高等数学

经管类

主编　李胜军　王志刚　岳晓蕊

中国科学技术大学出版社

高等数学

经管类

主编　李胜军　王志刚　岳晓蕊

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是编者根据多年的教学实践，按照继承与改革的精神，结合经管类高等数学教学的基本要求，在参考国内外众多教材的基础上编写而成的.

本书内容共分 9 章，分别为函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微积分学、无穷级数、微分方程与差分方程.其中标有“ * ”号的内容个别专业可根据实际课时条件选择讲授.

本书注重突出高等数学的基本思想、基本理论和方法，保持经典教材的优点，适当介绍现代数学的思想、概念和术语；对某些内容，通过进行结构调整，适当降低理论深度，加强应用能力的培养.其特点是：结构严谨，逻辑清晰，注重应用，叙述详尽，例题丰富，便于自学.

本书可供高等院校经管类专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类/李胜军，王志刚，岳晓蕊主编.—合肥：中国科学技术大学出版社，2017.3

ISBN 978-7-312-04173-0

Ⅰ.高…　Ⅱ.① 李… ② 王… ③ 岳…　Ⅲ.高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 047213 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://www.press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷　安徽省瑞隆印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　24.25
字数　636 千
版次　2017 年 3 月第 1 版
印次　2017 年 3 月第 1 次印刷
定价　52.00 元

前　言

为了适应“高等数学”课程教学改革、提高教学质量，实行高等数学课程分层次教学、统一命题、统一考试，以及满足文科实验班教学的需要，海南大学数学系集结长期从事高等数学教学工作以及从事高等数学教育研究的骨干教师编写了本教材，它是编者教研经验的总结与体现.

在本书的编写过程中，我们注重把现代数学的思想方法与现代认知理论结合在一起，既突出数学学科自身的特点，继承和保持经典高等数学教材的优点，又力争从体系、内容、方法上进行改革，有所创新，力图做到遵循认知规律，使之简明易懂；既便于教师组织教学，又利于学生理解掌握；教学内容的深度、广度既与经管类各专业高等数学课程的教学基本要求相当，又与教育部最新颁布的研究生入学考试各专业考试大纲中高等数学的内容相衔接，符合经管类各专业对数学要求越来越高的趋势.本书还充分体现了高等数学在经管类各专业、各领域的广泛应用，加强了对学生应用数学方法分析问题、解决问题能力的培养.

本书的例子、习题均按节配置，遵循循序渐进的原则，既注意基本概念、基本理论和方法，又注意加强各专业方面应用性的例子和习题的配置.每章后配置有课堂练习题、总习题，供学完一章后复习、总结、提高之用.每章开始给出的学习指导是按照教学大纲的要求编写的，目的是使学生了解本章的重难点和必须掌握的知识点，读者应认真阅读，加以巩固和提高.

完成本书全部教学内容，建议用时 128 学时，带有“ * ”号内容教师可以根据学生实际自行把握.

本书由李胜军、王志刚、岳晓蕊主编.第 1 章由李海燕和李胜军执笔，第 2 章由吴语来执笔，第 3 章由王鑫执笔，第 4 章由岳晓蕊执笔，第 5 章由王鑫和岳晓蕊执笔，第 6 章由郭锦执笔，第 7、8 章及附录由李胜军执笔，第 9 章由李海燕执笔.全书由李胜军、王志刚、岳晓蕊修改、统稿.

本书的出版得到海南大学科研启动基金项目(kyqd1512)和海南省自然科学基金项目(20161001)资助.

限于编者水平，书中难免存在错误和不妥之处，恳请广大读者提出宝贵的意见和建议.

