工程力学专业规划教材

振动力学

丛书主编　赵　军
本书主编　苗同臣

3

中国建筑工业出版社

工程

振动力学

丛书主编　赵　军

本书主编　苗同臣

中国建筑工业出版社

图书在版编目（CIP）数据

振动力学/苗同臣主编．—北京：中国建筑工业出版社，2017.1

工程力学专业规划教材/赵军主编

ISBN 978-7-112-20142-6

Ⅰ.①振… Ⅱ.①苗… Ⅲ.①工程振动学-高等学校-教材 Ⅳ.①TB123

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 294739 号

本书是在作者多年来为力学、机械等专业本科生、研究生讲授《振动理论》和《结构动力学》等课程的基础上，经过反复实践、精炼和修改后形成的振动力学教程。

本书内容上以经典的线性振动理论为主，包括单自由度、多自由度和连续系统的振动，作为入门还简单讲述了非线性振动和随机振动的基本概念和研究方法，同时介绍了多种用于线性和非线性振动分析的数值计算方法。为便于基本概念和理论知识的理解和掌握，书中给出了大量的例题和练习题。

本书可作为高等院校工科相关专业研究生和高年级本科生的振动理论和结构动力学教材或教学参考书，也可供从事与振动和结构动力分析教学和研究相关的教师和工程技术人员参考。

责任编辑：尹珺祥　赵晓菲　朱晓瑜
责任设计：谷有稷
责任校对：李欣慰　关　健

工程力学专业规划教材
振动力学
丛书主编　赵　军
本书主编　苗同臣
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京海淀三里河路 9 号）
各地新华书店、建筑书店经销
唐山龙达图文制作有限公司制版
环球东方（北京）印务有限公司印刷
*
开本：787×1092 毫米　1/16　印张：14¼　字数：353 千字
2017 年 1 月第一版　2017 年 1 月第一次印刷
定价：**35.00** 元
ISBN 978-7-112-20142-6
（29636）

前　言

振动是自然界最普遍的运动形式之一，在现代工程技术的各个领域，任何在役结构和机械设备都承受着动态荷载的作用，进而普遍存在着物体在一定区域内往复运动的振动现象。作为入门知识，振动力学是力学、机械、航空航天、动力与交通、电力、土木、水利等各个领域工程技术人员从事结构动力分析和研究工作的重要理论基础之一，也是相关专业研究生和高年级本科生的必修专业课。

本书是在作者多年来为力学、机械等专业本科生、研究生讲授《振动理论》、《结构动力学》和《计算结构动力学》等课程的基础上，经过反复实践、精选、修改完成。内容讲述力求做到逻辑严谨、简明扼要、叙述清晰。为便于自学，帮助基本概念的理解和掌握，书中给出了大量不同类型、不同解法的例题和练习题，各章之间既各自独立，又互相联系。

本书的内容为机械振动，可分为基础理论和专题内容两个部分，前 4 章为基础理论部分，包括绪论、单自由度系统的振动、多自由度系统的振动和连续系统的振动；专题部分包括振动分析的近似方法、非线性振动和随机振动等。在第 5 章中，所有的方法、数据、例题均经过 MATLAB 编程验证，保证了数据的可靠性；非线性振动一章只讲述了基本的定量方法，而没有涉及定性分析的几何方法；随机振动部分包括平稳随机响应的传统方法和虚拟激励法。最后作为附录还编排了振动力学中必备的数学基础知识，包括单位阶跃函数和单位脉冲函数及其性质、傅里叶级数、傅里叶变换和拉普拉斯变换、随机变量与随机过程等。

本书由郑州大学“本科教学工程 卓越计划 教材建设”提供基金资助。由苗同臣、徐文涛、王珂和马卫平编写，苗同臣执笔和定稿。本书的插图绘制和初稿编辑工作由苗雨晴完成。

由于作者水平有限，书中的欠缺和错误在所难免，恳请读者不吝指正，提出宝贵意见。

目　　录

第1章　绪　论

1.1　概述

系统在其静平衡位置附近所做的往复运动称为**振动**（Vibration）。它广泛存在于生活和工程实际的各个领域，是自然界最普遍的现象之一，大至宇宙，小到原子粒子，无不存在振动。例如，日常生活中的声、光、热等物理现象包含振动，人体心脏的搏动、耳膜和声带的振动等；而工程技术领域中的振动现象更是比比皆是，通信、广播、电视、雷达等信号的产生、传播和接收，传输、筛选、研磨、抛光、沉桩等机械结构的设计等都离不开振动原理。

