

· 全国专业硕士联考官方指南系列丛书 ·



2018

MBA
MPA
MPAcc

管理类联考

罗瑞



数学复习指南

◎ 主编



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

2018

MPA PA PAcc

管 理 类 联 考

数学复习指南

罗瑞◎主编



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

本书是根据最新管理类研究生入学考试数学考试大纲的要求编写的。

全书分为十二个章节,每个章节分为四个部分:知识梳理、知识点详解、测试题、经典解析。第一部分主要是将归纳的类型涉及的基础知识、基本概念进行阐述;第二部分介绍各种题型考试难点以及常考的方式;第三部分通过测试题系统全面地巩固前面所学的知识点;第四部分分析题目考查类型及解题技巧。

管理类联考综合能力的考查,对于数学而言,运算的效率尤为重要,因此本书除了将题目类型总结以外,对于多数题型都给出快速解题技巧,旨在删繁就简快速准确得出答案,为整门学科打下良好基础。

图书在版编目(CIP)数据

数学复习指南/罗瑞主编. —西安:西安交通大学出版社, 2016. 6
ISBN 978-7-5605-8699-1

I. ①数… II. ①罗… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料
IV. ①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 154483 号

书 名 数学复习指南
主 编 罗瑞
责任编辑 张阳 贺彦峰

出版发行 西安交通大学出版社
西安市兴庆南路 10 号(邮政编码 710049)
网 址 <http://www.xjtupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315(总编办)
印 刷 三河市越阳印务有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 14.75
字 数 300 千字
版次印次 2016 年 9 月第 1 版 2016 年 9 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-8699-1/O·544
定 价 36.00 元

请读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

版权所有 侵权必究



前言

编者在多年教学实践中发现,很多考生在复习过程中会有题目做了不少但是依然不知所措的感觉,以及平时做题得心应手但一到考试却不尽人意的情况,这正是很多考生在复习过程中陷入做题再做题的怪圈却忽略了一种学习数学必备的能力——总结的能力。因此,编者按照最新管理类研究生入学考试数学考试大纲的要求编写了这本《数学复习指南》。

全书分为十二个章节,每个章节分为四个部分:知识梳理、知识点详解、测试题、经典解析。第一部分主要是将归纳的类型涉及的基础知识、基本概念进行阐述;第二部分介绍类型介绍此种题型考试难点以及常考的方式;第三部分通过测试题系统地全面地巩固前面所学知识点;第四部分分析题目考查类型及解题技巧。

本书严格按照考试大纲要求,强调对基本知识、基本概念的理解,同时,编者将一些生涩的数学符号转化成通俗易懂的语言,对学生从基础到强化的训练大有裨益。管理类联考综合能力的考查,对于数学而言,运算的效率尤为重要,因此本书除了将题目类型总结以外,对于多数题型都给出快速解题技巧,旨在删繁就简快速准确得出答案,为整门学科打下良好基础。无论考生处于哪个复习阶段,本书都将成为考生应试路上的一盏明灯,为考生指明考试方向。

本书在编写过程中得到了诸多朋友指正,在此一并感谢。

由于编者水平有限,疏漏之处在所难免,恳请读者批评指正。

编者



目录

第一章 数(上)	(1)
一、知识梳理	(1)
1. 数的整除	(1)
2. 约数、倍数	(1)
3. 质数、合数	(2)
4. 奇数和偶数	(2)
二、知识点详解	(3)
1. 数的整除	(3)
2. 最大公约数、最小公倍数	(4)
3. 质数合数问题	(5)
4. 奇数、偶数	(6)
三、测试题	(7)
四、经典解析	(9)
第二章 数(下)	(13)
一、知识梳理	(13)
1. 有理数	(13)
2. 无理数	(13)
3. 循环小数化分数	(13)
4. 实数整数与小数部分	(13)
5. 常见无理数	(13)
二、知识点详解	(14)
1. 有理数和无理数的混合运算	(14)
2. 无理数运算	(14)
3. 小数化分数	(15)
4. 求“0”的个数	(15)
三、测试题	(15)
四、经典解析	(17)
第三章 绝对值、比和比例	(19)
一、知识梳理	(19)
1. 绝对值	(19)
2. 比和比例	(20)
3. 均值	(21)
二、知识点详解	(21)
1. 绝对值运算	(21)