编　者

2016 年 9 月

目　录

前言 ………………………………………………………………………………（ⅰ）

第1章　函数 ………………………………………………………………………（1）
1.1　函数概念 ………………………………………………………………（1）
1.1.1　集合、区间与邻域 ……………………………………………（1）
1.1.2　映射 ……………………………………………………………（4）
1.1.3　函数 ……………………………………………………………（5）
习题1.1 …………………………………………………………………（7）
1.2　函数的简单特性 ………………………………………………………（7）
1.2.1　函数的性质 ……………………………………………………（8）
1.2.2　复合函数与反函数 ……………………………………………（10）
1.2.3　函数的运算 ……………………………………………………（12）
习题1.2 …………………………………………………………………（13）
1.3　初等函数 ………………………………………………………………（13）
1.3.1　基本初等函数 …………………………………………………（13）
1.3.2　初等函数 ………………………………………………………（16）
1.3.3　显函数和隐函数 ………………………………………………（17）
习题1.3 …………………………………………………………………（17）
1.4　经济学中的常用函数 …………………………………………………（17）
习题1.4 …………………………………………………………………（20）
总习题1 ……………………………………………………………………（20）

第2章　极限与连续 ………………………………………………………（23）
2.1　数列的极限 ……………………………………………………………（23）
2.1.1　数列极限的定义 ………………………………………………（23）
2.1.2　收敛数列的性质 ………………………………………………（26）
习题2.1 …………………………………………………………………（27）
2.2　函数的极限 ……………………………………………………………（28）
2.2.1　函数极限的定义 ………………………………………………（28）
2.2.2　函数极限的性质 ………………………………………………（31）
习题2.2 …………………………………………………………………（32）
2.3　无穷小量与无穷大量 …………………………………………………（33）
2.3.1　无穷小量 ………………………………………………………（33）

2.3.2 无穷大量 …… (35)
2.3.3 无穷小量与无穷大量的关系 …… (35)
习题 2.3 …… (36)
2.4 极限运算法则 …… (36)
2.4.1 极限的四则运算法则 …… (36)
2.4.2 复合函数的极限运算法则 …… (38)
习题 2.4 …… (39)
2.5 极限存在准则、两个重要极限 …… (40)
2.5.1 极限存在准则 …… (40)
2.5.2 两个重要极限 …… (42)
2.5.3 连续复利公式 …… (45)
习题 2.5 …… (46)
2.6 无穷小量与无穷大量阶的比较 …… (47)
习题 2.6 …… (50)
2.7 函数的连续性与间断点 …… (51)
2.7.1 函数的连续性 …… (51)
2.7.2 函数的间断点 …… (53)
习题 2.7 …… (55)
2.8 连续函数的性质 …… (56)
2.8.1 连续函数的相关定理 …… (56)
2.8.2 闭区间上连续函数的性质 …… (58)
*2.8.3 一致连续 …… (60)
习题 2.8 …… (60)
总习题 2 …… (61)

第 3 章 导数与微分 …… (64)
3.1 导数的概念 …… (64)
3.1.1 引出导数概念的实例 …… (64)
3.1.2 导数的定义 …… (65)
3.1.3 求导数举例 …… (66)
3.1.4 单侧导数 …… (68)
3.1.5 导数的几何意义 …… (68)
3.1.6 函数可导性与连续性的关系 …… (69)
习题 3.1 …… (70)
3.2 函数的求导法则和求导公式 …… (71)
3.2.1 导数的四则运算法则 …… (71)
3.2.2 反函数的求导法则 …… (72)
3.2.3 复合函数的求导法则 …… (73)
3.2.4 基本求导法则和导数公式 …… (75)
习题 3.2 …… (76)

3.3　高阶导数 …… (77)
3.3.1　高阶导数的概念 …… (77)
3.3.2　高阶导数的运算法则 …… (79)
习题3.3 …… (80)
3.4　隐函数的导数与参数方程所确定函数的导数 …… (81)
3.4.1　隐函数的导数 …… (81)
3.4.2　由参数方程所确定的函数的导数 …… (83)
习题3.4 …… (84)
3.5　微分 …… (85)
3.5.1　微分的定义 …… (86)
3.5.2　微分的几何意义 …… (88)
3.5.3　基本初等函数的微分公式与微分运算法则 …… (88)
*3.5.4　高阶微分 …… (90)
习题3.5 …… (92)
3.6　导数与微分在经济学中的应用 …… (93)
3.6.1　边际分析 …… (93)
3.6.2　弹性分析 …… (95)
3.6.3　微分的应用 …… (96)
习题3.6 …… (96)
总习题3 …… (97)