振动有它积极的一面，而在多数情况下，则会对机器或结构带来不良的影响。例如，阵风和地震引起结构和建筑物的振动，机器运转过程中产生的噪声，机床振动引起工件的加工精度降低，军械振动影响瞄准等；还有大桥因共振而倒塌、烟囱因风振而倾倒、飞机因颤振而坠落等，这类事故虽然罕见，但带来的灾害严重。

振动产生的原因很多，有的是由物体本身固有的原因引起，有的由外界干扰引起。我们研究振动的目的，就是要掌握各种振动的机理，了解振动的基本规律，从而设法有效地消除或隔离振动，防止或限制其可能产生的危害。同时，尽量利用振动积极的一面，使它更好地服务于日常生活和各个工程领域。

不同领域中振动问题所涉及的物理量及其物理特性各不相同，但表示它们运动规律的数学形式及其研究方法却是统一的。本书以**机械振动**（Mechanical Vibration）为研究对象，即研究工程中的机械或结构系统在其静平衡位置附近所作的往复运动。

1.2　振动系统及其模型

1.2.1　振动系统

在振动研究中，通常把所研究的对象（如机器或结构物）称为**振动系统**（Vibration Systems），把外界对系统的作用或引起机器运动的因素称为**激励**（Excitation）或**输入**（Input），在激励作用下机器或结构产生的动态行为称为**响应**（Response）或**输出**（Output）。随时间变化的激励或输入将引起振动的发生。可以用时间的确定函数来表示的激励称为**确定性激励**（Deterministic Excitation），不能用时间的确定函数表示的激励称为**随机激励**（Random Excitation），随机激励具有一定的统计规律性，可以用随机函数和随机过程描述。随机激励下的响应也是随机的。响应的形式可以是位移、速度、加速度或力。系统、激励和响应的关系如图 1-1 所示。

$$F(t)\xrightarrow[\text{（激励）}]{\text{输入}}\boxed{\text{振动系统}}\xrightarrow[\text{（响应）}]{\text{输出}}x(t)$$

图 1-1　系统、激励和响应的关系

振动分析（Vibration Analysis）就是研究系统、激励（输入）和响应（输出）之间

的关系，理论上讲，只要知道两者就可以确定第三者。这样，工程振动分析所要解决的问题可以归纳为以下几类：

（1）**响应分析**（Response Analysis）。已知系统和输入参数，求系统响应。振动分析为计算和分析结构的强度、刚度和允许的振动能量水平等提供依据。

（2）**系统设计**（System Design）。已知振动系统的激励（输入）和所要满足的动态响应（输出）要求，设计合理的系统参数。通常系统设计要依赖于响应分析，所以在实际工作中，系统设计和响应分析是交替进行的。

（3）**系统识别**（System Identification）。已知振动系统的激励（输入）和响应（输出）求系统参数，以便了解振动系统的特性。系统识别包括物理参数（质量、刚度、阻尼等）识别和模态参数（固有频率、振型等）识别。

（4）**环境预测**（Environment Prediction）。在已知系统响应（输出）和系统参数的情况下确定系统的输入，以判别系统的环境特征。

1.2.2 振动系统的模型

对结构进行振动分析，必须把所研究的对象以及外界对它的作用和影响简化为理想的力学模型。这个模型不但要简单，而且在动态特性方面应尽可能地与原系统等效。

任何结构，之所以能产生振动，是因为它本身具有**质量**（Mass）和**弹性**（Spring）。从能量关系看，质量可以储存动能，弹性可以储存势能。当外界对系统做功时，系统质量吸收动能，因而就具有运动速度；而弹性元件储存变形能，因而就具有使质量恢复原来状态的能力。这样，能量不断地变换就导致系统质量的反复运动（振动）。然而，在没有外界干扰（激励）的情况下任何振动都会逐渐消失，也就是说，振动系统本身存在一种阻碍振动持续进行的阻力，这种阻力称为**阻尼**（Damping）。显然，如果没有外界源源不断地输入能量，由于阻尼的能量消耗，振动现象将逐渐停息。由此可见，质量、弹性元件和阻尼是振动系统力学模型的三个要素。下面对这三个要素的特性作出具体说明。