2. 定“0”运算	(24)
3. 见比设“k”	(24)
4. 等比定理	(25)
5. 定值问题	(25)
6. 均值不等式	(25)
三、测试题	(26)
四、经典解析	(28)
第四章 应用题	(32)
一、知识梳理	(32)
1. 比值、比例问题	(32)
2. 浓度问题	(32)
3. 工程问题	(32)
4. 行程问题	(33)
5. 十字交叉问题	(34)
6. 文氏图	(34)
7. 不定方程问题	(34)
8. 质因数分解问题	(34)
9. 倍数余数问题	(34)
10. 年龄问题	(34)
11. 最值问题	(35)
二、知识点详解	(35)
1. 利润、比率、增长率问题	(35)
2. 浓度问题	(35)
3. 工程问题	(36)
4. 行程问题	(37)
5. 十字交叉问题	(38)
6. 文氏图	(39)
7. 不定方程问题	(39)
8. 质因数分解问题	(40)
9. 倍数、约数在应用题中的应用	(40)
10. 年龄问题	(41)
11. 最值问题	(41)
三、测试题	(42)
四、经典解析	(48)
第五章 整式、分式	(55)
一、知识梳理	(55)
1. 整式	(55)
2. 分式	(55)
3. 因式分解	(56)

4. 余式定理	(57)
二、知识点详解	(58)
1. 单项式、多项式基本定义	(58)
2. 分式运算	(58)
3. 因式分解	(60)
4. 因式定理、余式定理	(61)
三、测试题	(62)
四、经典解析	(64)
第六章 函数、方程和不等式	(68)
一、知识梳理	(68)
1. 函数的基本性质	(68)
2. 几种重要的函数	(68)
3. 方程	(70)
4. 不等式方程	(71)
二、知识点详解	(73)
1. 函数基本性质	(73)
2. 一次函数、方程及不等式	(74)
3. 一元二次函数图像	(74)
4. 一元二次方程根的分布情况	(74)
5. 一元二次方程中韦达定理的运用	(75)
6. 一元二次方程等价问题与公共根问题	(77)
7. 一元二次不等式的求解	(77)
8. 带根号与绝对值的方程和不等式	(78)
9. 分式方程与不等式	(79)
10. 高次不等式	(79)
11. 指数、对数问题	(80)
12. 三角不等式、均值不等式以及柯西不等式	(81)
三、测试题	(82)
四、经典解析	(86)
第七章 数列	(91)
一、知识梳理	(91)
1. 基本数列	(91)
2. 等差数列	(91)
3. 等比数列	(92)
4. 求前 n 项和 S_n 的方法	(93)
二、知识点详解	(95)
1. 一般数列问题	(95)
2. 等差数列的应用	(96)
3. 等比数列的应用	(98)

4. 求通项公式的其他方法	(99)
5. 数列中的应用题	(102)
三、测试题	(103)
四、经典解析	(106)
第八章 解析几何	(113)
一、知识梳理	(113)
1. 平面直角坐标系	(113)
2. 点	(113)
3. 平面直线	(113)
4. 圆	(114)
5. 解析几何常考的类型	(117)
二、知识点详解	(119)
1. 点	(119)
2. 倾斜角问题	(120)
3. 距离问题	(121)
4. 对称问题	(123)
5. 最值问题	(124)
6. 圆中的代数问题	(125)
7. 解析几何中求面积	(126)
三、测试题	(127)
四、经典解析	(130)
第九章 平面、立体几何	(135)
一、知识梳理	(135)
平面几何	(135)
1. 平行线	(135)
2. 三角形	(135)
3. 四边形	(137)
4. 圆形	(137)
5. 扇形	(137)
6. 平面几何几种重要的模型	(138)
立体几何	(139)
1. 长方体	(139)
2. 圆柱体	(139)
3. 球	(140)
4. 长方体、圆柱、球三者间的关系	(140)
二、知识点详解	(140)
平面几何	(140)
1. 角度、平行线	(140)
2. 三角形性质判定	(141)

