

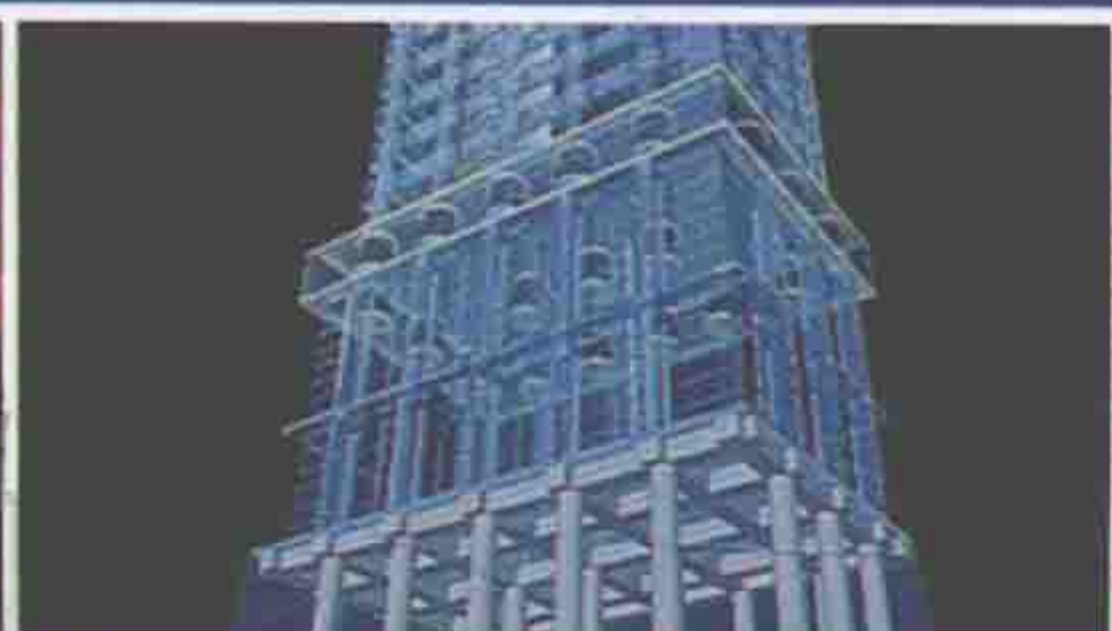
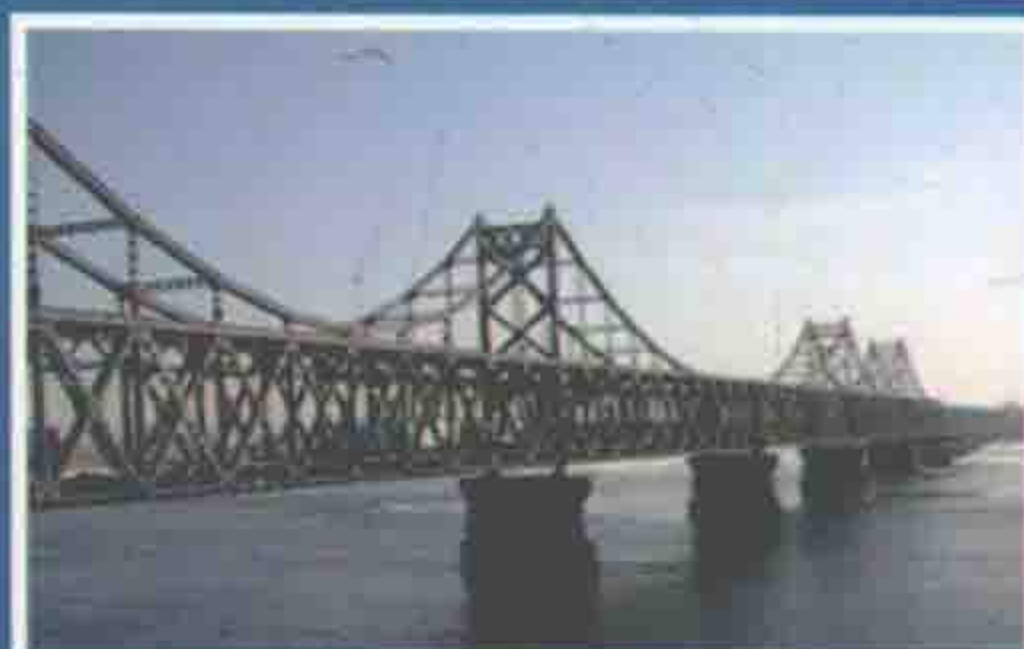
● “十二五”国家重点图书出版规划项目

● 现代土木工程精品系列图书

含圆形夹杂与裂纹的直角域 对反平面动力响应

HANYUANXING JIAZA YU LIEWEN DE ZHIJIAOYU
DUI FANPINGMIAN DONGLI XIANGYING

南景富 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

“十二五”国家重点图书出版规划项目
现代土木工程精品系列图书

含圆形夹杂与裂纹的直角域 对反平面动力响应

南景富 著

哈尔滨工业大学出版社

内容提要

本书采用复变函数、多极坐标移动技术和格林(Green)函数方法研究了SH波作用下直角域中圆形孔洞(夹杂)及其附近任意方位直线裂纹的相互作用问题。首先,构造出应用于求解本书问题的Green函数,该函数为时间谐和反平面线源荷载作用于含有圆形孔洞(夹杂)直角域时的位移函数解。利用构造出的Green函数,即可求解直角域中圆形孔洞(夹杂)及其附近裂纹对SH波的散射。其次,采用裂纹“切割”的方法构造裂纹,即在欲出现裂纹区域加载与直角域中圆形孔洞(夹杂)对SH波散射产生的应力相对应的大小相等、方向相反连续反平面荷载,从而构造出裂纹,得到直角域中圆形孔洞(夹杂)与裂纹同时存在条件下的位移与应力场。最后,讨论了直角域不同的介质参数、圆形孔洞(夹杂)埋深及裂纹方位和长度条件下圆形孔洞(夹杂)周边的动应力集中系数、直角域的表面位移与裂纹尖端的动应力强度因子变化情况。

