Pearson

国外优秀数学教材系列

简明数学史

第一卷

古代数学

A History of Mathematics

An Introduction (3rd Edition)

[美] 维克多·J.卡兹（Victor J.Katz） 著

董晓波 顾琴 邓海荣 等译 李存华 董壹 译校

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

国外优秀数学教材系列

简明数学史　第一卷　古代数学

[美] 维克多·J. 卡兹（Victor J. Katz）　著

董晓波　顾　琴　邓海荣　高从燕　廖大见
倪凤莲　张滦云　孙翠娟　孙　岚　於　遒　译
秦　涛　薄丽玲　张　颖　刘龙海

李存华　董　壹　译校

机　械　工　业　出　版　社

本书按年代顺序编排，共分为四卷，每卷按照专题展开，并在大部分章节中讨论了不同历史时期的重要的数学教科书。同时，本书具有全球化视角，整合了非西方的数学史，包括中国、印度和阿拉伯数学家的工作。书中部分专题会在不同的年代反复出现，使得对本书的使用能够非常灵活。书中不仅有许多习题供读者深入理解书中内容，还有一些小组讨论专题，可供各种教学活动使用。同时，本书给出了丰富的参考文献，供读者进一步学习和研究之用。

本书的第一卷介绍古代数学，包括埃及和美索不达米亚、希腊数学的起源、欧几里得、阿基米德与阿波罗尼乌斯、古希腊时代的数学方法、希腊数学的末章等六章。

本书可作为大学数学史类课程的教材，也可作为了解数学的入门读物，还可供相关科研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

简明数学史．第一卷，古代数学/(美）维克多·J. 卡兹（Victor J. Katz）著；董晓波等译．—北京：机械工业出版社，2016.8

书名原文：History of Mathematics，A，3/E

国外优秀数学教材系列

ISBN 978-7-111-54525-5

Ⅰ.①简… Ⅱ.①维… ②董… Ⅲ.①数学史-世界-古代-教材 Ⅳ.①O11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 186987 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　陈崇昱　任正一
责任校对：刘秀芝　封面设计：路恩中　责任印制：李　洋
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2016 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
190mm×215mm · 15.75 印张 · 356 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-54525-5
定价：49.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前　言

美国数学协会（MAA）下属教师数学教育委员会在其《呼唤变革：关于数学教师的数学修养的建议书》中，提议所有有望成为中小学数学教师的人们：

注意自身对各种文化在数学思想的成长与发展过程中所做贡献的鉴赏能力的培养，对来自不同文化的个人（无论男女）在古代、近代和现代数学论题的发展上的贡献有所研究，并对中小学数学中主要概念的历史发展有所认识。

根据 MAA 的观点，数学史方面的知识能向学生表明，数学是一项非常重要的人类活动。数学不是一产生就有像我们教科书中那样完美的形式，它常常是出于解决问题的需要，以一种直观的和实验性的形式发展出来的。数学思想的实际发展历程能有效地被用来激励和启迪今天的学生。

这本新的数学史教科书是基于这样一种认识产生的，就是：不只是未来的中小学数学教师，即便是未来的大学数学教师，为了更有效地给学生教好数学课，也需要对历史背景有所了解。因此，这本书是为那些主修数学，今后打算在大学或高中任教的低年级或高年级的学生设计的，内容集中于中小学或大学本科教学计划中通常包含的那些数学课程的历史。因为一门数学课程的历史会为讲解这一课程提供非常好的思路，为了使未来的数学教师能在历史的基础上开展课堂教学，我们会对每一个新概念做充分细致的解说。实际上，许多习题就是要求读者去讲一堂课。我希望这些学生以及未来的教师能从本书获得一种关于数学的来龙去脉的知识，一种可令大学对数学中许多重要的概念有更深入的理解的知识。

本书主要特色

材料组织灵活

尽管本书主要是按年代顺序划分成若干时期来进行组织的，但在每一时期内则是按专题来进行组织的。通过查阅详尽的细节标题，读者可以选择某一特定的专题，对其历史的全程进行跟踪。例如，想研究方程求解时，就可以研究古代埃及人和巴比伦人的方法，希腊人的几何解法，中国人的数值解法，阿拉伯人用圆锥截线求解三次方程的方法，意大利人所发现的求解三次方程和四次方程的一套算法，拉格朗日为解高次多项式方程而研究出来的一套判据，高斯在求解割圆方程方面所做的工作，以及伽罗瓦用置换来讨论求解方程的工作，这一工作我们今天称之为伽罗瓦理论。

