国家理科基地大学数学系列教材

高等数学 下册

（第二版）

刘金舜　羿旭明　编著

科学出版社

国家理科基地大学数学系列教材

高等数学

下册

（第二版）

刘金舜　羿旭明　编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是大学经济管理类（包括文科）的高等数学教材，列为武汉大学"十二五"规划教材之一.

全书分上、下两册，共十四章. 上册介绍一元函数的微积分学，包括函数的极限、连续、导数、不定积分、定积分、广义积分以及导数在经济学中的应用、定积分的应用等. 下册介绍空间解析几何、二元（多元）函数的微积分学、级数、常微分方程及差分方程等.

本书在传统的经济类高等数学的基础上内容稍有拓宽，主要加强了空间解析几何和无穷级数方面的内容. 每一章都配备一套针对本章内容的综合练习题. 此外，在全书最后，还配有两套综合全书内容的综合练习题. 这些试题，既有深度，又有一定的难度. 熟练地掌握这些试题的解题思路及证明方法，对将来考研将起到很重要的作用.

本书适合经济、管理、部分理工科（非数学）、社科、人文等各专业学生使用，也可供教研人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学. 下册/刘金舜，羿旭明编著. —2版. —北京：科学出版社，2017.6

国家理科基地大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-053660-0

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①刘… ②羿… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 129420 号

责任编辑：吉正霞 / 责任校对：肖 婷

责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2017 年 6 月第 二 版 印张：12 3/4

2017 年 6 月第一次印刷 字数：296 000

定价：32.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

本书根据教育部经济管理类数学课程教学基本要求，以提高学生数学素质、掌握数学思想方法与培养应用创新能力为目的，针对大学经济类、管理类各专业的教学实际编写而成. 本书参考了国内外出版的优秀教材，充分吸收了编者们多年来教学实践经验与教学研究成果. 同时，为了更好地适应教学与改革的需要，武汉大学确定并公布了“十二五”规划教材，本书是“十二五”规划教材之一.

在当前高等教育从精英化教育到大众化教育的趋势下，对数学类课程的教与学都提出了新的要求. 良好的数学素养是学生进一步学习的基础，而“高等数学”教学在培养学生的分析能力、归纳能力、抽象能力、空间想象能力、演绎推理能力以及准确计算能力等方面起到重要的基础性作用，为后续的课程学习奠定基础. 因此，“高等数学”成为高等学校经管类、文理科类本科专业的必修或选修课之一，也是经管类硕士研究生入学考试中的一门必考科目.

本书具有以下特色：

(1) 保持传统经典高等数学教材的编排体系，强调高等数学在经济管理中的应用，并在例题和习题中加以体现.

(2) 内容展开沿用“定义、定理、推理、例题”的形式化演绎，力求在语言准确的前提下，陈述通俗易懂，深入浅出，推理简洁直观.

(3) 适当弱化解题技巧训练的要求，强调基本方法和基本技巧的训练.

(4) 体现知识、能力、意识三者之间的关系. 既要讲授知识，又要培养运用知识的能力，同时培养运用知识解决问题的意识.

(5) 考虑学生的考研需求. 从教材的内容和结构上注意与考研大纲的衔接，从例题和习题上反映考研的典型题型和知识要点.

本套教材含《高等数学》上、下册，总课时 144 学时，并配有《高等数学同步习题解答》. 上册内容包含函数的极限、连续、导数、不定积分与定积分、广义积分等，在介绍一元函数微积分学的同时，还介绍了导数在经济学中的应用、定积分的应用等内容. 下册内容介绍了空间解析几何与向量代数、二元(多元)函数的微积分学、级数、常微分方程及差分方程等内容. 书中部分带有“ * ”号的章节，属于拓展部分，可视具体情况讲授.

本套教材在每一章后都配备较多的习题，此外还精心编写了一套针对本章内容的综合练习题. 在全书最后还编写了两套综合全书的综合练习题. 每套习题既有广度，又有一定难度. 这些综合练习题对学生掌握书本知识和考研均有帮助.