第4章　微分中值定理与导数的应用 …… (100)
4.1　微分中值定理 …… (100)
4.1.1　罗尔定理 …… (100)
4.1.2　拉格朗日中值定理 …… (102)
*4.1.3　柯西中值定理 …… (105)
习题4.1 …… (105)
4.2　洛必达法则 …… (106)
4.2.1　$\frac{0}{0}$型未定式 …… (106)
4.2.2　$\frac{\infty}{\infty}$型未定式 …… (108)
4.2.3　其他未定式 …… (109)
习题4.2 …… (111)
*4.3　泰勒公式 …… (112)
习题4.3 …… (115)
4.4　函数的单调性与曲线的拐点 …… (116)
4.4.1　函数单调性的判别法 …… (116)
4.4.2　曲线的凹凸性与拐点 …… (117)
习题4.4 …… (120)

4.5 函数的极值与最大值、最小值 ……………………………………………… (120)
4.5.1 函数的极值及其求法 ……………………………………………… (121)
4.5.2 最大最小值问题 ……………………………………………… (123)
习题 4.5 ……………………………………………… (126)
4.6 函数图形的描绘 ……………………………………………… (127)
4.6.1 渐近线 ……………………………………………… (127)
4.6.2 函数图形的描绘 ……………………………………………… (128)
习题 4.6 ……………………………………………… (130)
总习题 4 ……………………………………………… (131)

第 5 章 不定积分 ……………………………………………… (134)
5.1 不定积分的概念及性质 ……………………………………………… (134)
5.1.1 原函数与不定积分的概念 ……………………………………………… (134)
5.1.2 不定积分的几何意义 ……………………………………………… (135)
5.1.3 基本积分公式 ……………………………………………… (136)
5.1.4 不定积分的性质 ……………………………………………… (138)
习题 5.1 ……………………………………………… (140)
5.2 换元积分法 ……………………………………………… (141)
5.2.1 第一类换元积分法 ……………………………………………… (141)
5.2.2 第二类换元积分法 ……………………………………………… (145)
习题 5.2 ……………………………………………… (150)
5.3 分部积分法 ……………………………………………… (151)
习题 5.3 ……………………………………………… (155)
*5.4 几类特殊函数的不定积分 ……………………………………………… (155)
5.4.1 有理函数的不定积分 ……………………………………………… (156)
5.4.2 可化为有理函数的不定积分 ……………………………………………… (157)
5.4.3 简单无理函数的积分 ……………………………………………… (158)
习题 5.4 ……………………………………………… (160)
总习题 5 ……………………………………………… (160)

第 6 章 定积分及其应用 ……………………………………………… (163)
6.1 定积分的概念及性质 ……………………………………………… (163)
6.1.1 两个实例 ……………………………………………… (163)
6.1.2 定积分的定义 ……………………………………………… (165)
6.1.3 定积分的几何意义 ……………………………………………… (166)
6.1.4 定积分的性质 ……………………………………………… (167)
习题 6.1 ……………………………………………… (170)
6.2 微积分基本公式 ……………………………………………… (170)
6.2.1 积分上限函数及其导数 ……………………………………………… (171)
6.2.2 微积分基本定理(牛顿—莱布尼茨公式) ……………………………………………… (173)

习题 6.2 ······ (175)
6.3 定积分的计算 ······ (176)
6.3.1 定积分的换元积分法 ······ (176)
6.3.2 定积分的分部积分法 ······ (180)
习题 6.3 ······ (182)
6.4 反常积分 ······ (183)
6.4.1 无穷限的反常积分 ······ (183)
6.4.2 无界函数的反常积分 ······ (185)
*6.4.3 Γ 函数与 B 函数 ······ (187)
习题 6.4 ······ (189)
6.5 定积分的几何应用 ······ (190)
6.5.1 定积分的元素法 ······ (190)
6.5.2 利用定积分计算平面图形的面积 ······ (190)
6.5.3 利用定积分计算立体图形的体积 ······ (195)
*6.5.4 平面曲线的弧长 ······ (198)
习题 6.5 ······ (199)
6.6 定积分在经济上的应用 ······ (200)
6.6.1 边际问题 ······ (200)
6.6.2 平均日库存 ······ (200)
6.6.3 资本现值和投资问题 ······ (201)
6.6.4 消费者剩余 ······ (202)
6.6.5 其他经济问题 ······ (203)
习题 6.6 ······ (203)
总习题 6 ······ (204)