含缺陷直角域的动力学响应问题的研究近年来受到相关研究人员的普遍关注,本书研究了含圆形夹杂与裂纹的直角域在出平面波作用时的动应力响应,不仅为含缺陷直角域的动力学响应问题增加了一个新模型,而且为研究这类复杂问题的研究人员提供了一些新思路和新方法。

图书在版编目(CIP)数据

含圆形夹杂与裂纹的直角域对反平面动力响应/南景富
著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.3
ISBN 978-7-5603-5710-2

I. ①含… II. ①南… III. ①应力波传播-散射-裂
纹-数值计算 IV. ①0347.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第274630号

策划编辑 王桂芝
责任编辑 范业婷 高婉秋
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 9.5 字数 218千字
版 次 2017年3月第1版 2017年3月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-5710-2
定 价 48.00元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

本书采用复变函数、多极坐标移动技术和格林(Green)函数方法研究了SH波作用下直角域中圆形孔洞(夹杂)及其附近任意方位直线裂纹的相互作用问题。首先,构造出应用于求解本书问题的Green函数,该函数为时间谐和反平面线源荷载作用于含有圆形孔洞(夹杂)直角域时的位移函数解。利用构造出的Green函数,即可求解直角域中圆形孔洞(夹杂)及其附近裂纹对SH波的散射。其次,采用裂纹“切割”的方法构造裂纹,即在欲出现裂纹区域加载与直角域中圆形孔洞(夹杂)对SH波散射产生的应力相对应的大小相等、方向相反连续反平面荷载,从而构造出裂纹,得到直角域中圆形孔洞(夹杂)和裂纹同时存在条件下的位移与应力场。最后,讨论了直角域不同的介质参数、圆形孔洞(夹杂)埋深及裂纹方位和长度条件下圆形孔洞(夹杂)周边的动应力集中系数、直角域的表面位移与裂纹尖端的动应力强度因子变化情况。本书具体研究工作概括为以下几点:

(1)研究了直角域中圆形孔洞对SH波的散射与地震动。求解问题的关键是要构造一个能够自动满足直角域表面应力自由边界的散射波,该散射波利用SH波散射自身的对称性质来构造,并由圆孔应力自由边界来确定。最终则可将散射波问题归结为一个无穷代数方程组的求解。最后给出了具体算例,讨论了直角域不同的介质参数和圆孔埋深对孔边动应力集中系数分布及直角域表面位移的影响。

(2)求解了应用于本书研究工作的Green函数,即时间谐和反平面线源荷载作用于含有圆形孔洞(夹杂)弹性直角域时的位移函数解,并讨论了Green函数的连续性、奇异性等性状。

(3)研究了SH波对直角域中圆形孔洞及其附近任意方位直线形裂纹的散射问题。利用构造出的Green函数,采用“人工切割”的方法构造裂纹,导出了圆形孔洞与裂纹相互作用的位移场与应力场,研究了圆形孔洞周边的动应力集中情况及裂纹尖端的动应力强度因子。针对具体的算例,讨论了直角域中不同入射波数、入射角度、圆孔埋深、裂纹方位与长度等因素对孔边动应力集中系数、裂纹尖端动应力强度因子的影响。

(4)研究了SH波对直角域中圆形夹杂及其附近直线形裂纹的散射问题。利用构造出的Green函数,采用“人工切割”的方法构造裂纹,推导出圆形夹杂与裂纹相互作用的位移、应力表达式。针对具体的算例,讨论了不同入射波数、入射角度、圆形夹杂介质的剪切

模量、圆形夹杂埋深、裂纹几何方位与长度对上述问题的影响。

衷心感谢哈尔滨工程大学齐辉教授在研究过程中给予的鼓励与支持,以及对本书的仔细审阅。

感谢中国航天六院折勇研究员、哈尔滨工程大学杨在林教授、哈尔滨工程大学毛继泽教授、黑龙江科技大学赵春香副教授、黑龙江科技大学刘保良教授、黑龙江科技大学于丽艳副教授在本研究过程中给予的大力支持与帮助。

感谢黑龙江科技大学理学院在本书完成过程中给予的鼓励与支持。

由于作者的水平有限,书中难免存在疏漏和不妥之处,恳请各位读者批评指正。

南景富

2015 年 6 月

目 录

第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究意义	1
1.2 弹性动力学的研究状况	2
1.2.1 弹性波散射问题的研究状况	2
1.2.2 复合裂纹对弹性波散射的研究状况	3
1.2.3 地形影响问题的研究现状	4
1.3 弹性波散射问题的主要研究方法	4
1.4 本书的主要工作	5
第 2 章 基本理论和基本方程	7
2.1 弹性动力学的基本理论	7
2.1.1 弹性动力学的控制方程	7
2.1.2 波动方程的简化	8
2.1.3 波动方程的分离变量解	8
2.2 固体中的平面波	9
2.3 复数形式下的控制方程和波动方程	11
2.4 弹性波的绕射与动应力集中	11
2.4.1 定义	11
2.4.2 圆柱引起的 SH 波的散射和动应力集中	12
2.4.3 圆柱对 P、SV 波的散射与动应力集中	19
2.4.4 薄板中弯曲波的散射	36
2.4.5 椭圆柱对弹性波的散射	39
2.4.6 抛物柱对弹性波的散射	50
2.5 本章小结	60
第 3 章 直角域中圆形孔洞对 SH 波的散射与地震动	61
3.1 引言	61
3.2 问题的表述与控制方程	61
3.3 直角域中圆形孔洞引起的散射波场	62
3.4 问题的求解	63
3.5 算例及结果分析	65
3.5.1 动应力集中系数与数值结果	65