关注教科书

从事数学研究，发现新的定理和技巧是一回事，以一种使其他人也能掌握的方式来阐述这些定理

和技巧则是另一回事。因此，在大部分章中都会讨论一种或几种那个时代的重要的教科书。学生们能通过这些著作来学习那些伟大的数学家们的思想。今天的学生将能够看到某些论题在过去是怎样被处理的，并能将这些处理方法与当今教科书中的方法加以比较，而且还能看到许多年前的学生想要解决的是什么样的问题。

数学的应用

有两章是完全用来讲数学方法的，也就是讲数学是怎样用于解决人类其他活动领域内的问题的。这两章，一章是关于希腊时期的，另一章则涉及文艺复兴时期，它们相当大的部分是讲述天文学的。事实上，在古代，数学家常常也是天文学家。要想了解希腊数学的主要内容，关键是要了解希腊人关于天体的模型，以及怎样借助这个模型用数学来得出预言。类似地，我们讨论了哥白尼-开普勒的天体模型以及文艺复兴时期的数学家们是怎样用数学来研究它的。我们还将考察在这两个时期数学在地理学中的应用。

非西方数学

我们还下了特别大的功夫来讨论数学在世界上除欧洲以外一些地区的发展。于是，有相当多的材料是有关中国、印度和阿拉伯的数学的。此外，第 11 章还讨论了世界其他地方的数学。读者会看到，有些数学概念在很多地方出现过，尽管也许并不是在我们西方称为“数学”的背景中出现。

按专题分类的习题

每一章均含有许多习题，为了便于选取，这些习题都是按专题分类汇集的。有些习题只需要简单的计算，有些则需要填补正文中数学论证的空白。讨论题是一种无明确答案的开放式问题，其中有些可能要做些研究才能回答。很多这类问题要求学生动脑筋去思考怎样利用在课堂上学到的历史材料。有许多习题即使读者不打算做，也至少应该阅读一下，以便对该章的内容有更全面的了解。（奇数序号计算题和部分奇数序号证明题的答案可在书末的答案中找到。）

焦点论坛

小传　为了便于参阅，对许多我们介绍过他们工作的数学家，其小传被放在独立于正文的栏框中。特别是，尽管由于种种原因参与数学研究的妇女为数不多，我们还是写了几位重要的女数学家的小传。她们通常都是在克服了重重困难后才能成功地对数学事业做出贡献。

专题　还有一些特殊论题以加框文字的专题形式散见于全书。其中有这样一些专题，如埃及人对

希腊数学影响问题的讨论、托勒密著作中函数概念的讨论、各种连续概念的比较。还有一些专题，它们把重要的定义汇集在一起以便于查阅参考。

补充资料

每一章的开始有一段相关引语和对一个重要数学“事件”的描述。每章还有一份附加了注释的参考文献，学生们从这些文献中可以获得更多的信息。考虑到本书的读者主要是那些未来的中学或大专院校数学教师，我在书末加了一个附录，对如何在数学教学中使用本书提供了一些建议。附录包括：一张中学和大专院校数学课程中各专题的历史与本书相应章节的明细对照列表；关于如何组织这类材料以适合课堂教学的一些建议；一张详细的大事年表，以帮助读者了解数学发现与世界史上发生的其他事件的联系。书末有一张本书中出现的大多数数学家的编年名录。

预备知识

学过一年微积分，具备了可供运用的知识，就足以理解本书的前 16 章，以后的几章要求更多一些数学上的准备。各节的标题已清楚地表明了需要哪些数学知识。例如，要想充分理解第 19 章和第 21 章，就要求学生学过抽象代数。

课程内容的弹性

本书包括的内容远远超出了普通一学期的数学史课程所能讲授的内容。实际上，它的内容适合一学年的课程。前半部分内容是讲述公元前直到 17 世纪末微积分发明为止的这一时期的。后半部分内容则是讲述 18 世纪至 20 世纪数学的。然而对于那些只有一个学期学时的教师来说，有几种使用本书的方式：第一种方式是可以选前 12 章中的绝大部分内容，然后就以微积分作为结束；第二种方式是选讲一到两个专题的全部历史。以下是可供选择的专题：方程求解，微积分思想，几何学概念，三角学及其在天文和测量方面的应用，组合学、概率论和统计学，抽象代数和数论。（附录中的列表将帮助读者找到与所选专题相对应的章节。）对于专题选讲，我建议要尽量包括 20 世纪的内容，以使读者认识到数学是在不断创新和发展的。最后，可以将前两种方式结合起来，即按年代顺序讲授古代数学的内容，然后再选讲某个近现代数学的专题。