第 7 章 多元函数微积分学 ······ (207)
7.1 空间解析几何简介 ······ (207)
7.1.1 空间直角坐标系 ······ (207)
7.1.2 曲面及其方程 ······ (209)
7.1.3 常见曲面 ······ (211)
习题 7.1 ······ (213)
7.2 多元函数的基本概念 ······ (214)
7.2.1 区域与邻域 ······ (214)
7.2.2 多元函数的概念 ······ (215)
7.2.3 二元函数的极限与连续 ······ (216)
习题 7.2 ······ (218)
7.3 偏导数与全微分 ······ (219)
7.3.1 偏导数的定义及其计算方法 ······ (219)
7.3.2 偏导数的意义及函数偏导数存在与函数连续的关系 ······ (222)
7.3.3 高阶偏导数 ······ (223)

7.3.4 全微分 …………………………………………………………………… (224)
习题 7.3 …………………………………………………………………………… (227)
7.4 多元复合函数与隐函数求导 ………………………………………………… (228)
7.4.1 多元复合函数的求导法则 …………………………………………… (228)
7.4.2 隐函数的微分法 ……………………………………………………… (231)
习题 7.4 …………………………………………………………………………… (234)
7.5 多元函数的极值及其应用 …………………………………………………… (235)
7.5.1 多元函数的极值与最值 ……………………………………………… (235)
7.5.2 条件极值——拉格朗日乘数法 ……………………………………… (238)
习题 7.5 …………………………………………………………………………… (240)
7.6 二重积分 ……………………………………………………………………… (240)
7.6.1 二重积分的概念与性质 ……………………………………………… (240)
7.6.2 二重积分的计算 ……………………………………………………… (243)
7.6.3 无界区域上的二重积分 ……………………………………………… (251)
习题 7.6 …………………………………………………………………………… (253)
总习题 7 …………………………………………………………………………… (254)

第 8 章 无穷级数 ………………………………………………………………… (257)
8.1 常数项级数的概念和性质 …………………………………………………… (257)
8.1.1 常数项级数的概念 …………………………………………………… (257)
8.1.2 收敛级数的基本性质 ………………………………………………… (259)
8.1.3 级数收敛的必要条件 ………………………………………………… (261)
习题 8.1 …………………………………………………………………………… (261)
8.2 常数项级数的审敛法 ………………………………………………………… (262)
8.2.1 正项级数及其审敛法 ………………………………………………… (262)
8.2.2 交错级数及其审敛法 ………………………………………………… (267)
8.2.3 绝对收敛与条件收敛 ………………………………………………… (268)
习题 8.2 …………………………………………………………………………… (270)
8.3 幂级数 ………………………………………………………………………… (270)
8.3.1 函数项级数的概念 …………………………………………………… (270)
8.3.2 幂级数概念及其收敛性 ……………………………………………… (271)
8.3.3 幂级数的运算 ………………………………………………………… (274)
习题 8.3 …………………………………………………………………………… (277)
8.4 函数展开成幂级数 …………………………………………………………… (278)
8.4.1 泰勒级数 ……………………………………………………………… (278)
8.4.2 函数展开成幂级数 …………………………………………………… (279)
习题 8.4 …………………………………………………………………………… (282)
总习题 8 …………………………………………………………………………… (283)

第 9 章　微分方程与差分方程 ………………………………… (285)
9.1　微分方程的基本概念 ………………………………… (285)
习题 9.1 ………………………………… (288)
9.2　一阶微分方程 ………………………………… (289)
9.2.1　可分离变量的微分方程 ………………………………… (289)
9.2.2　齐次方程 ………………………………… (291)
9.2.3　一阶线性微分方程 ………………………………… (292)
习题 9.2 ………………………………… (295)
9.3　二阶常系数线性微分方程 ………………………………… (296)
9.3.1　线性微分方程解的结构 ………………………………… (296)
9.3.2　二阶常系数齐次线性微分方程 ………………………………… (297)
9.3.3　二阶常系数非齐次线性微分方程 ………………………………… (300)
习题 9.3 ………………………………… (304)
9.4　差分方程的基本概念 ………………………………… (305)
9.4.1　差分的概念及性质 ………………………………… (305)
9.4.2　差分方程的基本概念 ………………………………… (307)
9.4.3　线性差分方程解的结构 ………………………………… (308)
习题 9.4 ………………………………… (309)
9.5　一阶常系数线性差分方程 ………………………………… (309)
9.5.1　一阶常系数齐次线性差分方程 ………………………………… (309)
9.5.2　一阶常系数非齐次线性差分方程 ………………………………… (310)
习题 9.5 ………………………………… (314)
9.6　微分方程与差分方程在经济学中的应用 ………………………………… (315)
习题 9.6 ………………………………… (317)
总习题 9 ………………………………… (318)