3.5.2	界面位移与数值结果	71
3.6	本章小结	78
第4章	SH波作用下直角域中圆形孔洞与裂纹的相互作用	79
4.1	引言	79
4.2	问题的表述	79
4.3	Green函数	80
4.3.1	Green函数的一般定义及其性质	80
4.3.2	Green函数的控制方程与边界条件	81
4.3.3	Green函数的表达式	82
4.3.4	本章中Green函数的性状	83
4.4	SH波对直角域中圆形孔洞的散射	85
4.5	问题的求解	85
4.5.1	波函数在新坐标系下的表达式	86
4.5.2	新坐标系下的应力函数	87
4.5.3	未知系数求解	89
4.5.4	位移场与应力场表达式	89
4.5.5	动应力集中系数(DSCF)和动应力强度因子(DSIF)	90
4.6	算例及结果分析	90
4.7	本章小结	107
第5章	SH波作用下直角域中圆形夹杂与裂纹的相互作用	108
5.1	引言	108
5.2	问题的表述	108
5.3	Green函数	109
5.3.1	Green函数的控制方程和边界条件	109
5.3.2	Green函数的导出	110
5.4	SH波对直角域中圆形夹杂的散射	111
5.5	问题的求解	112
5.5.1	新坐标系下的波函数	112
5.5.2	新坐标系下的应力函数	114
5.5.3	未知系数求解	116
5.5.4	位移应力场与动应力集中	117
5.6	算例及结果分析	118
5.7	本章小结	136
参考文献		137
名词索引		145

第 1 章 绪 论

1.1 课题背景及研究意义

自然界中存在着多种多样的天然介质和工程材料,其中总会或多或少地存在各种形式的物理不连续界面和缺陷,例如,地质岩层与断面、复合材料界面、零件加工缺陷和裂纹等。这些缺陷和界面有些是天然存在的,有些是在生产、加工、运输和使用的过程中人为偶然造成的,但也有一些是为了满足功能上的需要和工艺加工上的需求而人为设计出来的。总之,这些缺陷是不以人的意志为转移的,它们会以某种方式存在并影响着周围。当有某种形式的动态载荷作用时,这些天然介质或工程材料的内部就会产生弹性波动。弹性波动在弹性介质内传播的过程中,当其遇到障碍物(如界面、孔洞、夹杂和裂纹等)时,将会与障碍物发生相互作用,这种相互作用会使障碍物表面上的任何一点成为一个新的波源,这些次生的新波源也会向着各个方向发出次生波,这种现象称为弹性波的散射现象。

弹性波的散射是弹性动力学中最重要的研究课题之一。研究弹性介质内孔洞、夹杂物、裂纹等异质体对弹性波的散射问题,在许多工程领域中具有重要意义^[1-6]。诸如石油、煤炭、矿石等地下埋藏物的探测,矿井通道、地铁隧道、海底隧道等地下结构的修建与防护,复合材料的材料特性分析与超声无损检测,以及水下声呐、爆破等技术的应用等。对于这些问题的研究,归根到底就是要弄清楚弹性波的散射效应与埋藏物的几何、物理特性之间的相互关系,弄清楚与断裂力学参数的相互关系等。从工程应用的观点来看,众多的弹性波散射问题涉及的是其反问题,也就是说,通过对实际测量得到已知弹性波的散射效应进行分析的前提下,反推出异质体的几何尺寸、方向以及介质特性、发射源等。要系统地解决这些反问题,毫无疑问,首先要对相应的正问题进行系统深入的研究,得到问题的固有规律和特性,从而为反问题的最终解决奠定基础。

近年来由于工程实践的需要提出了许多迫切需要解决的问题。例如,在防震、抗爆工程中要求给出地下结构的动力分析,给震源定位,估计震源的参数,认识地形和地壳厚度等对地震波的影响等,以便改进防震、抗爆和减少灾害的措施。目前,从文献来看,主要是以全空间中的异质体、半空间中的浅埋地下结构为研究对象,如圆形孔洞、椭圆形孔洞、任意形状的洞室以及弹性夹杂、衬砌等对地震波的散射已有成熟的理论和方法,并已开始指导工程设计^[7-13];而对于直角域内浅埋结构相对于完整弹性全空间和半空间而言更加困难,就目前的文献看,国内学者对该方面课题研究的分析和计算还不多见。本书对直角域中圆形孔洞或夹杂与裂纹同时存在时对 SH 波的散射与地震动问题进行了研究,不仅为弹性波散射问题的理论研究提供了新的思路,而且扩大了其理论研究的范围,研究成果也

可以为结构的抗震设计提供有价值的参考,具有一定的理论意义和广阔的工程应用前景。

1.2 弹性动力学的研究状况

1.2.1 弹性波散射问题的研究状况

早在19世纪中叶,研究弹性波散射问题的著名学者 Clebsch J D 为弄清光波的散射原理,在1863年研究了球形异质体对弹性波的散射效应。直到20世纪初,Sezawa K^[14]给出了弹性波散射问题的基本解,在求解中假设稳态的谐波入射到无限弹性介质内的异质体上产生散射,从总的波场来确定异质体外各处的应力和位移场。

在20世纪中期,弹性波的散射问题才真正成为工程领域中活跃的研究课题。Wolf A^[15]、Nagase M^[16]和 Knopoff L^[17]先后研究了球体对弹性波的散射,其研究内容偏向于地球物理学应用领域;Nishimura G 等人^[18]研究了各向异性介质中球形孔洞对弹性波的散射问题,并给出了动应力集中分布规律。在声学研究领域,这一时期,White R M^[19]和 Kato K^[20]分别运用理论方法和实验方法研究了弹性圆柱体的散射问题。Pao Y H 等^[21]、Mow C C 等^[22]还探讨了圆柱体中内含物周围的动应力集中问题。Jain D L 和 Kanwal R P^[23, 24]采用波函数展开法全面研究了圆柱形夹杂物和球体对弹性波的散射。Baron M L 等人^[25, 26]使用积分变换和波函数展开法对弹性介质中圆柱形孔洞引起的脉冲压缩波散射问题进行了研究。Datt S K 等人^[27]应用匹配渐进法研究了半无限空间中浅埋圆柱形孔洞对弹性波的散射问题,基本思路是将原散射场等效为散射近场和散射远场,并应用不同形式的级数展开式进行匹配而得到散射场的解。Bostrom A 和 Kristensson G^[28]提出了转换矩阵方法,并应用该方法解答了半无限空间中浅埋球形孔洞对 Rayleigh 波的散射问题。同时,Karlsson A^[29]还借助转换矩阵法讨论了板内埋藏孔洞对 Rayleigh 波的散射效应。