本套教材第 1 章由韦光贤编写，第 2 章至第 7 章由刘金舜编写，第 8 章至第 14 章由羿旭明编写，全书的习题及综合练习题均由刘金舜编写. 本套教材最后由刘金舜审核定稿. 本套教材在前期编写以及后期统稿中得到了武汉大学数学与统计学院的郜淑

彩、孟新焕、杨丽华、陈绍林、唐道远、$\boxed{\text{李汉保}}$等教授的帮助，在此表示感谢. 在教材编写过程中，我们参考了国内外部分院校的相关教材，在此表示感谢. 本套教材的立项、编写到出版，得到武汉大学数学与统计学院的领导及科学出版社的关心与支持，在此一并表示衷心感谢！

由于作者水平有限，书中有不足之处，希望广大专家、同行和读者批评指正.

刘金舜
2017 年 5 月于武汉大学

目　　录

第8章 空间解析几何与向量代数

在后面相关章节中，将讨论多元函数微积分学，而空间解析几何学作为多元函数微积分学的基础是不可或缺的，考虑到后面只涉及空间解析几何的部分内容，因此本章并不准备详细介绍有关空间解析几何学与向量代数的全部内容，而只就相关知识作一些介绍.

8.1 向量及其线性运算

8.1.1 向量的概念及几何表示

许多量如质量、长度、面积、体积等，它们在取定一个单位后，可以用一个数来表示，这种量称为标量(或数量)；有一类量如速度、加速度、力等，除了要用数量来表示其大小外，还必须指出其方向，这种既有大小，又有方向的量称为向量(或矢量)，通常习惯用黑体字母表示向量，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{s}$ 等.

在几何学中，常常用有向线段$\overrightarrow{AB}$表示向量 $\boldsymbol{a}$，其中，A 为向量的起点，B 为向量的终点(图 8.1.1). 用有向线段的长度表示向量的大小(或称向量的模)，常用$|\overrightarrow{AB}|$(或$|\boldsymbol{a}|$)表示，有向线段$\overrightarrow{AB}$的方向表示该向量的方向. 对于起点不同的向量，除非向量的大小或向量的方向不同，否则我们认为是同一向量，并称这种向量为自由向量. 后面我们仅限于讨论自由向量. 例如，在图 8.1.2 中，$ABCD$ 为一平行四边形，对于自由向量，则有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$$

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相同，方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量(或反向量)，记做$-\boldsymbol{a}$；模等于 1 的向量称为单位向量；模等于 0 的向量称为零向量，记做$\boldsymbol{0}$；零向量没有确定的方向，或者说零向量的方向可以任意选取.

将向量 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平行移动到相同的起点，这时向量所在的射线之间的夹角 θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记做$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$，如图 8.1.3 所示. 并且规定零向量与其他任意向量的夹角为 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$ 中的任意值. 如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 平行，并记做 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，同时规定零向量与任意向量平行. 如果非

零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 $\frac{\pi}{2}$，我们称向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直，并记做 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，并规定零向量与任意向量垂直.

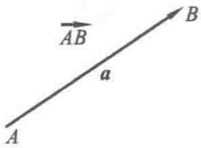

图 8.1.1

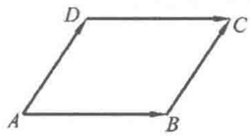

图 8.1.2

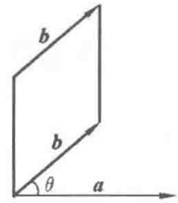

图 8.1.3

8.1.2 向量线性运算的几何方法

1. 向量的加减法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，将向量 $\boldsymbol{b}$ 的起点平行移动到向量 $\boldsymbol{a}$ 的终点，此时，我们把从向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点到向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量称为向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和，记做 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，如图8.1.4 所示. 这种定义向量和的法则称为向量加法运算的三角形法则. 显然，若将两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在同一点，并以向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则其对角线上的向量同样可以定义向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 8.1.4)，这种定义向量和的法则称为平行四边形法则.

两个向量加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量加法的情形：将所有向量依次平移，使之首尾相连，这样，从第一个向量的起点到最后一个向量的终点的向量就是这些向量的和，如图 8.1.5 所示.