本版更新之处

本书前两版获得了广泛的接受，这鼓励我保持它的基本体系和内容。然而，我仍力图在本书的内

容及表述的清晰性两方面做出一系列的改进。改进的根据是许多使用过本书第 1、2 版的人们所提出的意见，以及在新近文献中所刊载的有关数学史中的一些新发现。为使本书使用更方便，我将某些内容改组使其独立成章。实际上每一小节都有一些小小的改动，而自第 2 版以来较重大的改动则有：通过分析《方法论》羊皮书而发现的关于阿基米德的新材料；新增一节关于托勒密《地理学》的内容；更多关于中国、印度和阿拉伯，以及古代埃及和巴比伦数学的介绍，这些介绍是以我的新作《数学原著选》中涉及这几种文明的数学原始资料为基础的；关于 19、20 世纪统计学的新材料；关于 18 世纪将牛顿《自然哲学的数学原理》中的某些结果翻译成微分学语言的说明。全书以解决克莱数学研究所的第一个问题——庞加莱猜想的简短介绍作为结束。我力求改正老版本中史实上的全部错误，并杜绝新的错误。如果读者能够指出本书遗留的错误，我将深表感谢。每章还增加了一些新的问题，其中有些比较简单。参考文献方面也尽可能做了更新。此外，本书还增加了一些新的、印有相关人物画像的邮票作为插图。不过应当注意到，任何这种试图表现 16 世纪前数学家的邮票上的画像——别处的画像实际上也一样——都是想象的。至今还没有哪一张这类人物的画像是有可靠证据的。

致谢

和任何一本书一样，要不是有许多人的帮助，本书是不可能写成的。下面各位曾应我的请求阅读了本书大部分章节并提出了宝贵的建议：Mancia Asher（伊萨卡学院），J. Lennart Berggren（西蒙弗雷泽大学），Robert Kreiser（美国大学教授联合会），Robert Rosenfeld（纳苏社区学院），John Milcetich（哥伦比亚特区大学），Eleanor Robson（剑桥大学）和 Kim Plofker（布朗大学）。此外，很多人对本书的第 2 版和第 3 版提供了详尽的建议，尽管我没有全部采纳，但我真诚地感谢他们为改进本书所提出的想法。这些人中有 Ivor Grattan Guinness，Richard Askey，William Anglin，Claudia Zaslavsky，Rebekka Struik，William Ramaley，Joseph Albree，Calvin Jongsma，David Fowler，John Stillwell，Christian Thybo，Jim Tattersall，Judith Grabiner，Tony Gardiner，Ubi D'Ambrosio，Dirk Struik 和 David Rowe。我衷心地感谢所有这些人。

审阅书稿的很多人也以他们细致深入的评论给了我很大的帮助，使本书增色不少，没有他们的帮助，本书就不会是现在这个样子。第 1 版的审稿人有：Duane Blumberg（西南路易斯安那大学），Walter Czarnec（弗雷明汉州立大学），Joseph Dauben（纽约市立大学莱曼学院），Harvey Davis（密执安州立大学），Joy Easton（西弗吉尼亚大学），Carl FitzGerald（加利福尼亚大学圣地亚哥分校），Basil Gordon（加

利福尼亚大学洛杉矶分校），Mary Gray（美国大学），Branko Grunbaum（华盛顿大学），William Hintzman（圣地亚哥州立大学），Barnabas Hughes（加利福尼亚州立大学北岭分校），Israel Kleiner（约克大学），David E. Kullmam（迈阿密大学），Robert L. Hall（威斯康星大学密尔沃基分校），Richard Marshall（东密执安大学），Jerold Mathews（艾奥瓦州立大学），Willard Parker（堪萨斯州立大学），Clinton M. Petty（密苏里大学哥伦比亚校区），Howard Prouse（明尼苏达州立大学曼卡托分校），Helmut Rohrl（加利福尼亚大学圣地亚哥分校），David Wilson（佛罗里达大学），以及 Frederick Wright（北卡罗来纳大学教堂山分校）。