20世纪80年代,Pao Y H 等人^[30]提出了广义射线法,并应用该方法讨论了圆柱体对冲击波的散射效应。同时,黎在良和刘殿魁^[31]建立了各向异性介质的射线理论,并研究了各向异性介质中圆柱体对 SH 波的散射问题。Tan T H^[32-34]采用弹性动力互等定理分析了柱形体的散射效应。Pao Y H 和 Mow C C^[35]采用正则振型理论和超声频谱分析法分析了柱形体的散射问题。Simon M M^[36]还将积分方法应用于椭球壳对弹性波的散射问题中。Franssens G R 和 Lagasse P E^[37]应用有限元计算方法,并在有限元网格边界上采取了积分形式的边界条件,分析了多层介质中浅埋圆柱形异质体对弹性波的散射问题。

在弹性波的散射问题中,对于球体、圆柱体等规则形状的散射体主要是运用波函数展开方法进行分析。然而对于矢量波方程,只有在直角坐标系、圆柱坐标系、球坐标系、椭圆柱坐标系、抛物柱坐标系和圆锥坐标系下才能够分离变量。因此,对于形状复杂或多个复合的散射体,就难以应用波函数展开法,由此便发展了多种近似求解方法。Eshelby J D^[38]在分析椭球体中的内含物静力问题的基础上发展了等效内含物方法,Wheeler P 和 Mura T^[39]首先将该方法用于动力学研究领域。Gubernatis J E 等人^[40]提出了弹性介质中任意形状异质体对弹性波散射的体积分方法,Fu L S 和 Mura T^[41]应用该方法研究了弹性介质中椭球异质体对弹性波的散射问题。李灏、钟伟芳等^[42]采用 Gurtin 变分原理和“等

效”的思想推导出了弹性介质中内含多个任意形状异质体的等效性方程。Kawasaki I、Kennett B L N 和 Knopoff L 等人^[43-45]应用多个步函数对积分方程进行迭代求解的思路,推导出了多个散射体的位移积分方程,为研究多个任意形状内含物散射的相互作用奠定了理论基础。同时,钟伟芳等人^[46-49]运用广义格林公式与加权残数法推导了单个任意形状散射体或多个散射体的边界积分方程式,并获得了一系列的数值计算结果。

1982年,刘殿魁等人^[50]提出了弹性波散射的复变函数方法,该方法与多极坐标移动技术结合起来处理问题更显出它的优越性,能够方便地求解全空间或半空间中单个或多个孔洞、夹杂和衬砌等结构对 SH 波散射的动应力集中问题^[51-55],大大地拓广了传统波函数展开法的应用范围。同时,结合保角映射技术实现了复杂异质体的不规则边界转化成容易处理的规则边界^[56-58]。刘殿魁等人^[59-67]应用 Green 函数方法与界面契合思想求解了界面孔洞、界面夹杂以及界面衬砌等对 SH 波散射的一系列问题。

由于航天航空等工业领域复合材料的飞速发展,使得各向异性、层状等复合材料介质中的弹性波散射问题成为弹性动力学领域研究的热点。Mukunoki I A 和 Ting T C T^[68, 69]研究了瞬态波和稳态波在层状复合材料中的传播规律,并且采用等效的均匀黏弹性材料来替代分层介质的思想,提出了各向异性分层复合材料中弹性波黏弹性比拟理论^[70]。Shaw A H^[71]等人研究了稳态波在周期变化的层状介质中的传播问题,Nicolae 和 Chiroiu 运用伽辽金近似分析方法分析了表面波弹性半空间非均匀多层介质中的传播,并将该边值问题解耦为 Love 波和 Rayleigh 波的传播。

总之,弹性波散射理论经过近百年的发展,至今已经形成了严谨的理论体系和分析方法。从分析单个简单形状的散射体到任意形状或多个散射体,从各向同性介质到各向异性或层状复合材料;从采用经典的波特特征函数展开法、积分方程法发展到运用转换矩阵、射线方法、等效内含物法等近似求解方法,以及有限元和边界元等数值计算方法,将弹性波散射问题的研究逐步深入,使得许多工程实际中存在的边值问题逐步得到解决。

1.2.2 复合裂纹对弹性波散射的研究状况

Sih G C 等人^[72]研究了有限长裂纹对 SH 波散射问题,并给出了裂纹尖端动应力强度因子的数值结果。Achenbach J D 和他的学生^[73-77]利用积分方程法和射线法对平面裂纹的弹性波散射问题进行了深入的研究,分析了表面裂纹和内部裂纹对 P 波、SV 波和 SH 波的散射效应,得到近场和远场的散射特性。Mal 等人研究了全空间中硬币形裂纹对弹性波的散射问题,获得了 P 波和扭转波作用下的近场和远场散射特性。Gracewski S M 和 Bogy D B^[78, 79]研究了多层介质中界面裂纹的弹性波散射问题。Itou S^[80]研究了多个裂纹的散射问题,并给出了双裂纹动应力强度因子的性状。汪越胜等人^[81]应用奇异积分方程法研究了裂纹体对弹性波的散射问题。