答案与提示 ………………………………… (321)

附录 1　常用的初等数学公式 ………………………………… (348)

附录 2　几种常用的曲线图像及其方程 ………………………………… (351)

附录 3　常用积分公式 ………………………………… (354)

附录 4　教材中出现的数学家简介 ………………………………… (363)

参考文献 ………………………………… (375)

第1章 函 数

学 习 指 导

本章教学目的与要求:

(1) 理解函数的概念,掌握函数的表示方法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

(2) 了解函数的奇偶性、单调性、周期性和有界性.

(3) 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图像.

重点:函数的定义,复合函数及分段函数的概念,基本初等函数的性质及其图像.

难点:复合函数,反函数.

关键词:函数,初等函数,经济函数.

函数是现代数学的基本概念之一,是高等数学的主要研究对象,本章我们将介绍函数的相关知识.

1.1 函 数 概 念

1.1.1 集合、区间与邻域

1. 集合概念

把具有某种特定性质的对象的全体称为集合(简称"集").通常把这些研究对象称为该集合的元素.集合通常用大写的拉丁字母如 $A,B,C,\cdots$ 来表示,而元素则用小写的拉丁字母如 $a,b,x,y,\cdots$ 来表示.当 x 是集合 S 的元素时,称 x 属于 S,记为 $x\in S$;当 x 不是集合 S 的元素时,称 x 不属于 S,记为 $x\notin S$.

集合的表示方法通常有两种.一种是列举法:把集合中的全体元素一一列举出来表示.例如,由四个字母 a,b,c,d 组成的集合 A 可用 $A=\{a,b,c,d\}$ 表示.另一种是描述法:若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成的,就可以表示为

$$M=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如,由 4 的平方根组成的集合 B 可表示为 $B=\{x\mid x^2=4\}$.

对于数集,习惯上常用特定的记号表示,如用 **R** 表示全体实数构成的集合,用 **N** 来表示全体非负整数即自然数构成的集合,用 **Z** 来表示全体整数构成的集合,用 **Q** 来表示全体有理

数构成的集合,不含任何元素的集合称为空集,用 $\varnothing$ 表示.

2. 集合的运算

设 A,B 是两个集合,若 A 中所有元素都属于 B,即若 $x\in A$,必有 $x\in B$,则称集合 A 是集合 B 的子集,记作 $A\subseteq B$(读作"A 包含于 B")或 $B\supseteq A$(读作"B 包含 A").如果集合 A 与集合 B 互为子集,即 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称集合 A 与集合 B 相等,记作 $A=B$.例如,设

$$A=\mathbf{R},\quad B=\{x\,|\,x\text{ 为数轴上的点}\},$$

则 $A=B$.

设 A,B 是两个集合,集合的基本运算有以下几种.

(1) 并集:所有属于 A 或属于 B 的元素构成的集合,记作 $A\cup B$(如图 1.1(a)所示),即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

(2) 交集:所有既属于 A 又属于 B 的元素构成的集合,记作 $A\cap B$(如图 1.1(b)所示),即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

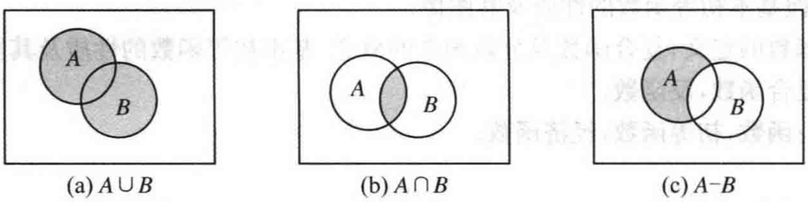

图 1.1

(3) 差集:所有属于 A 但不属于 B 的元素构成的集合,记作 $A-B$(如图 1.1(c)所示),即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