向量的减法定义为向量加法的逆运算，对于向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，若 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{c}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的差，记为 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 从图8.1.6容易看出

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$$

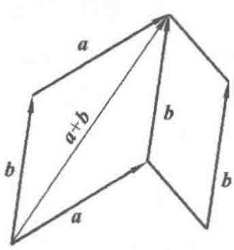

图 8.1.4

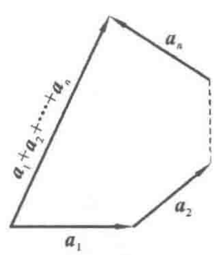

图 8.1.5

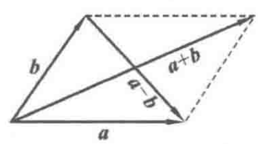

图 8.1.6

即向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的反向量之和. 而且，当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在同一起点时，向量 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 等于从向量 $\boldsymbol{b}$ 的终点到向量 $\boldsymbol{a}$ 终点的向量.

2. 向量的数乘

对于任意实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的乘积(简称数乘)是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，它

的模和方向规定如下：

(1) $|\lambda \boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

由数乘定义知，对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和任意实数 $\lambda\neq0$，总有 $\boldsymbol{a}/\!/\lambda\boldsymbol{a}$；反过来，若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 平行，必存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$. 此时我们就有结论：非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ 成立.

有了数乘的概念后，对于向量 $\boldsymbol{a}$ 的反向量 $-\boldsymbol{a}$，也可以理解为 $(-1)\cdot\boldsymbol{a}$. 同时，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 也可以理解为 $\boldsymbol{a}+(-1)\cdot\boldsymbol{b}$. 而且，对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，向量 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$ 为与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向且模为 1 的单位向量，由此即有 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0$，即任一非零向量都可以表示成其单位向量的数乘.

根据定义及几何作图法，可以验证向量的加法和数乘具有如下基本运算规律：

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$(加法交换律)；

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$(加法结合律)；

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}$；

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

(5) $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$(数乘结合律)；

(6) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$(数乘分配律)；

(7) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$(数乘分配律).

其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是任意向量，λ 和 μ 为任意实数.

向量的加法和数乘满足上述运算规律，如此定义的向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算.

8.2　空间直角坐标系与向量的坐标

8.2.1　空间直角坐标

为了建立空间中的点与数的关系，我们采用类似于平面解析几何的办法引进空间直角坐标系.

在空间中任取一定点 O，过 O 点作三条相互垂直的数轴，各数轴的原点均位于 O 点，且都具有相同的长度单位，这三条轴分别称为 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴. 为了确定起见，我们同时还规定其中的 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的正方向符合右手规则：以右手握住 Oz 轴，当右手的四个手指从正向 Ox 轴以 90° 角转向正向 Oy 轴时，竖起的大拇指的指向就是 Oz 轴的正方向，如图 8.2.1 所示. 图中箭头的指向表示 Ox 轴、Oy 轴、Oz 轴的正向. 这样的三条数轴就组成了一个以 O 点为原点的空间直角坐标系 $Oxyz$，Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴分别称为横轴、纵轴和竖轴，并统称为坐标轴.

笔记栏

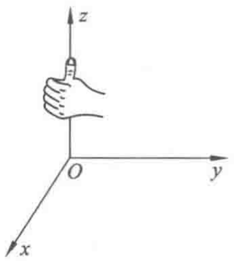

图 8.2.1

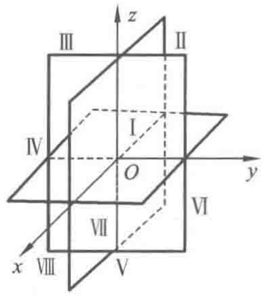

图 8.2.2

由 Ox 轴和 Oy 轴所确定的平面称为 xOy 平面,其他两个由 Ox 轴和 Oz 轴、Oy 轴和 Oz 轴所确定的平面分别称为 xOz 平面和 yOz 平面,这三个平面统称为坐标平面.

三个坐标平面把整个空间分成八个部分,每一个部分称为一个卦限.含有 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴正半轴的那个卦限称为第一卦限.在 xOy 平面上方,并按逆时针方向分别是第二、第三和第四卦限.在 xOy 平面下方,并和第一、第二、第三、第四卦限上下对应的四个卦限分别是第五、第六、第七、第八卦限.八个卦限的位置如图 8.2.2 所示,在图 8.2.2 中分别用罗马数字Ⅰ,Ⅱ,…,Ⅷ表示.

8.2.2 点和向量的投影

在空间中自点 A 向平面 π 作垂线,所得的垂足 A' 称为点 A 在平面 π 上的投影,如图 8.2.3 所示.