对于复合裂纹缺陷的断裂特性研究,即裂纹缺陷和圆形孔洞(夹杂)等非裂纹缺陷的相互作用问题。Sih G C^[82]利用复变函数法给出了孔边共线Ⅲ型裂纹的静态应力强度因子的解析解。刘殿魁等人^[83-87]利用弱奇异积分方程法和界面“契合”的思想,研究了界面孔洞、夹杂和衬砌等异质体与界面裂纹共同存在时对 SH 波散射的一系列问题,对揭示裂纹缺陷与非裂纹缺陷的相互作用规律具有重要意义。李宏亮^[88]和杨在林^[89]用 Green 函

数法和裂纹“切割”技术分别研究了全空间和半无限空间中圆形孔洞(夹杂)与裂纹同时存在时对 SH 波的散射和裂纹尖端的动应力强度因子。

脱胶结构可视为表面不相接触的裂纹。Coussy O^[90-91]曾对圆柱形夹杂与基体界面脱胶的情况进行了研究,并得到了远场近似解。汪越胜和王铎^[92]研究了 SH 波作用下衬砌部分脱胶裂纹的散射问题,并获得了动强度因子和远场位移的散射截面的数值计算结果,结果表明,由于界面脱胶裂纹的存在,使得裂纹动强度因子在较低的频率上发生共振。汪越胜和王铎^[93]还研究了 P 波作用下刚性圆柱形夹杂部分界面脱胶裂纹的散射问题。最近,齐辉、赵嘉喜等人^[94-97]应用界面契合方法求解了界面脱胶结构对 SH 波的散射问题。

1.2.3 地形影响问题的研究现状

大约从 20 世纪六七十年代开始,在以弹性波散射及动应力集中为理论基础情况下,已经获得了大量关于地下结构防震、抗爆性能的研究成果^[98,99]。局部场地条件主要包括两方面内容:地形的不规则性和介质的不均匀性。前者主要是指凹陷地形和凸起地形的变化;而后者主要是指地下浅埋孔洞、夹杂、衬砌等情况,可将其视为“隐形地形”。

1971 年至 1973 年期间,Trifunac M D 首先采用波函数展开法,研究了 SH 波作用下半圆形沉积地形^[100]以及半圆形凹陷地形的散射问题^[101]。1990 年,刘殿魁、韩峰分别研究了 SH 波作用下各向异性凹陷地形^[102]和半无限圆形凹陷地形^[103]的散射问题,并于 1991 年采用复变函数“保角映射”的方法解答了任意形状凹陷的散射问题^[104]。1992 年,许贻燕、韩峰^[105]采用复变函数方法和多极坐标移动技术研究了多个半圆形凹陷地形对 SH 波的散射问题。近年来,关于凹陷地形的研究成果日趋丰富^[106-110]。

入射波作用下,凸起地形将对其产生多次反射,故凸起地形引起的散射波形式较凹陷地形相比更为复杂,为此对凸起地形的理论研究较晚。1992 年,袁晓铭^[111]利用波函数展开方法研究了 SH 波作用下半圆形凸起地形的动力响应问题。而刘殿魁等人^[112,113]采用“分区”及“契合”方法,求解了半圆形和任意圆弧形凸起地形对 SH 波的散射问题,并于 1998 年,研究了多个半圆形凸起地形对 SH 波的散射问题^[114]。同时,刘殿魁、邱发强等人^[115]利用“契合”方法对三角形凸起地形对 SH 波的散射问题进行了研究。

以上介绍的各种地形缺陷对弹性波的散射问题多是对稳态 SH 波的散射问题,而对于 P 波及 SV 波的研究很少,但也取得了一定的成果。1990 年,Cao H 和 Lee V W^[116]对半圆形凹陷对 P 波的散射问题进行了研究;1997 年,刘宏伟、刘殿魁等人^[117]利用复变函数方法研究了不同深度的凹陷地形对 P 波的散射问题;梁建文等人采用 Fourier-Bessel 级数展开方法研究了 P 波作用下圆弧形层状沉积谷^[118]与 SV 波作用下圆弧形凹陷地形表面覆盖层的散射问题^[119];尤红兵等人^[120]采用间接边界元法对 SV 波作用下层状半空间中洞室的散射问题进行了研究。

1.3 弹性波散射问题的主要研究方法

随着弹性动力学理论的不断发展和计算机水平的迅速提升,对于弹性波散射问题的研究,就分析方法而言,有解析法和数值法两大类。

解析法主要包括波函数展开法、转换矩阵法、射线法、积分方程法、复变函数法等。由于实际工程结构的复杂性和多样性,使得解析法的应用往往受到限制。因此数值法便逐渐发展起来,并具备了一定的工程使用价值,获得了相应的研究成果。主要的数值法包括有限元法、边界元法和边界法等,然而数值法难以控制计算误差以及不能透视问题的本质等是其需要克服的缺点。以下仅对波函数展开法和复变函数法两种解析法进行简要的介绍。

波函数展开法在数学物理方法中称为分离变量法。它是在曲线坐标中,通过将波动方程中径向、角度和时间变量进行分离,得到各分离变量的常微分方程。然后,将散射波用波函数的级数形式进行表示,再由边界条件确定出级数展开式中的未知系数,最后得到散射波级数形式的解答。因此应用波函数展开法的重要条件是变量应该是可以分离的。但由于曲线坐标的种类有限,到目前为止只有直角坐标、圆柱坐标、椭圆柱坐标、圆锥坐标、球坐标、扁长球面坐标、扁球面坐标、椭圆球面坐标、抛物线坐标和抛物面坐标。因此,该方法的适用范围受到一定的限制。但是它所提供的一些理论和结果,对人们以后研究弹性波散射问题起到了很重要的作用。

复变函数法是将求解问题中包含的全部物理量都用复平面变量函数的形式表达,这样就可以结合多极坐标移动技术方便地求解弹性介质中多个规则缺陷对弹性波的散射,同时还可以结合保角映射方法将求解问题中的不规则边界变换成容易处理的规则边界。引入“域函数”的概念将变换后的方程解表达为以“域函数”为通项的级数形式,借助复数傅里叶(Fourier)变换便可得到无穷线性代数方程组,通过截断有限项从而得到算例结果。其提出的“域函数”概念,大大拓宽了传统波函数展开法的使用范围。