3. 平面几何线的长度问题	(141)
4. 三角形、四边形求面积	(142)
5. 五大模型的应用	(145)
6. 圆、扇形中的问题	(147)
立体几何	(150)
1. 长方体、正方体	(150)
2. 圆柱	(150)
3. 球体	(151)
4. 长方体、圆柱、球三者间的关系	(151)
三、测试题	(152)
四、经典解析	(159)
第十章 排列组合	(163)
一、知识梳理	(163)
1. 分步计数原理	(163)
2. 排列与组合的定义及公式	(163)
二、知识点详解	(164)
1. 分步计数	(164)
2. 二项式问题	(164)
3. “捆绑”问题	(165)
4. 插空法	(165)
5. 消序法	(165)
6. 错排法	(166)
7. 隔板法	(166)
8. 分房问题	(167)
9. 打包寄送问题	(167)
10. 染色问题	(168)
11. 环形排列问题	(169)
12. 数字问题	(170)
13. 正难则反问题	(170)
三、测试题	(170)
四、经典解析	(175)
第十一章 概率	(179)
一、知识梳理	(179)
1. 随机试验与随机事件	(179)
2. 事件的关系	(179)
3. 事件的运算	(180)
4. 概率	(180)
二、知识点详解	(181)
1. 随机试验与随机事件	(181)

2. 独立事件与互斥事件的关系	(181)
3. 与排列组合相关的古典概率问题	(181)
4. 与取球问题相关的古典概率问题	(183)
5. 取样问题	(184)
6. 抓阄问题	(184)
7. 伯努利问题	(185)
8. 独立事件	(186)
9. 几何概型	(186)
三、测试题	(187)
四、经典解析	(191)
第十二章 数据描述	(195)
一、知识梳理	(195)
1. 平均数	(195)
2. 方差	(195)
3. 标准差	(195)
4. 平均数、方差运算	(195)
5. 方差与标准差的意义	(195)
6. 频数分布直方图	(195)
7. 饼图	(196)
二、知识点详解	(196)
1. 平均数	(196)
2. 方差、标准差	(196)
3. 直方图	(197)
4. 饼图	(197)
5. 数表	(198)
三、测试题	(198)
四、经典解析	(200)
第一套测试卷	(202)
第二套测试卷	(205)
第三套测试卷	(208)
第四套测试卷	(211)
第五套测试卷	(214)
第六套测试卷	(217)
第七套测试卷	(220)
第八套测试卷	(223)
测试卷答案	(226)

第一章 数(上)

一、知识梳理

1. 数的整除

要点精讲:

(1) 数的整除: 如果存在一个自然数 a , 除以另一自然数 b , 余数为 0, 我们就称 a 能被 b 整除, 记做 $b|a$.

推广: 1. 如果 $c|b, b|a$, 则 $c|a$;

2. 如果 $c|b, c|a$, 则存在整数 m, n , 使得 $c|(ma + nb)$.

(2) 常见数的整除

被 2 整除的数: 所有偶数.

被 3、9 整除: 整数各个位数之和是 3、9 的倍数.

被 4 整除: 整数末两位是 4 的倍数.

被 5 整除: 整数最后一位是 0 或 5.

被 6 整除: 同时能被 2 和 3 整除的数.