（1）质量。表示物体惯性的一种度量，即表示力与加速度的关系。在力学模型中一般将质量简化为刚体。

（2）弹性元件。表示力和位移的关系。通常被简化为无质量并具有线弹性的弹簧，即弹性力的大小与其两端点的相对位移成正比。若弹簧两端的相对位移用 δ 表示，则弹性力

$$F=k\delta \tag{1-1}$$

其中 k 为弹簧刚度或弹簧常数，即使弹簧产生单位变形需要施加的力。

在许多实际问题中，经常遇到几个弹簧同时使用的情况，这时可以用作用在集中质量上的一个等效弹簧来代替。

设 n 个弹簧的刚度系数分别为 k_1，k_2，…，k_n，等效弹簧的刚度系数用 k_{eq} 表示。图 1-2 分别是 n 个弹簧并联、串联和与它们等效的单个弹簧系统。

n 个弹簧并联时，设每个弹簧的变形量为 δ，则

$$mg=k_1\delta+k_2\delta+\cdots+k_n\delta=\sum_{i=1}^{n}k_i\delta$$

对图 1-2(*c*) 所示的等效弹簧有 $mg=k_{\mathrm{eq}}\delta$，所以 n 个弹簧并联时的等效弹簧刚度为

$$k_{\mathrm{eq}}=\sum_{i=1}^{n}k_i \tag{1-2}$$

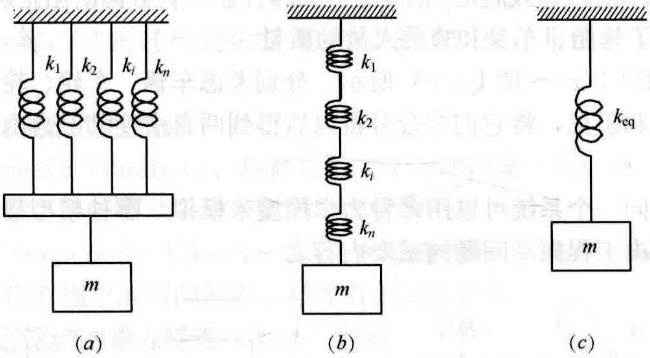

图 1-2　弹簧的并联与串联

n 个弹簧串联时，各个弹簧受力相同，变形量为 $\delta_i = \dfrac{mg}{k_i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，总变形量

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i = mg \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}$$

再利用图 1-2(c) 所示等效弹簧的关系 $mg = k_{eq}\delta$，得到 n 个弹簧串联时的等效弹簧刚度

$$\frac{1}{k_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i} \tag{1-3}$$

(3) 阻尼。是耗能元件，既不具有惯性，也不具有弹性，表示力与速度的关系。工程中不同结构的阻尼力与速度的关系是不一样的，阻尼力比弹簧力的分析要复杂得多。若阻尼力与速度的一次方成正比，则称此阻尼为**黏性阻尼**（Viscous Damping）或**线性阻尼**（Linear Damping）。若黏性阻尼器两端的相对速度用 v 表示，则阻尼力

$$F = cv \tag{1-4}$$

其中 c 为黏性阻尼系数，使阻尼产生单位速度需要施加的力。其他类型的阻尼将在下一章介绍。

像弹性元件一样，在实际应用中，对于包含多个阻尼元件组成的振动系统，同样可以将这些阻尼用一个作用在集中质量上的等效阻尼来代替。黏性阻尼并串联时的等效阻尼系数和弹簧并串联时的等效刚度系数类似，即将式(1-2) 和式(1-3) 中的 k 换成 c 即可。