1.4 本书的主要工作

本书采用复变函数法、叠加原理和裂纹“切割”技术研究了SH波作用下直角域中圆形孔洞(夹杂)及其附近任意方位直线裂纹的相互作用问题。首先,构造出应用于求解本书问题的Green函数,该函数为时间谐和反平面线源荷载作用于含有圆形孔洞(夹杂)弹性直角域时的位移函数解。其次,采用裂纹“切割”技术构造裂纹,即在裂纹所在区域上加载连续反向的反平面线源荷载,其大小与直角域中圆形孔洞(夹杂)对SH波散射产生的应力相等,使得裂纹区域剖面两侧的合应力为零,从而构造出裂纹,并因而得到直角域中圆形孔洞(夹杂)和裂纹同时存在条件下的位移场与应力场。最后,讨论了直角域不同的介质参数和几何参数对圆形孔洞(夹杂)周边的动应力集中系数分布、直角域的表面位移以及裂纹尖端的动应力强度因子变化的影响。本书具体工作如下:

第1章,介绍了本书选题意义和背景,综述了弹性动力学的研究现状,简要介绍了弹性波动的研究方法。

第2章,介绍了弹性波动的基本理论,具体包括弹性动力学的控制方程、波动方程的简化和分离变量解以及复数形式下的控制方程和波动方程。

第3章,研究了直角平面区域中圆形孔洞对SH波的散射。求解问题的关键是要构造一个能够自动满足直角域表面应力自由边界的散射波,该散射波利用SH波散射自身

的对称性质来构造,并由圆孔应力自由边界来确定。最终可将散射波问题归结为一个无穷代数方程组的求解。最后给出了具体算例,并讨论了直角域不同的介质参数和圆孔埋深对孔边动应力集中系数分布及直角域表面位移的影响。

第4章,研究了SH波作用下直角平面区域中圆孔与裂纹的相互作用,首先求解SH波在直角平面区域内圆形孔洞存在情况下的散射场,然后在裂纹实际存在的位置实施裂纹“人工切割”,以恢复存在的裂纹。而实施这一过程的关键,即是文中求解的Green函数,利用求得的Green函数构造裂纹,以求解圆孔与裂纹同时存在时对SH波的散射问题。

第5章,研究了SH波对直角平面区域中圆形夹杂及其附近直线形裂纹的散射问题。利用适合于本问题的Green函数,采用“人工切割”方法构造裂纹,推导出了圆柱形夹杂与裂纹相互作用的位移和应力表达式。最后给出具体算例,并讨论了不同入射波、圆柱形夹杂位置、圆柱形夹杂与基体介质的密度比时裂纹几何位置与尺寸对上述问题的影响。

第2章 基本理论和基本方程

2.1 弹性动力学的基本理论

2.1.1 弹性动力学的控制方程

在经典的线弹性理论中, 体积为 V 、表面积为 S 的均匀介质线弹性体动力问题的运动方程为

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

这里的应力张量 σ_{ij} 与应变张量 ε_{kl} 关系符合胡克(Hooke)定律, 即

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

而应变张量 ε_{kl} 通过位移矢量 u_i 由如下几何方程确定:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}) \quad (k, l = 1, 2, 3) \quad (2.3)$$

对于各向同性线弹性材料, 可以用以下材料常数表征: 弹性模量 E 、剪切模量 μ 、体积模量 K 、泊松比 ν 和拉梅(Lame)常数 λ , 其中任意两个常数独立。对于各向异性材料用 21 个相互独立的弹性常数 c_{ijkl} 表征。

设 $S = S_u + S_\sigma$, 表面 S 上的边界条件为

$$u_i(x, t) = \bar{u}_i(x, t) \quad (x \in S_u) \quad (2.4)$$

$$\sigma_{ij}(x, t) n_j = \bar{p}_i(x, t) \quad (x \in S_\sigma) \quad (2.5)$$

由控制方程式(2.1) ~ (2.3)所表达的线弹性动力问题的初始条件为

$$u_i(x, t_0) = u_{0i}(x) \quad (x \in V) \quad (2.6)$$

$$\dot{u}_i(x, t_0) = v_{0i}(x) \quad (x \in V) \quad (2.7)$$

上述公式中, $u_{0i}(x)$ 、 $v_{0i}(x)$ 、 $\bar{u}_i(x, t)$ 和 $\bar{p}_i(x, t)$ 为已知量。

1885 年, 诺伊曼(Neumann)证明了有限弹性介质基本边值问题解的唯一性。由此可知, 若体积为 V 、表面积为 S 的弹性体的解能满足方程式(2.1) ~ (2.7), 则弹性体的位移场、应力场和应变场的解也是唯一的。由方程式(2.1)、(2.2)和(2.3)合并得到的用位移表示的运动方程为

$$c_{ijkl} u_{k,lj} + \rho f_i = \rho \ddot{u}_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (2.8)$$

这就是关于各向异性弹性体著名的纳维-柯西(Navier-Cauchy)运动方程。

对于各向同性材料而言, 运动方程可表示为

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2.9)$$

相对应的各向同性材料的应力-应变关系为

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \quad (2.10)$$

2.1.2 波动方程的简化

对于均匀各向同性的弹性体,在不计体力情况下,方程式(2.8)可表示为

$$(\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot u + \mu \nabla^2 u = \rho \ddot{u} \quad (2.11)$$

由亥姆霍兹(Helmholz)定理可知,任何一个矢量场都可以表示成一个标量场 Φ 的梯度和一个矢量场 Ψ 的旋度之和,即

$$u = \nabla \Phi + \nabla \times \Psi, \quad \nabla \cdot \Psi = 0 \quad (2.12)$$