过空间一点 B 作平面 π 垂直于直线 L,相交于点 B',称点 B' 为点 B 在直线 L 上的投影,如图 8.2.4 所示.

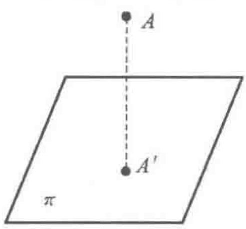

图 8.2.3

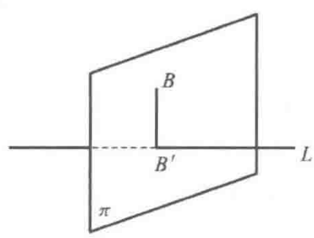

图 8.2.4

设 $\overrightarrow{AB}$ 为一空间向量,起点 A 和终点 B 在某个 u 轴上的投影分别为点 A' 和点 B',且 A' 和 B' 在 u 轴上的坐标分别是 u_A 和 u_B,则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影向量,同时称 u_B-u_A 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影,记做 $P_u\overrightarrow{AB}$,即

$$P_u\overrightarrow{AB}=u_B-u_A$$

由定义知,设 $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量,则有

$$\overrightarrow{A'B'}=(u_B-u_A)\boldsymbol{e}=(P_u\overrightarrow{AB})\boldsymbol{e}$$

在图 8.2.5 中，若将$\overrightarrow{AB}$的起点 A 平移到 u 轴上的 A'，此时向量$\overrightarrow{AB}$平移到$\overrightarrow{A'B''}$，由图 8.2.5 可知

$$P_u\,\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\boldsymbol{e}})$$

即一个向量在某轴上的投影等于该向量的长度与该向量和该轴夹角的余弦的乘积.

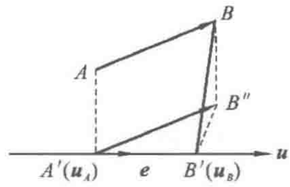

图 8.2.5

根据投影的定义，我们还可以定义向量 a 在非零向量 b 上的投影. 当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$时

$$P_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$$

当 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 时，$P_b\boldsymbol{a}=0$. 并给出如下定理：

定理 8.2.1　(1) 两个向量的和在某轴上的投影，等于这两个向量在该轴上的投影之和，即

$$P_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=P_u\boldsymbol{a}+P_u\boldsymbol{b}$$

(2) 一个数与向量的数乘在某轴上的投影，等于该数与该向量在该轴上的投影之积，即

$$P_u(\lambda\boldsymbol{a})=\lambda\cdot P_u\boldsymbol{a}$$

证　(1) 作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 点为起点作向量$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

设点 A,B,C 在 u 轴上的投影分别为点 A',B',C'，且各自在 u 轴上的坐标分别为 u_A，u_B，u_C，如图 8.2.6 所示，则

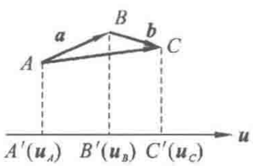

图 8.2.6

$$\begin{aligned}P_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})&=P_u\,\overrightarrow{AC}=u_C-u_A\\&=(u_C-u_B)+(u_B-u_A)=P_u\boldsymbol{a}+P_u\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

(2) 根据向量投影的定义(u 轴可以看做是一个向量，在此不妨记做 $\boldsymbol{u}$)，则

$$\begin{aligned}P_u(\lambda\boldsymbol{a})&=|\lambda\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\lambda\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}})\\&=\begin{cases}|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}), & \text{当 } \lambda\geqslant0\\-|\lambda|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}}), & \text{当 } \lambda<0\end{cases}\\&=\lambda|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{u}})=\lambda\cdot P_u\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

8.2.3　空间点的坐标与向量的坐标

1. 空间点的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 下，空间中任一点可以用这个点的坐标来表示. 具体地，设 M 为空间任一点，过 M 点分别作三个坐标轴的垂直平面，如图 8.2.7 所示，与 Ox 轴，Oy 轴和 Oz 轴分别交于点 P，Q 和 R(即点 M 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影点)，

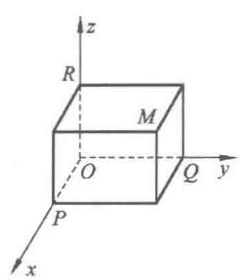

图 8.2.7

这三个点在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的坐标依次为 x，y 和 z，称有序数组 (x,y,z) 为点 M 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中的坐标；反过来，已知一有序数组 (x,y,z)，在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上分别找到相应的点 P，Q 和 R，使点 P，Q 和 R 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的坐标分别为 x，y，z，通过点 P，Q 和 R 分别作 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的垂直平面，相交于唯一一点 M，即唯一确定了空间中的一点 M. 这样就建立了空间中的点 M 与有序数组 (x,y,z) 之间的一一对应关系，并称其中的 x、y 和 z 分别为点 M 的横坐标、纵坐标和竖坐标，常记为 $M(x,y,z)$.