某些情况下,我们所讨论的问题限定在一个全集 E 中进行,所研究的集合 A 都是 E 的子集,称 $E-A$ 为集合 A 的补集或余集,记作 A^{C} 或 $\overline{A}$.例如,在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x\,|\,0<x\leqslant 3\}$的余集就是

$$A^{\mathrm{C}}=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x>3\}.$$

集合的运算满足下面的基本法则.

设 A,B,C 为三个任意集合,则有:

(1) 交换律.

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

(2) 结合律.

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C).$$

(3) 分配律.

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C),$$
$$(A-B)\cap C=(A\cap C)-(B\cap C).$$

(4) 对偶律.

$$(A\cup B)^{\mathrm{C}}=A^{\mathrm{C}}\cap B^{\mathrm{C}},\quad (A\cap B)^{\mathrm{C}}=A^{\mathrm{C}}\cup B^{\mathrm{C}}.$$

3. 区间与邻域

区间与邻域是高等数学中常用的两种集合形式.

设 $a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$,则对特定的数集有以下记号和定义.

(1) 开区间:$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$.

(2) 闭区间:$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$.

(3) 半开半闭区间:$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$.

这里(1),(2),(3)都为有限区间,实数 a,b 称为区间的端点,数 $b-a$ 称为区间长度.

此外还有无限区间,引入 $+\infty$ 及 $-\infty$(分别读作“正无穷大”和“负无穷大”),它们不表示任何数,仅仅是记号.

(4) 无限区间:$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$,$(a,+\infty)=\{x\mid x>a\}$,$(-\infty,b]=\{x\mid x\leqslant b\}$,$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$.

区间在数轴上可如图 1.2 表示.

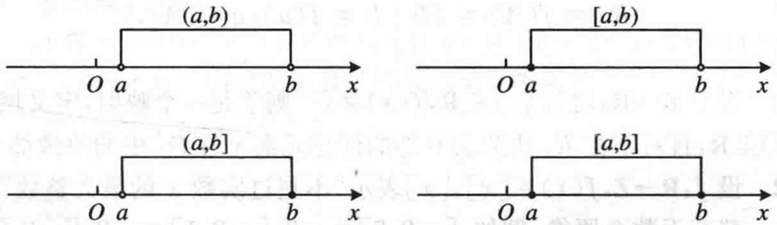

图 1.2

经常要在一个点的“邻近”讨论函数的某个性质,为此引入“邻域”概念.邻域是一类特殊的开区间.设 a 与 δ 是两个任意给定的实数,且 $\delta>0$,满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的实数集,即

$$\{x\mid |x-a|<\delta,\delta>0\},$$

称为点 a 的 δ 邻域,记作 $U(a,\delta)$.点 a 称为邻域的中心,δ 称为邻域的半径.

点 a 的 δ 邻域也可表示为区间 $(a-\delta,a+\delta)$(如图 1.3),这是一个以 a 为中心,以 2δ 为长度的开区间.因此,邻域 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 的距离小于 δ 的一切点 x 的全体.

上述定义的邻域包含了邻域中心 a,然而有时用到的邻域并不包含邻域中心,点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后,所得的区间 $(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$ 称为点 a 的 δ 去(空)心邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$(如图 1.4),即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta,\delta>0\}.$$

若不需指明邻域半径,点 a 的邻域记为 $U(a)$,点 a 的去心邻域记为 $\mathring{U}(a)$.

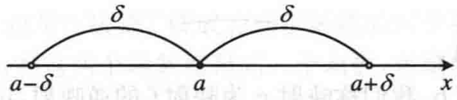

图 1.3

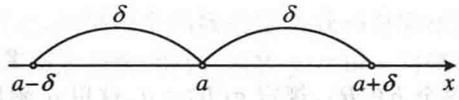

图 1.4

为了方便,有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为 a 的左 δ 邻域,把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为 a 的右 δ 邻域.