第 2 版的审稿人有：Salvatore Anastasio（纽约州立大学，新帕尔兹分校），Bruce Crauder（俄克拉何马州立大学），Walter Czarnec（弗雷明汉州立大学），William England（密西西比州立大学），David Jabon（东华盛顿大学），Charles Jones（鲍尔州立大学），Michael Lacey（印地安那大学），Harold Martin（北密执安大学），James Murdock（艾奥瓦州立大学），Ken Shaw（佛罗里达州立大学），Svere Smalo（加利福尼亚大学圣塔芭芭拉分校），Domina Eberle Spencer（康涅狄格大学），Jimmy Woods（北乔治亚学院）。

第 3 版的审稿人有：Edward Boamah（布莱克博恩学院），Douglas Cashing（圣文德大学）；Morley Davidson（肯特州立大学）；Martin J. Erickson（杜鲁门大学）；Jian-Guo Liu（马里兰大学）；Warren William McGovern（博林格林州立大学）；Daniel E. Otero（塞维尔大学）；Talmage James Reid（密西西比大学）；Angelo Segalla（加利福尼亚州立大学长滩分校）；Lawrence Shirley（陶森大学）；Agnes Tuska（加利福尼亚州立大学弗雷斯诺分校）；Jeffrey X. Watt（印地安纳州大学-普渡大学印第安纳波利斯分校）。

我还在各种论坛上（包括美国数学协会和美国数学会联合举办的历次年会的数学史分组会）与许多数学史学家们交谈过，从中获益匪浅。这些在不同时期帮助过我（而我在前面未能提及）的人有 V. Frederick Rickey（美国军事科学院），Florence Fasanelli（美国科学发展协会），Israel Kleiner（约克大学），Abe Shenitzer（约克大学），Frank Swetz（宾夕法尼亚州立大学），以及 Janet Beery（雷德兰兹大学）。同时，我要感谢兰利学校的 Karen Dee Michalowicz，他向我介绍了如何与在职的和未来的高中教师交流，他在 2006 年的意外离世真是一个悲剧。此外，我还从数学史及其在教学中的应用研究所的各种会议的与会者和 2007 年亚洲数学 PREP 研讨会的参加者那里学到了不少东西。我在哥伦比亚特区大学数学史（及其他）班上的学生在阐明我的诸多看法上也给了我不少帮助。自然，我欢迎任何地方的

学生和同事为进一步改进本书而提出的任何意见和来信。

感谢 Harper Collins 出版社的前编辑 Steve Quigley, Don Gecewicz 和 George Duda，他们帮助我完成了本书的第 1 版。感谢第 2 版的编辑 Jennifer Albanese。我还特别感谢本书的新编辑 Bill Hoffman，无论是在本书第 3 版还是在缩减本的编辑出版过程中，他都提出了许多建议并给予了大力支持。Pearson Addison-Wesley 出版社的 Elizabeth Bernadi 为确保本书如期出版付出了很大辛劳，Jean-Marie Magnier 帮助发现了习题答案中的一些错误。生产管理员 Paul C. Anagnostopoulos, Jennifer McClain, Laurel Muller, Yonie Overton 和 Joe Snowden 等也出色地完成了他们的任务，使本书能够顺利面世。我谨向以上各位表示感谢。

最后我要感谢我的妻子菲丽丝，为了她多年来给我的全部的爱和支持，无论是在我为本书工作的时刻，还是其他的时光。

V. J. 卡兹
银泉，马里兰
2008 年 5 月

目 录

第1章
埃及和美索不达米亚

精确计算是那扇进入知晓世间万物及一切奥秘的大门。

——《兰德数学纸莎草纸书》(Rhind Mathematical Papyrus) 引言[1]

美索不达米亚：大约3800年前，在拉沙（Larsa）的一所书记员学校里，一位教师尝试着出一些数学问题给他的学生们，以便他们练习刚才介绍的，直角三角形中三边之间关系的概念。这位教师不仅想让计算困难点，从而能够看出谁真正理解了这个知识点，而且还要设法让得出的答案为整数，从而使学生们不会灰心丧气。在用他所知道为数不多的，并且满足方程 $a^2+b^2=c^2$ 的三数组（a，b，c）数字处理了几个小时之后，他突然有了一个新的想法。在一块湿润的泥板上，笔随意动，他快速地做了一些运算，并且确信自己已经发现了如何才能产生尽可能多的这类三数组的方法。在花了一段时间整理思路之后，他取出一块新鲜的泥板，在上面不仅小心翼翼地列出了15组这样的三数组清单表，而且还简要提示了一些计算步骤。然而，他并没有记录新方法的细节。这些细节要保留到给同事们做演讲的时候再提，那时他们将不得不承认他的能力，这样一来他作为最好的数学教师之一的名望也就将传遍整个王国。