特别地，在坐标平面和坐标轴上的点，其坐标具有一定的特征. 例如原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$，Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$，$(0,y,0)$ 和 $(0,0,z)$；xOy 平面、xOz 平面和 yOz 平面上点的坐标分别为 $(x,y,0)$、$(x,0,z)$ 和 $(0,y,z)$.

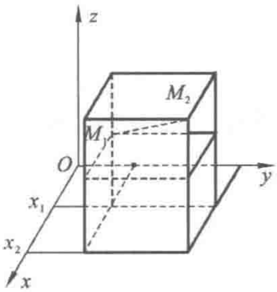

图 8.2.8

2. 空间中两点间的距离

设 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为空间中任意两点，过点 M_1 和 M_2 分别作垂直于 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的平面，这 6 个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体，如图 8.2.8 所示，易知长方体的棱长分别为 $|x_2-x_1|$、$|y_2-y_1|$ 和 $|z_2-z_1|$，于是对角线 M_1M_2 的长度，即空间任意两点 M_1 和 M_2 之间的距离为

$$d=|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

特别地，点 $M(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|MO|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

3. 向量的坐标

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，设向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影分别为 a_1，a_2 和 a_3，则称它们为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记为 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

为了讨论方便，在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，分别在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的正方向上选取三个单位向量，记做 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$，并称为基本向量. 用向量的坐标表示即有

$$\boldsymbol{i}=(1,0,0),\quad \boldsymbol{j}=(0,1,0),\quad \boldsymbol{k}=(0,0,1)$$

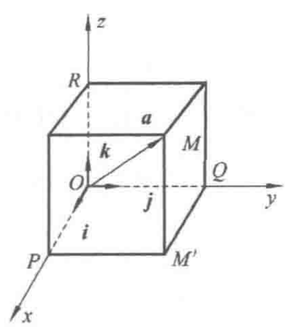

图 8.2.9

设有一任意向量 $a=(a_1,a_2,a_3)$，当我们把它的起点放在坐标系的原点 O 时，此时向量的终点 M 的坐标恰好为 $M(a_1,a_2,a_3)$. 设点 M 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影分别为 P，Q 和 R，在 xOy 平面上的投影为 M'，如图8.2.9 所示，则根据向量的加法规则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}\\&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

上式给出了向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 在三个基本向量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 上的分

笔记栏

解，$a_1\boldsymbol{i}$，$a_2\boldsymbol{j}$ 和 $a_3\boldsymbol{k}$ 分别为向量 $\boldsymbol{a}$ 在 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴上的投影向量，也称为分向量.

由向量投影的定义和定理 8.2.1 可知，两个向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 相等，当且仅当其坐标对应相等，即 $a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3$，而且，向量线性运算的坐标表示为

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3) \tag{8.2.1}$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3) \tag{8.2.2}$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)\quad(\lambda\text{ 为实数}) \tag{8.2.3}$$

8.2.4　向量的模与方向余弦

在直角坐标系 $Oxyz$ 中，为了确定向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向，通常用 $\boldsymbol{a}$ 与三个基本向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的夹角 α,β,γ 来描述，此时称 α,β,γ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角，$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

对于非零向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$，由向量坐标和投影性质，不难得到向量 $\boldsymbol{a}$ 的模及方向余弦的计算式

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2} \tag{8.2.4}$$

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{8.2.5}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{8.2.6}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}} \tag{8.2.7}$$

且方向余弦满足关系式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1 \tag{8.2.8}$$

8.3　向量的点积、矢量积和混合积

8.3.1　向量的点积

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，称 $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 的点积，并记做 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

从以上定义知，两个向量的点积是一个数，因此向量的点积又称为向量的数量积. 同时，容易验证，向量的点积运算满足如下运算规律.