式中, Φ 和 Ψ 分别是标量和矢量的位移势,将式(2.12)代入式(2.11)可得

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Phi - \rho \ddot{\Phi}] + \nabla \times (\mu \nabla^2 \Psi - \rho \ddot{\Psi}) = 0 \quad (2.13)$$

如果

$$c_p^2 \nabla^2 \Phi = \ddot{\Phi}, \quad c_p^2 = (\lambda + 2\mu) / \rho \quad (2.14)$$

$$c_s^2 \nabla^2 \Psi = \ddot{\Psi}, \quad c_s^2 = \mu / \rho \quad (2.15)$$

则方程式(2.13)便可以满足。这里可以看出, Φ 和 Ψ 分别满足一个标量形式的波动方程和一个矢量形式的波动方程。

由于波动方程比原始的运动方程简单得多,可以从方程式(2.12)构造 u 的解,并使其势能满足波动方程式(2.12)以及初始条件和边界条件。克勒布施(Clebsch)于1863年首先提出了这种解的完备性,其后索米利亚纳(Somigliana)、迪昂(Duhem)、斯腾伯格(Sternberg)等人给出其证明。所有这些作者都假设了矢量场 Ψ 是无散度的,即 $\nabla \cdot \Psi = 0$ 。

弹性动力学的完备性定理表明了,在弹性固体里仅存在着两种不同类型的波,一个是以速度 c_p 传播的 Φ 标量波,另一个是以速度 c_s 传播的 Ψ 矢量波。这两种波的波速比仅仅是材料的泊松比 ν 的函数,用符号 κ 表示为

$$\kappa = \frac{c_p}{c_s} = \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \right)^{1/2} = \left(\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu} \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

由 $\nabla \Phi$ 产生的波速较快,称其为初波,由 $\nabla \times \Psi$ 产生的波称为次波(S波)。这两种波还可以用其他的物理性能来区别它们,所以初波又称为膨胀波、压缩波、纵波、无旋波和P波等,次波又称为剪切波、旋转波、等体积波、横波和S波等。

2.1.3 波动方程的分离变量解

设齐次波动方程式(2.15)解的形式为

$$\Psi = W(x_j) T(t) \quad (2.17)$$

式中, T 仅依赖于时间变量, W 仅依赖于空间变量,把式(2.17)代入式(2.15)可得到

$$c^2 \frac{\nabla^2 W}{W} = \frac{\ddot{T}}{T} \quad (2.18)$$

从而得到

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2.19)$$

$$\nabla^2 W + k^2 W = 0, \quad k = \omega/c \quad (2.20)$$

式中, ω 为常数。

式(2.20)为与时间有关的方程, 有两个相互独立的解 $e^{i\omega t}$ 和 $e^{-i\omega t}$ 。因此式(2.20)具有 $W(x_j)e^{\pm i\omega t}$ 形式, 该解为时间谐和的波, ω 为时间谐和波的圆频率。式(2.20)也为与空间相关的方程, 称为约化的波动方程, 即 Helmholtz 方程。下面只对其在柱坐标系下进行分解。

假定 W 与直角坐标分量 z 无关, 在柱坐标 (r, θ, z) 下, 式(2.20)就可表达为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} + k^2 W = 0 \quad (2.21)$$

在轴对称情况下, W 与 θ 无关, 式(2.21)变为

$$\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} + k^2 W = 0 \quad (2.22)$$

该方程是以 kr 为宗量的零阶贝塞尔 (Bessel) 方程, 它的两个线性无关解为 $H_0^{(1)}(kr)$ 和 $H_0^{(2)}(kr)$ 。 $H_0^{(1)}(kr)$ 和 $H_0^{(2)}(kr)$ 分别为零阶的第一类和第二类汉克尔 (Hankel) 函数, 它们与时间因子 $e^{\pm i\omega t}$ 的组合称为时间谐和驻波。当 r 很大时, Hankel 函数的渐近表达式为

$$H_0^{(1)}(kr) = \sqrt{2/(\pi kr)} e^{i(kr - \pi/4)} + O(r^{-3/2}) \quad (2.23)$$

$$H_0^{(2)}(kr) = \sqrt{2/(\pi kr)} e^{-i(kr - \pi/4)} + O(r^{-3/2}) \quad (2.24)$$

由此可见, $H_0^{(1)}(kr)e^{-i\omega t}$ 、 $H_0^{(2)}(kr)e^{i\omega t}$ 表示由坐标原点向外传播的波, 而 $H_0^{(1)}(kr)e^{i\omega t}$ 、 $H_0^{(2)}(kr)e^{-i\omega t}$ 表示由无穷远向坐标原点会聚的波。 $r^{-1/2}$ 为由几何扩散引起的柱面波的振幅衰减因子。

2.2 固体中的平面波

固体中的平面波表示为

$$u = A f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - ct) \quad (2.25)$$

或

$$u_i = A_i f(x_k n_k - ct) \quad (2.26)$$

式中, A 为振幅矢量; f 为任意函数; $\mathbf{n}$ 为波面法线, 即波的传播方向; c 为波速。

将式(2.26)代入式(2.11)可以看出, 只有在

$$(\lambda + \mu)(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + (\mu - \rho c^2)\mathbf{A} = 0 \quad (2.27)$$

时, 式(2.25)给出的形式才能代表弹性固体中的平面波。此时还可以用位移势将平面弹性波表现出来, P 波可写成

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 f(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - c_p t) \\ \psi &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

相应的位移为

$$u_p = \nabla \varphi = \varphi_0 n f'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - c_p t) \quad (2.29)$$

式中,撇号表示对宗量的微分。

S 波可写成

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - c_s t) \\ \varphi &= 0\end{aligned}\quad (2.30)$$

式中, ψ_0 为垂直于 $\mathbf{n}$ 的任意常矢量。

令 $\mathbf{p}$ 为 S 波的偏振方向的单位矢量。于是可将 ψ_0 写成 $\psi_0 = \psi_0 \mathbf{p} \times \mathbf{n}$ 并将剪切波写成