上文开头那句话摘自埃及一部少之又少的数学文献中的引言，但是那个虚构的美索不达米亚书记员的故事，说明了精确描述古代数学的一些困难。事实上，数学必定存在于有记载的每一个古代文明中。但是无论在哪一个古代文明中，数学总是掌握在那些受过专门训练的祭司和书记员以及政府官员们的手中，他们的职业就是在征税、测量、建筑、贸易、制定历法、宗教仪式等领域内发展和使用数学为政府谋取利益。尽管许多数学的概念源自于它们在这些环境的应用，但是数学家们总是在好奇心的推动下，把他们的思想上升到超越实际需要的范围，然而由于数学是一种权力工具，它的方法常常只是通过口述的方式传授给有特权的少数人，因此，书写记录一般是很珍稀的，而且能提供的细节内容也很少。

然而，近年来，学者们进行了大量的学术研究，想要从一切可能的蛛丝马迹中再现古代文明中的数学。自然地，所有的学者们不会在每一点上都取得一致意见，但已有足够多的共识，以便我们对美索不达米亚和埃及的古代文明中的数学给出一个合乎情理的描写。我们的讨论就从这些众多文明中的每一个数学开始，对它们的文明基础做一个简单的调查，从中对获取数学知识相关材料的来源进行描述。

1.1 埃及

7000 多年前，埃及的尼罗河流域（Nile Valley）出现了农业。但是同时统治着上埃及（Upper Egypt）（河谷地区）和下埃及（Lower Egypt）（三角洲地区）的第一个王朝可以追溯到大约公元前 3100 年。第一代法老们遗留下来的是由官员和祭司组成的精英分子，一座奢侈的宫廷，以及给国王他们自己留下的一个介于凡人与神之间的中间人角色。这种角色促进了埃及那些不朽建筑的发展，包括作为王室寝陵而建造的金字塔，以及在卢克索（Luxor）和卡纳克（Karnak）建造的神庙。文字也正是大约起源于这一时期，并且大多数早期文字与账单有关，主要是一些物品的各种各样记号。有几种不同的计量系统，这取决于被计量的特定商品。但是由于仅仅有有限的数量符号，因而在不同的计量系统中，相同的符号代表着不同的意义。从刚开始的埃及文字来看，主要有两种类别，一种是用于纪念碑铭文撰写的象形文字；另一种则是僧侣用的，即草书，用笔刷沾着墨水写在纸莎草纸上。希腊人从公元开始前后的几个世纪对埃及的统治，是导致这两种埃及本土文字形式消亡的原因。幸运的是，让·商博良（Jean Champollion，1790—1832）早在 19 世纪初就开始了认识埃及文字的过程，他是凭借多语种的碑文——罗塞塔（Rosetta）石碑——的帮助，这些碑文里包括象形文字、希腊文，以及后来的通俗文字，即一种僧侣写在纸莎草纸上的文字（见图 1.1）。

图 1.1 让·商博良和一块罗塞塔石碑

正是那些书记员，促进了数学方法的改进，而这些政府官员对于确保物品的收集和分配起到了至关重要的作用，从而为法老们奠定了统治的物质基础（见图 1.2）。因此，这些方法的证明就来自于书记员的教育和日常工作，尤其是两本纸莎草纸书中记载的相关内容，其中收集有数学问题及其解答：一本是《兰德数学纸莎草纸书》（Rhind Mathematical Papyrus），它由苏格兰人兰德（A. H. Rhind，1833—1863）1858 年在卢克索（Luxor）购得，故以其姓氏命名；另一本是《莫斯科数学纸莎草纸书》（Moscow Mathematical Papyrus），它是戈罗尼雪夫（V. S. Golenishchev，殁于 1947）于 1893 年购得，后来他将此书出售给了莫斯科艺术精品博物馆。前一纸莎草纸书是由书记员阿默士（A'h-mose）在公元前 1650 年左右从距当时 200 余年的一部原著上抄录的，它长约 18ft（英尺，1ft = 0.3048m），高约 13in（英寸，1in = 0.0254m）。

图 1.2 阿门霍特普（Amenhotep），一位埃及高官兼书记员（公元前 15 世纪）

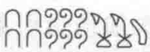
后一纸莎草纸书也大概隶属同一时期，它的长度超过 15ft，但高度却仅仅只有 3in。由于埃及气候干燥，有很多数量的纸莎草纸书因此得以幸存，但不幸的是，这也是纸莎草纸易碎的原因。因而，除了上述两部纸莎草纸书外，其他最初的埃及数学纸草书仅有短短的片段得以幸存下来。