笔记栏

定理 8.3.1　设有向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，λ 为实数，则

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$(交换律);

(2) $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$(分配律);

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$(与数乘的结合律);

(4) $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$(此处我们将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 简记为 $\boldsymbol{a}^2$).

设非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,θ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角,如图 8.3.1 所示,利用余弦定理,则有

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$$

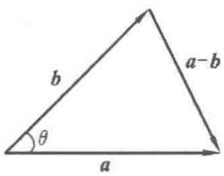

图 8.3.1

且

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|^2&=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})-\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}\\&=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\end{aligned}$$

比较上述两式,即得

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta \tag{8.3.1}$$

因此,向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模、向量 $\boldsymbol{b}$ 的模与向量间夹角的余弦三者的乘积.

因为 $P_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,从而,点积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 又可以表示为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|P_b\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|P_a\boldsymbol{b} \tag{8.3.2}$$

定理 8.3.2 两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充分必要条件是向量的点积等于零,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

证 若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 垂直,即夹角 $\theta=\frac{\pi}{2}$,由式(8.3.1)知,则有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$;反过来,若非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,由式(8.3.1),则有 $\cos\theta=0$,从而 $\theta=\frac{\pi}{2}$,即向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直.另外,当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 至少有一个为零向量时,上述结论显然成立.

例 8.3.1 求向量 $\boldsymbol{a}=(2,3,0)$和 $\boldsymbol{b}=(-1,2,1)$之间的夹角.

解 根据式(8.3.1),有

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\frac{-2+6}{\sqrt{13}\sqrt{6}}=\frac{2\sqrt{78}}{39}$$

从而夹角

$$\theta=\arccos\frac{2\sqrt{78}}{39}$$

8.3.2 向量的矢量积

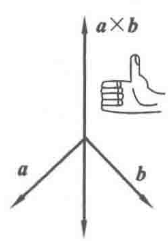

图 8.3.2

在空间直角坐标系下,设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 是两个非零向量,θ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角,定义向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的矢量积是这样一个向量(记为 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$),该向量的大小为 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$,其方向垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 符合右手法则,如图 8.3.2 所示.当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是零向量

时，规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$. 矢量积有时又称为向量积(外积或叉积). 根据向量的矢量积定义，易证如下运算法则.

定理 8.3.3　设有向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 和 $\boldsymbol{c}$，λ 为实数，则

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$(反交换律)；

(2) $(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$(与数乘的结合律)；

(3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$(分配律).

定理 8.3.4　两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$.

证　当 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 时，向量之间的夹角 $\theta=0$(或 π)，从而 $\sin\theta=0$，故有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$；反之，当 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0$，且 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 均为非零向量时，则有 $\sin\theta=0$，即 $\theta=0$(或 π)，从而 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；而当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有零向量时，自然可以认为它们是平行的，证毕.

当 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 不平行时，由 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 矢量积的定义知，其模 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$ 的几何意义为以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积，如图 8.3.3 所示.

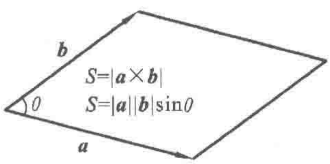

图 8.3.3

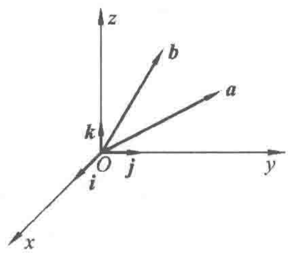

图 8.3.4

下面我们利用向量的坐标表示及矢量积定义，导出矢量积的坐标表达式.

在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，向量 $\boldsymbol{i}=(1,0,0),\boldsymbol{j}=(0,1,0),\boldsymbol{k}=(0,0,1)$ 是相互垂直的单位向量，如图 8.3.4 所示，且 $\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}$.

设有向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$ 与向量 $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，且

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$$

根据矢量积的运算法则，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k})\times(b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k})\\&=a_1b_1(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i})+a_1b_2(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+a_1b_3(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_2b_1(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+a_2b_2(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j})+a_2b_3(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})\\&\quad+a_3b_1(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+a_3b_2(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+a_3b_3(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$$

为了便于记忆，我们也可以借用二阶行列式的符号来表示

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\tag{8.3.3}$$

其中二阶行列式