1.1.2 映射

1. 映射的概念

定义 1.1.1 设 A,B 是两非空集合,如果按照一定的对应法则 f,使得在集合 A 中每取一个元素 a,在集合 B 中总有唯一确定的元素 b 与其对应,这样的对应叫作从集合 A 到集合 B 的映射,记作

$$f:A\to B \quad 或 \quad A\xrightarrow{f}B.$$

其中,映射 f 把集合 A 中的元素 a 映射为集合 B 中的元素 b,元素 b 称为元素 a 的像,而元素 a 称为元素 b 的原像,记作 $b=f(a)$.

集合 A 称为映射 f 的定义域,记作 D_f,即 $D_f=A$;集合 A 中所有元素在映射 f 下的像所组成的集合称为映射 f 的值域,记作 R_f 或 $f(A)$,即

$$R_f=f(A)=\{b\mid b=f(a),a\in A\}.$$

因此,$R_f\subseteq B$.

例 1.1.1 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对每个 $x\in\mathbf{R}$,$f(x)=x^2$.则 f 是一个映射,定义域 $D_f=\mathbf{R}$,值域 $R_f=[0,+\infty)\subseteq\mathbf{R}$,且对于在 R_f 中除去 0 外的任意元素 y 在 D_f 中的原像都不唯一.

例 1.1.2 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{Z}$,$f(x)=[x]$,$[x]$表示“不超过实数 x 的最大整数”.显然,f 是一个映射.每个 y 都有无数个原像,例如,$[-2.5]=-3$,$[-2.1]=-3$,$[-2.01]=-3$,…;$[2.5]=2$,$[2]=2$,….

2. 映射的分类

假设 f 是从集合 A 到集合 B 的映射,即有 $f:A\to B$.

(1) 如果集合 A 的不同元素在集合 B 中对应不同的像,那么称 f 是一对一的映射,也称为单映射,简称单射.

(2) 如果集合 B 的任一元素都是集合 A 中某个元素的像,也就是说,集合 A 的像 $f(A)=B$,那么称 f 为满映射,简称满射.

(3) 如果 f 既是单射,又是满射,那么称 f 是一一对应的映射,简称一一映射,又称双射.在这种情况下,通过映射 f,集合 A 的元素和集合 B 的元素是相互唯一对应的.

3. 映射的运算

(1) 逆映射

设 f 是 A 到 B 的单射,则对于每个 $b\in R_f$,在 A 中有唯一的元素 a 满足 $f(a)=b$.由映射的定义,可给出新的映射 g:

$$g:R_f\to A,$$

对每个 $b\in R_f$,规定 $g(b)=a$,这里 a 满足 $f(a)=b$.我们称映射 g 为映射 f 的逆映射,记作 f^{-1},即 $g=f^{-1}:R_f\to A$,其中定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$,值域 $R_f=A$.

例 1.1.3 考虑映射

$$y=\sin x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1].$$

这是一个一一映射,它的逆映射是

$$x = \arcsin y: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(2) 复合映射

设有两个映射：

$$f: A \to B_1, \quad g: B_2 \to C,$$

其中 $B_1 \subseteq B_2$. 此时，对集合 A 的任意一个元素 a，集合 B_1 中都有唯一的元素 $b = f(a)$ 和它对应；又 $b = f(a) \in B_1 \subseteq B_2$，所以 b 亦是集合 B_2 的元素. 那么通过映射 g，集合 C 就有唯一的元素 c 和 $f(a)$ 对应，元素 c 可表示为

$$c = g[f(a)].$$

由这样的对应关系，可以确定从集合 A 到集合 C 的映射，称为映射 f, g 的复合映射，记作

$$g \circ f: A \to C \quad 或 \quad g[f(a)]: A \to C,\ a \in A,$$

即 $(g \circ f)(a) = g[f(a)], a \in A$.

例 1.1.4 考虑两个映射：

$$f(x) = \ln x: (0, +\infty) \to (-\infty, +\infty), \quad g(x) = \sin y: (-\infty, +\infty) \to [-1,1].$$

由于 $D_g = R_f = (-\infty, +\infty)$，则映射 g 和 f 构成的复合映射是

$$g[f(x)] = \sin(\ln x): (0, +\infty) \to [-1,1].$$

1.1.3 函数

1. 函数的概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型. 在某个自然现象或社会现象中，往往存在多个不断变化的变量，它们不是孤立的，而是相互联系并遵循一定的规律. 例如，在自由落体运动中，位移 s 和时间 t 的关系为 $s = \frac{1}{2}gt^2$.