振动系统的模型可分为**离散系统**（Discrete System）与**连续系统**（Continuous System）。离散系统又称集中参数系统（Lumped Parameter system），由质量、弹簧和阻尼元件组成，因此，离散系统可简称为 m-k-c 系统。离散系统的运动在数学上用常微分方程表达，运算比较简单，因而在振动力学理论和实际工程中都得到广泛应用。连续系统由弹性体元件组成，典型的弹性体有杆、梁、轴、板、壳等。弹性体的惯性、弹性与阻尼是连续分布的，故又称为**分布参数系统**（Distributed Parameter System）。连续系统模型接近系统的原态，但相对离散系统模型一般要复杂得多，其运动在数学上表现为偏微分方程形式，运算分析比较困难，因此在必要的情况下才选用连续系统模型。

下面通过实例说明一个复杂振动系统的力学模型建立过程。

图 1-3(a) 是一个载人摩托车示意图，建立它在铅垂方向的振动模型。

模型 1 如图 1-3(b) 所示。等效刚度 k_{eq} 考虑了轮胎的刚度、支撑杆在竖直方向的刚

度以及骑乘人员的刚度；等效阻尼 c_{eq} 考虑了支撑杆在竖直方向的阻尼和骑乘人员的阻尼；等效质量 m_{eq} 考虑了轮胎、车身和骑乘人员的质量。

模型 2～4 如图 1-3(*c*)～图 1-3(*e*) 所示。分别考虑车辆、车轮、轮胎、支撑杆和骑乘人员的质量、刚度和阻尼，将它们综合分析以后得到两自由度、三自由度和四自由度的振动模型。