这两份数学文献最先告知了我们需要加以解决问题的类型。大多数的问题都涉及国家的行政制度这一主题。在私人墓冢上发现的壁画证明了书记员们终日忙碌于这样的工作。在高级官员的墓冢中，书记员们常常被描绘成一起工作，或许可以解释成在清点家畜或农产品。同样，现存的三维模型中描绘了填补谷仓这样的场面，这些场景中常常可以看到一位书记员在记录数量。因此，我们可以清晰地认知到埃及数学是在实际生活中形成并得到运用的。

数学在其他的建筑领域同样扮演着重要的角色。许多建筑古迹都证明数学方法被用在了设计与建造方面。不幸的是，很少有精确描述数学在建筑学中是如何运用的，所以我们也只能依靠细节去推测。我们从下面的细节开始。

1.1.1　计数系统和计算

埃及人创建了两种不同的计数系统，其中一种为他们的两种文字体系服务。在象形文字体系中，每个 10 的前几次幂由不同的符号表示。开始以我们所熟知的一竖来表示 1。然后，用∩表示 10，用𓍢表示 100，用𓆼表示 1000，用𓂭表示 10000（见图 1.3）。通过适当地重复这些符号就可以表示任意的整数。例如，为了表示 12643 这个数，埃及人就会把它写成



（值得注意的是，通常习惯于把较小的数字放在左边。）

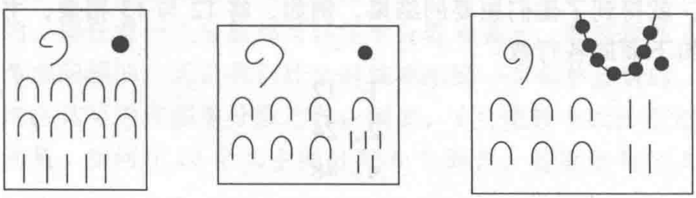


图 1.3　埃及涅伽达（Naqada）石板上的数字符号
（大约公元前 3000 年）

与象形文字形成对照的是僧侣系统，它成为数字系统的一个例子。

在这种计数系统中，从 1 到 9 的每一个数字都以一个特定的符号表示，同样从 10 到 90 的每一个 10 的倍数以及从 100 到 900 的每一个 100 的倍数也都用各自特定的符号表示，以此类推。一个给定的数，如 37，就是在 7 的符号之后写上 30 的符号。由于 7 的符号是，而 30 的符号是，37 即是。又如，由于 3 是写成，40 写成，以及 200 写成，于是 243 的符号就是。虽然在数字体系中不一定要有表示零的符号，但埃及人还真有这样的符号。不过这个符号并没有记载于数学的纸莎草纸书中，而是出现在关于建筑的纸莎草纸书中，在那里它是用来标记金字塔建筑中的底部水平线的。另外，这样的符号还出现在记载会计账目的纸莎草纸书中，用来在平衡表中表示收入和支出相等[2]。

一旦有了一种计数系统，为了计算这些数字，文明就会发展出相应的算法，这是再自然不过的事了。例如，在埃及的象形文字中，加减法相当简单：只要依次把个位数、十位数、百位数等等组合在一起就行了。当某种符号组的数目出现有十个时，就用下一个符号来代替。因此，把 783 与 275 相加，就是将𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢与𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢放在一起，得到𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢𓍢。由于有 15 个𓎆，将其中 10 个换成 1 个𓍢。这就使得后一种符号（𓍢）的数量也达到了 10 个，再把它们换成一个𓆼，最后的结果是𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆𓎆𓎆𓎆𓆼，或 1058。减法也可以类似地来进行。当然，每当遇到需要“借位”的情况时，被借的那一位符号就转化为 10 个低一位的符号。但是，在简化的僧侣系统中，相加和相减的运算就不可能是这样简单的算法了。或许，书记员们只是记住了基本的加法表。

埃及人的乘法运算是建立在连续加倍方法基础上的。将 a 与 b 两个数相乘，书记员们常常先写出一对数 1，b，然后反复地对这对数的每一个数进行加倍，直到下一次加倍会引起这一对数中的第一个数超过 a。然后，在确定了哪几个 2 的幂次相加会得 a 之后，把相应的 b 的倍数相加，就得到了他们想要的结果。例如，将 12 与 13 相乘，书记员可以先写出下面的各行数：