定义 1.1.2 设 D 是一个非空实数集，f 是一个对应法则. 若对于每一个 $x \in D$，都有唯一确定的实数 y 和它对应，则称 f 是定义在 D 上的一个函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量或函数值. D 称为函数 f 的定义域，记作 D_f，即 $D_f = D$；函数值的全体构成的数集称为函数 f 的值域，记作 R_f，即

$$R_f = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

在理解函数定义时，需要注意的是：

(1) 由函数定义可以看出，值域 R_f 是由定义域 D 和对应法则 f 所决定的，于是，定义域 D 和对应法则 f 就成为确定函数的两个要素. 换言之，如果两个函数的定义域和对应法则一样，则这两个函数就是同一个函数，否则就是两个不同的函数. 例如，函数 $y_1 = \ln x$ 与函数 $y_2 = \frac{1}{2}\ln x^2$ 的定义域分别是 $D_1 = (0, +\infty)$ 和 $D_2 = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$，两者不是同一个函数.

(2) 函数的定义域通常按照以下两种情形来确定.

一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，记开始下落的时刻 $t = 0$，落地的时刻为 t

$=T$,则 s 与 t 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,T],$$

这个函数的定义域就是$[0,T]$.

另一种是对抽象地用算式表达的函数,通常约定这个函数的定义域就是使得算式有意义的所有实数组成的数集,这种定义域称为函数的自然定义域.例如函数 $y=\sqrt{x}$的定义域是$[0,+\infty)$.在这种情况下,函数的定义域 D 可以省略不写,而只用对应法则表示这个函数.因此,在不致引起混淆的情况下,我们可简单地说“函数 $y=f(x)$”或者“函数 f”.

在函数的定义中,对每个 $x\in D$,对应的函数值 y 总是唯一的,这样定义的函数称为单值函数.如果给定一个对应法则,按这个法则,对每个 $x\in D$,总有确定的 y 值与之对应,但这个 y 不总是唯一的,我们称这种法则确定了一个多值函数.例如,设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程$x^2+y^2=a^2$ 给出.显然,对每个 $x\in[-a,a]$,由方程 $x^2+y^2=a^2$ 可确定出对应的 y 值;当 x 取$(-a,a)$内任一值时,对应的 y 有两个值.所以这个方程是一个多值函数.本书只讨论单值函数.

在中学数学中,表示函数的方法主要有三种:表格法、图形法和解析法(算式表示法),有时还用语言来描述.同时,在中学也讨论过许多具体的函数,如幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数等,这些函数统称为基本初等函数,它们在本书以后的讨论中将反复出现.下面再举几个函数的例子.

例 1.1.5　常数函数 $y=C$ 的定义域$D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{C\}$.它的图像是一条平行于 x 轴的直线,如图 1.5 所示.

例 1.1.6　函数

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数,也即 $y=\sqrt{x^2}$,它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=[0,+\infty)$.其图像如图 1.6 所示.

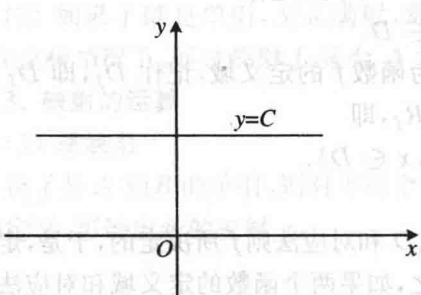

图 1.5

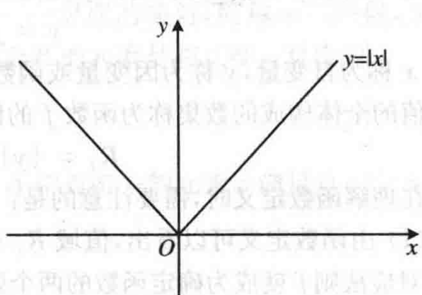

图 1.6

例 1.1.7　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数,它的定义域 $D_f=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$.其图像如图 1.7 所示.