三行只有选  $a_{32}$ ,第四行只有选  $a_{41}$ . 这样  $4! = 24$  项中,只有  $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$  不为0,故行列式的值为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

## 1.2 行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题,但当阶数  $n$  较大时,运算相当麻烦,而直接应用定义来计算行列式的值也不太可能. 因此有必要介绍一些有关行列式的重要性质,在计算行列式时,应用其性质往往可以简化计算过程,起到事半功倍的效果.

## 基本性质

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式  $D^T$  称为行列式  $D$  的转置行列式. 即把原行列式的各行变成相应的列,所得行列式称为转置行列式.

例如,

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 8 \end{vmatrix}, \quad D^T = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$$

则  $D$  与  $D^T$  互为转置行列式.

性质1 行列式与其转置行列式的值相等,即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1-8)$$

**证明** 设  $D = \det(a_{ij})$  的转置行列式为

$$D^T = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

则行列式  $D^T$  的元素与行列式  $D$  的元素间关系为  $b_{ij} = a_{ji} (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ . 由行列式的定义知

$$D^T = \sum (-1)^t b_{1p_1} b_{2p_2} \cdots b_{np_n} = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

根据定理 3 及式 1-7 知

$$D = \sum (-1)^t a_{p_1 1} a_{p_2 2} \cdots a_{p_n n}$$

故  $D^T = D$ , 证毕.

这里特别说明, 根据性质 1, 行列式对于行成立的性质对于列也成立, 反之亦然.

**性质 2** 把行列式的两行(列)互换, 所得行列式与原行列式绝对值相等, 符号相反, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \text{ 行与 } j \text{ 行间互换}) \quad (1-9)$$

**证明** 设行列式

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式  $D = \det(a_{ij})$  交换  $i, j$  两行得到, 即当  $k \neq i, j$  时,  $a_{kp} = b_{kp}$ ; 当  $k = i, j$  时,  $a_{ip} = b_{jp}, a_{jp} = b_{ip}$ .

故有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum (-1)^t b_{1p_1} \cdots b_{ip_i} \cdots b_{jp_j} \cdots b_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{np_n} \\ &= \sum (-1)^t a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} \end{aligned}$$

这里,  $1 \cdots i \cdots j \cdots n$  为自然排列,  $t$  是排列  $p_1 \cdots p_i \cdots p_j \cdots p_n$  的逆序数. 设排列  $p_1 \cdots p_j \cdots p_i \cdots p_n$  的逆序数为  $t_1$ , 由于以上两个排列是通过交换得到的, 所以  $(-1)^t = -(-1)^{t_1}$ .

故

$$D_1 = - \sum (-1)^{t_1} a_{1p_1} \cdots a_{ip_j} \cdots a_{jp_i} \cdots a_{np_n} = -D$$

证毕.

**推论 1** 如果行列式的某两行(列)的元素对应相等, 那么行列式的值为零.

**证明** 设  $D$  为具有推论 1 特点的行列式, 则把元素对应相等的两行(列)互换位置, 根据性质 2, 需要在新行列式前添加负号, 但对换后仍是原行列式, 得到  $D = -D$ , 故  $D = 0$ .