由此可看出，同一个系统可以用多种力学模型来模拟，哪种模型最接近实际要进一步分析研究。这是解决工程振动问题的重要内容之一。

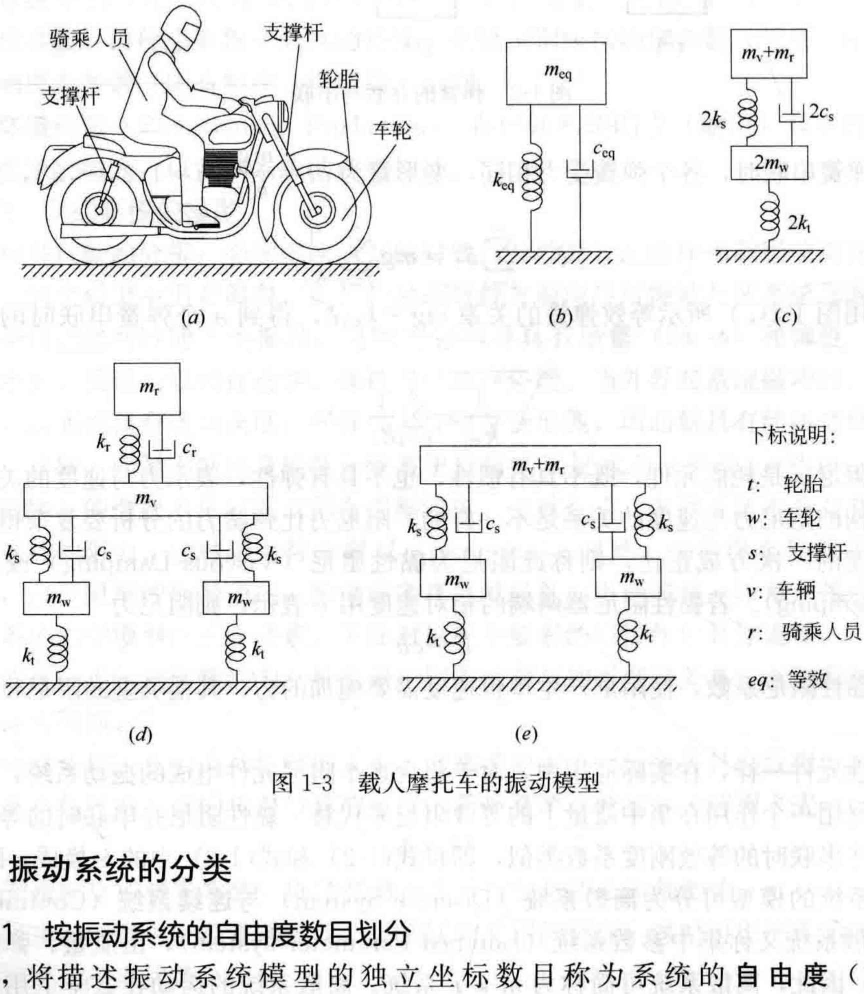

图 1-3 载人摩托车的振动模型

1.3 振动系统的分类

1.3.1 按振动系统的自由度数目划分

通常，将描述振动系统模型的独立坐标数目称为系统的**自由度**（Degree of Freedom）。这样，如果自由度数分别为一个、多个和无穷多个，则相应的振动系统分别为**单自由度系统**（Systems with One Degree of Freedom）、**多自由度系统**（Systems with Multiple Degree of Freedom）和**连续系统**（Continuous System）。

1.3.2 按描述振动的微分方程或振动系统的结构参数的特性划分

线性振动（Linear Vibration）：振动系统的惯性力、阻尼力、弹性恢复力分别与加速度、速度、位移呈线性关系，能够用常系数线性微分方程表述的振动。

非线性振动（Nonlinear Vibration）：振动系统的阻尼力或弹性恢复力具有非线性性质，只能用非线性微分方程表述的振动。

非线性方程（系统）在解法和解的性质上与线性系统存在很大的差异，大部分非线性方程不存在解析解，只能进行近似计算或作定性分析；非线性系统解不再具有叠加性。

1.3.3 按振动的周期性划分

周期振动（Periodic Vibration）：振动系统的某些物理量（如位移、速度、加速度等）是时间的周期性函数，往复振动一次所需的时间称为周期。

非周期振动（Nonperiodic Vibration）：又称**瞬态振动**（Transient Vibration），振动系统物理量的变化没有固定的时间间隔，即没有固定的周期。

1.3.4 按引起振动的输入特性（激励）划分

自由振动（Free Vibration）：系统受到初始激励作用后，仅靠其本身的弹性恢复力“自由地”振动，其振动的特性仅决定于系统本身的物理特性（质量和刚度）。

强迫振动（Forced Vibration）：系统受到外界持续的激励作用而“被迫地”振动，其振动特性除取决于系统本身的物理特性外，还与激励的特性有关。

自激振动（Self-excited Vibration）：有的非线性系统具有非振荡性能源和反馈特性，所受激励受到振动系统本身的控制，在适当的反馈作用下，系统会自动地激起稳定的振动，一旦振动被激起，激励也随之消失。

1.3.5 按振动的输出特性分类

简谐振动（Simple Harmonic Vibration）：可以用简单的正弦或余弦函数表述其运动规律的振动。显然简谐振动属于周期性振动。

非简谐振动（Anharmonic Vibration）：不能用简单的正弦或余弦函数表述其运动规律的振动。非简谐振动也可能是周期性振动。

随机振动（Random Vibration）：不能用简单函数或简单函数的组合来表述其运动规律，而只能用统计的方法来研究其规律的非周期性振动。

1.4 振动问题的研究方法

研究和解决振动问题的方法主要有理论分析、实验研究和数值模拟，三者相辅相成。在振动的理论分析中需要应用大量的数学方法和工具；现在计算机数值计算方法和软件的完善和普及，为解决复杂振动问题提供了强有力的手段；实验研究主要用于解决现场振动问题，通过振动信号采集和数据分析处理找出振动原因，排除振动故障。

需要研究和解决的振动问题主要包括：确定系统的固有频率，预防共振的发生；计算系统的动力响应，以确定结构受到的动荷载或振动的能量水平；研究平衡、隔振和消振方法，以消除振动的影响；研究自激振动及其不稳定振动产生的原因，以便有效地控制；振动检测，分析事故原因及控制环境噪声；振动技术的应用等。

研究振动问题通常包括以下步骤：

1.4.1 建立数学力学模型

建立模型的目的是揭示振动系统的全部重要特征，从而进一步得到描述系统动力学行为的控制方程。模型应该包括足够多的细节，能够用数学方程描述系统的行为但又不能过于复杂，所以模型的建立需要对实际系统做大量的工程研究和判断以得到比较合理实用的模型。图 1-3 就是一个典型的建立振动模型的实例。