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0 (\mathbf{p} \times \mathbf{n}) g(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - c_s t) \\ \varphi &= 0\end{aligned}\quad (2.31)$$

式中, ψ_0 为标度系数。

由式(2.19)中的势求得位移矢量

$$\mathbf{u}_s = \nabla \times \psi = \psi_0 \mathbf{p} f'(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} - c_p t), \quad \mathbf{p} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.32)$$

因为位移矢量 $\mathbf{u}_p$ 总与波的法线 $\mathbf{n}$ 是平行的, 所以, 关于平面 P 波的偏振方向不会有第二种解释。但是, 除非式(2.32)中的 $\mathbf{p}$ 是规定好的, 否则 S 波的偏振方向难以确定, 因为 $\mathbf{u}_s$ 可以是与 $\mathbf{n}$ 相垂直的单位矢量中的任意一个(图 2.1)。为方便起见, 在介质中选一条直线作为垂直坐标轴(图 2.1 中的 x_2 轴), 任何一个垂直于该直线的平面均视为水平面。如果 S 波的偏振方向与水平的 x_3 轴平行, 则称此 S 波为 SH 波; 如果与垂直平面(图 2.1 中的 $x_1 x_2$ 平面)相平行, 则称此 S 波为 SV 波。由于地球表面给我们提供了一个天然的水平基面, 所以这种参考系对于处理地震波是非常方便的。对于其他问题, 可以任意选择某个方向作为垂直轴, 其他轴也就随之确定。显然, P 波和 SV 波构成了一种平面运动的分量, 而 SH 波则代表了一种反平面运动。反平面运动与平面运动是两种不相耦合的运动。

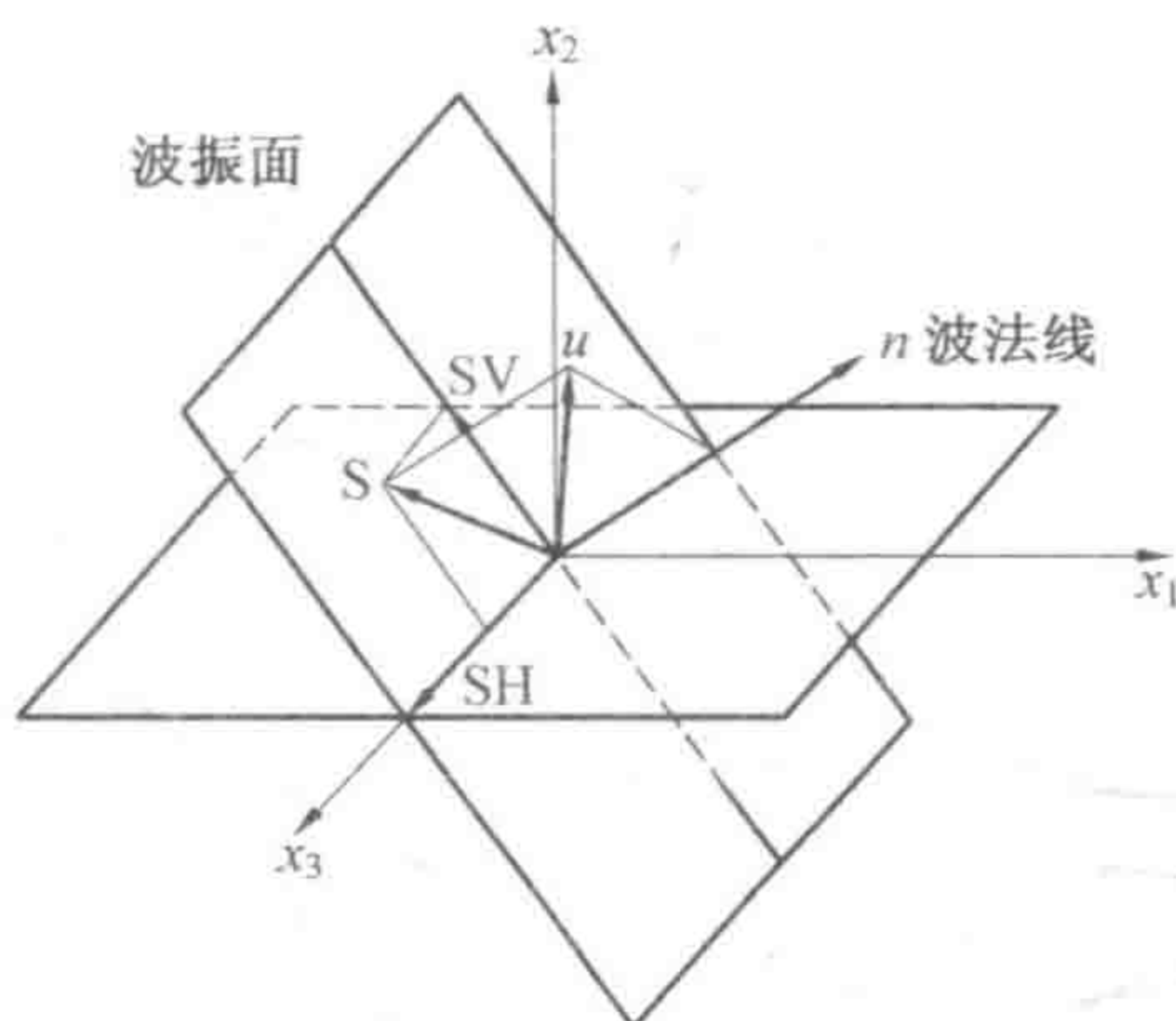


图 2.1 平面波在固体中的传播

此处研究反平面波动问题, 即弹性介质中 SH 波的散射问题。这时只有沿着 x_3 轴方向的位移分量不为零, 即

$$\left. \begin{aligned}u_1 &= 0 \\ u_2 &= 0 \\ u_3 &= W(x_1, x_2, t)\end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$