'1，12
'2，24
'4，48
'8，96

此时，书记员在下一次的加倍时就会停止计算，因为下一步的加倍会在第一列中得出 16，这是大于 13 的。然后他核对出哪几次加起来能得到

13，也就是说 1，4 和 8，他再把其他列中相对应的数加起来。写下来的结果就是：总计 13，156。

目前并没有关于书记员们如何进行加倍计算的记载。答案被简单地写在下面。也许书记员们已经记住了大量的 2 的倍数表。实际上，有一些迹象显示，在埃及南部的非洲地区，加倍是一种计算的标准方法。

因此，埃及的书记员们是从他们南方的同行那里学到的。此外，这些书记员们不知怎么搞的，意识到每一正整数可以唯一地表示成 2 的幂之和。这一事实保证了这一步骤的合理性。但是它是怎么被发现的呢？对此我们最好的推测是，它是通过实验被发现，然后由口述流传下来的。

因为除法是乘法的逆运算，像“156÷12”这样的问题，可以表达为“一个数乘 12 以便得到 156”。那么书记员就会写下与上面列出的相同各行。然而，这次他要检查的是右边一列中加起来会等于 156 的各个数；这里有 12，48 和 96。那么左列与它对应的数即为 1，4，8，这样得出的答案为 13。当然，相除并不总能“得出整数”，在得不到整数时，埃及人就会求助于分数。

埃及人仅仅用到了单分数，或者说是“等分”（分子为 1 的分数），唯一的例外是 2/3，或许因为这种分数是最“自然的”。分数 $1/n$（n 分之一），在象形文字系统中一般表示为：在整数 n 符号的上方放上⌓。而在僧侣用的象形文字系统中则用一个点来代替。像 1/7，在前者的系统中记为，而后者记为。唯一的例外，2/3 在象形文字中，有一个特别的符号：；在僧侣用的象形文字系统中用ϒ。其他两个分数，1/2 和 1/4，也有特殊的符号：分别为⊂和x。然而，在下文中，将用符号 $\overline{n}$ 代表 $1/n$，用 $\overline{\overline{3}}$ 代表 2/3。

因为分数是作为除不尽的结果而出现的，这就要求我们能够处理除了单分数以外的其他分数。埃及最为复杂的算术技巧就是与此相关而发展起来的：即任意一个分数都可以用单分数来表示。然而埃及人并不是这样来考虑问题的。无论我们什么时候要用到一个非单分数时，他们都会简单地将其写为许多单分数之和。例如，《兰德数学纸莎草纸书》中的第 3 问是，如何在 10 个人中间分配 6 个面包。答案是每个人可以分得 $\overline{2}\,\overline{10}$ 个面包（即 1/2+1/10）。书记员将这个值乘以 10 就可以检验这个结果对不对。我们可能留心到书记员的答案比我们的 3/5 答案要烦琐，但在某种意义上，按这种方式来做，实现分割反而更容易。如果我

们将 5 个面包对半分，再把第 6 个面包分成 10 份，然后给每个人半个，再加十分之一个，那么大家都很清楚地知道每个人都有了同样多的面包。无论是否烦琐，埃及人的这种单分数的方法在整个地中海区域沿用了两千多年。

将整数相乘时，重要的一步是加倍这一步，将分数相乘时也一样。书记员们也要能够表示出任意单分数的二倍。例如，在上述问题中，对解的验算如下：

$$\begin{array}{ll} 1 & \overline{2}\ \overline{10} \\ {}'2 & 1\ \overline{5} \\ 4 & 2\ \overline{3}\ \overline{15} \\ {}'8 & 4\ \overline{\overline{3}}\ \overline{10}\ \overline{30} \\ \hline 10 & \quad 6 \end{array}$$

这些二倍数是怎样得到的呢？加倍$\overline{2}\ \overline{10}$是简单的，因为每一个分母都是偶数，只要将它减半就行了，然而，在下行$\overline{5}$必须被加倍。