1.4.2 推导控制方程

一旦得到振动系统的数学力学模型，就可以利用动力学定律推导描述系统响应变化规律的运动微分方程。

1.4.3 求控制方程的解

根据控制方程的形式选择合适的方法求出方程的解，以得到系统响应的规律。具体求解方法除了常规的数学解析法以外，对复杂的控制方程还可以使用变换、迭代等近似方法，以及利用计算机的数值计算方法。

1.4.4 结果分析

控制方程的解给出了系统的响应，但还需对这些结果进一步分析，以达到某些目的要求的数据和结果，以期对系统的设计和优化给出某些指导意义。

1.5 振动系统的运动方程

如前所述，一旦得到振动系统的数学力学模型，就需要建立描述系统响应变化规律的运动微分方程，这是整个振动分析过程中最重要，有时也是最困难的工作之一，具体方法通常包括下面几种。

1.5.1 动力学基本定理

对单个质点或平动刚体的运动可以使用牛顿（Newton）定律，根据质点的运动特征可使用定律的直角坐标形式或自然坐标形式。若质点在非惯性系中运动，可使用质点的相对运动微分方程。

对于质点系、刚体或刚体系，根据不同的运动特征，可使用动量定理或质心运动定理、动量矩定理或定轴转动微分方程、动能定理或功率方程，对于无阻尼自由振动系统（保守系统）还可以使用机械能守恒定律代替动能定理，除此之外，对平面运动刚体还可使用平面运动微分方程。

1.5.2 拉格朗日方程

对于多刚体多自由度系统，拉格朗日（Lagrange）方程是最有效的方法之一。

1.5.3 碰撞问题

冲击和碰撞是工程中常见的振动诱因，这类问题运动方程的建立要注意两个基本的概念，一是完全弹性碰撞，碰撞过程中无能量损失，碰撞前后动量守恒；二是完全塑性碰撞，碰撞以后碰撞体速度相同。除此之外还有通过恢复系数描述的一般碰撞问题，相对复杂一些。

1.5.4 其他

若振动系统在非惯性系中运动，最有效的方法是达朗贝尔（D'Alembert）原理。

除此之外，有些问题还要用到虚位移原理或虚位移的概念，用于确定不同位置微振动位移之间的关系。

对不同的振动问题，上述方法各有各的优点和适用条件，有的系统可能只能使用某种方法，而有的系统则可以使用多种方法。

第 2 章　单自由度系统的振动

单自由度系统是最简单、最基本的振动系统，可以用一个独立坐标来确定系统在任意时刻的位置及其运动规律。这种系统在日常生活和工程实际中广泛存在。单自由度振动系统的一些概念、特征和研究方法，是研究更复杂振动系统的基础。

■ 2.1　单自由度系统的运动方程

建立单自由度振动系统运动方程常用的方法主要有牛顿定律、定轴转动微分方程、能量法、达朗贝尔原理以及利用等效质量和等效刚度的定义等。

由于我们所研究的振动是物体在其静平衡位置附近所做的微小往复运动，所以建立运动方程时，一般应将坐标原点选在静平衡位置。下面从简单到复杂通过实例说明振动结构运动方程的建立方法。

2.1.1　简单振动系统

1. 标准黏性阻尼振动系统

设质量为 m 的重物，悬挂在刚度系数为 k 的弹簧和阻尼系数为 c 的黏性阻尼器上，在外干扰力（激励）$F(t)$ 作用下作铅垂方向的微幅振动，如图 2-1(a) 所示，简称 m-k-c 系统。它是许多实际振动问题的力学模型。

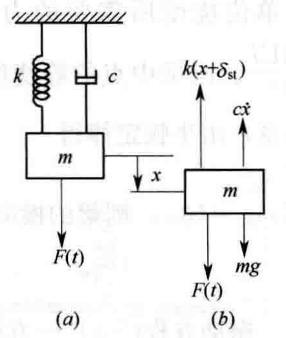

图 2-1　黏性阻尼振动系统

选取重物的静平衡位置为坐标原点，当重物偏离 x 时，受力如图 2-1(b) 所示，δ_{st} 为弹簧的静变形量。利用牛顿定律得

$$m\ddot{x}=mg+F-c\dot{x}-k(x+\delta_{st})$$

在静平衡位置 $mg=k\delta_{st}$，则系统的运动微分方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{2-1}$$

若不计阻尼和外干扰力，则系统变为无阻尼自由振动系统，简称标准 m-k 系统，方程(2-1) 变为

$$m\ddot{x}+kx=0 \tag{2-2}$$

2. 复摆

图 2-2 所示的复摆在其静平衡位置附近自由摆动，设摆的质量为 m，对悬挂点 O 的转动惯量为 J_O，质心到悬挂点的距离为 a。选静平衡位置为坐标原点，当摆动微小角度 φ 时，利用定轴转动微分方程可得复摆的转动方程

$$J_O\ddot{\varphi}+mga\varphi=0 \tag{2-3}$$

3. 自由扭转振动系统

如图 2-3 所示，下端的圆盘在均匀轴的弹性恢复力矩作用下在平衡位置附近作扭转振动。设圆盘对轴的转动惯量为 J，使轴产生单位扭转角所需施加的扭矩（即轴的扭转刚

度）为 k_θ，圆盘相对静平衡位置转过的角度用 θ 表示。忽略轴的质量，利用定轴转动微分方程可得系统的扭转振动方程

$$J\ddot{\theta}+k_\theta\theta=0 \tag{2-4}$$

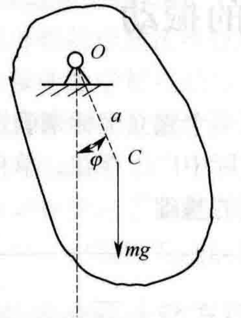

图 2-2　复摆振动系统

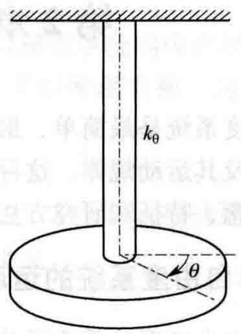

图 2-3　自由扭转振动系统

4. 梁的横向振动

如图 2-4 所示，质量为 m 的重物在弹性简支梁的中心处自由振动。设梁长为 l，材料的弹性模量为 E，截面惯性矩为 I，不计梁的质量。由于梁的挠度 δ 与作用力成正比，设其比例系数为 k（即产生单位挠度所需要的力），由材料力学可知 $k=\dfrac{48EI}{l^3}$。以梁中点的静挠度 δ_{st} 处为坐标原点建立坐标系，由牛顿定律得

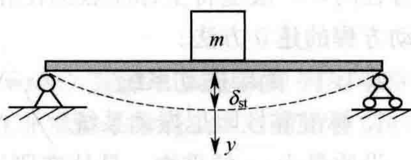

图 2-4　梁的横向振动

$$m\ddot{y}=mg-k(y+\delta_{st})$$

而 $mg=k\delta_{st}$，则梁的横向振动微分方程为

$$m\ddot{y}+\frac{48EI}{l^3}y=0 \tag{2-5}$$

振动方程(2-2)～方程(2-5) 可以写成统一的形式

$$m_{eq}\ddot{x}+k_{eq}x=0 \tag{2-6}$$

这里：m_{eq} 和 k_{eq} 分别称为**等效质量**（Equivalent Mass）和**等效刚度**（Equivalent Stiffness），x 为广义坐标。为方便起见，通常将等效质量和等效刚度直接写为 m 和 k，这样方程(2-6) 就变成了式(2-2) 的形式。

由此可知，标准 m-k 系统是一切单自由度无阻尼振动系统的模型，只需对方程(2-2) 或式(2-6) 进行求解分析就可以了。

从方程(2-6) 可以直接给出等效质量和等效刚度的定义：使系统在选定的广义坐标上产生单位加速度（或单位位移），需要在此坐标方向上施加的力，称为系统在此坐标上的等效质量（或等效刚度）。这里的加速度、位移和力都是与广义坐标相对应的广义量。

对于无阻尼自由振动系统，振动过程中能量守恒，可以通过计算动能和势能直接确定等效质量和等效刚度。即将动能和势能表示为

$$T=\frac{1}{2}m_{eq}\dot{x}^2,V=\frac{1}{2}k_{eq}x^2 \tag{2-7}$$