要进行这种计算，书记员这里就必须运用一张表来得到这个$\overline{3}\ \overline{15}$答案（即 $2 \cdot 1/5 = 1/3 + 1/15$）。事实上，《兰德数学纸莎草纸书》的第一节就是 2 被从 3 到 101 的奇数相除的一张表（见图 1.4），而且，埃及的书记员们已经充分了解了将 $\overline{n}$ 乘以 2，与用 n 来除 2 是同样的结果。尽管没有人知道这张除法表是如何被构造出来的，但学术上已有几种设想来解释书记员们的方法。无论如何，问题三已经解决，需要两次使用这张表。第一次，上面已经说明了；第二次，就是接下来的这一步，计算$\overline{15}$的二倍，得到$\overline{10}\ \overline{30}$（即 $2 \cdot 1/15 = 1/10 + 1/30$）。这个问题的最终一步，涉及把$\overline{15}$加到 $4\ \overline{\overline{3}}\ \overline{10}\ \overline{30}$上去，但是这里，书记员仅仅给出了答案。人们再次猜想是否可能有这类相加问题全面表格的存在。可以追溯到大约公元前 1600 年，有一份《埃及数学羊皮卷》（The Egyptian Mathematical Leather Roll），里面就有一个这种加法表的缩减版[3]。还有几张其他的涉及单分数的表，以及一张处理特殊分数 2/3 的乘法表。如此看来，埃及书记员们使用的算术运算的算法，涉及用于加、减和加倍表格的大量知识和一套确定的方法，把相乘和相除的问题分解成一定的步骤，而每一步都可以使用这些表来完成。

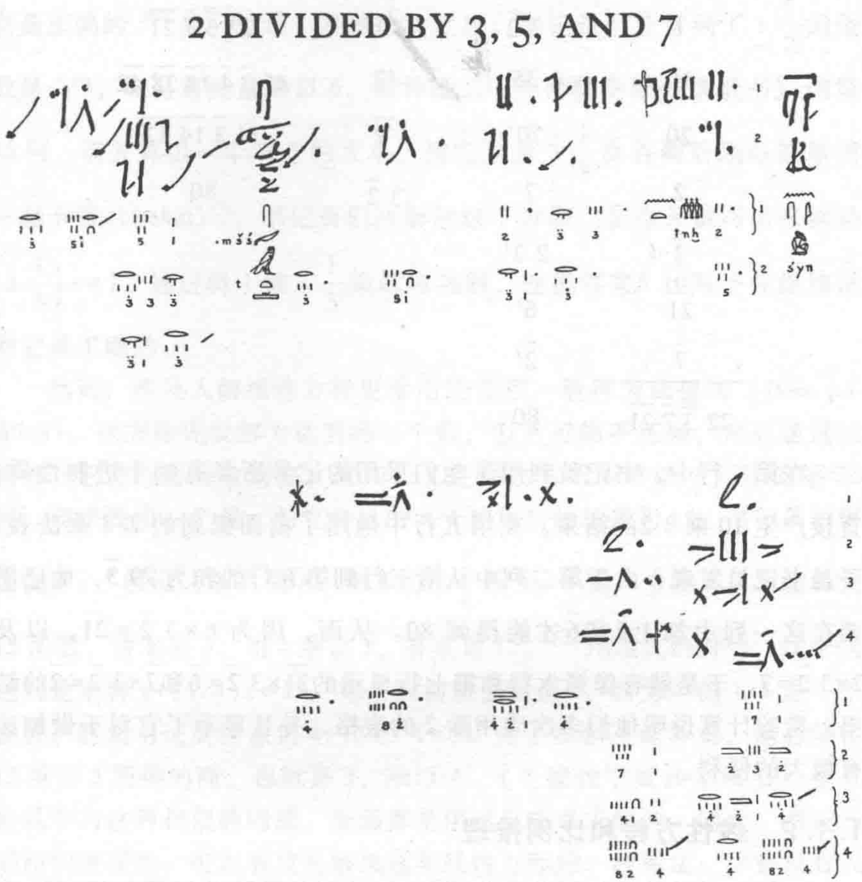


图 1.4 《兰德数学纸莎草纸书》上 2÷3,2÷5 和 2÷7 的摹本及其象形文字的译文
［雷斯顿主教（Reston，VA）：国家数学教师委员会，1967，阿诺德 B. 蔡斯编辑（Arnold B. Chace，ed）］

除了基本的加倍算法之外，埃及书记员们在进行算术运算中还采用了其他的技巧。例如，他们能够找出数的一半，以及一个数 10 倍的数；并且他们也能计算出将一个分数加上一个已知的假分数从而得到下一个整数；他们还可以通过分数与给定的整数相乘来得到已知的分数。这些步骤在《兰德数学纸莎草纸书》的第 69 问上有插图，其中包括了用 $3\bar{2}$ 除 80 以及随后的检验：