被 7 整除: 方法 1 将整数个位数字去掉, 剩下的数字减去个位数字的 2 倍, 是 7 的倍数;

方法 2 整数后三位减去后三位之前的数是 7 的倍数.

被 8 整除: 后三位能被 8 整除.

被 11 整除: 奇数位数字和与偶数位数字和之差是 11 的倍数.

被 12 整除: 同时是 3 和 4 的倍数.

被 13 整除: 将整数个位数字去掉, 剩下的数加上个位数字的 4 倍是 13 的倍数.

被 17 整除: 将整数个位数字去掉, 剩下的数减去个位数字的 5 倍是 17 的倍数.

(3) 带余除法:

存在整数 a, b 使得 $b = a \cdot c + r$, c 为商, r 为余数, 则有 $a|(b-r)$, $0 \leq r < a$, 若 $r = 0$, 我们称 a 为 b 的因数.

2. 约数、倍数

(1) 定义: 如果整数 a 除以整数 b ($b \neq 0$) 除得的商正好是整数而没有余数, 我们就说 a 能被 b 整除或 b 能整除 a , a 称为 b 的倍数, b 称为 a 的约数.

(2) 几个整数公有的约数, 叫作这几个数的公约数, 其中最大的一个, 叫作这几个数的最大公约数; 几个自然数公有的倍数, 叫作这几个数的公倍数, 其中最小的一个自然数, 叫作这几个数的最小公倍数. a, b 的最大公约数记为 (a, b) , 最小公倍数记为 $[a, b]$, 并且满足关系式 $ab = (a, b)[a, b]$.

【例如】 已知 $a = 6, (a, b) = 3, [a, b] = 30$, 求 b .

【解析】 根据关系式 $ab = (a, b)[a, b]$, 可解出 $b = 15$.

(3) 如果两个数 a, b 最大公约数为 1, 则称 a, b 互质.

(4) 求最大公约数和最小公倍数的方法.



① 质因数分解法

$$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2, 48 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^4 \times 3$$

则 $(36, 48) = 2^2 \times 3 = 12$ (取低次幂), $[36, 48] = 2^4 \times 3^2 = 144$ (取高次幂).

质因数分解法好处在于我们能通过将数化成幂的乘积形式来判断其因数的个数.

$A = x_1^{M_1} \cdot x_2^{M_2} \cdots x_n^{M_n}$, 则 A 的因数个数为 $N = (M_1 + 1)(M_2 + 1) \cdots (M_n + 1)$.

② 短除法

③ 辗转相除法

设两数为 $a, b (a > b)$, 求 a 和 b 最大公约数 (a, b) 的步骤如下: 用 a 除以 b , 得 $a \div b = q \cdots r_1 (0 \leq r_1)$. 若 $r_1 = 0$, 则 $(a, b) = b$; 若 $r_1 \neq 0$, 则再用 b 除以 r_1 , 得 $b \div r_1 = q \cdots r_2 (0 \leq r_2)$. 若 $r_2 = 0$, 则 $(a, b) = r_1$; 若 $r_2 \neq 0$, 则继续用 r_1 除以 r_2 , $\cdots$ 如此下去, 直到能整除为止. 其最后一个除数即为 (a, b) .

辗转相除法适用于较大的数之间求最大公约数

3. 质数、合数

(1) 定义: 一个大于 1 的自然数, 除了 1 和它本身外, 不能被其他自然数整除. 换句话说就是该数除了 1 和它本身以外不再其他的约数. 这样的数我们称之为质数 (或素数). 而如果一个数除了 1 和它本身以外还存在其他的约数, 这样的数我们称之为合数.

(2) 1 不是质数也不是合数, 最小的质数是 2, 最小的合数是 4.

(3) 质数常考类型:

① “2” 这个特殊的质数. 我们发现, 在所有的质数中, 只有 2 这个数是偶数, 其余的均为奇数, 因此但凡考到这个知识点, 往往需要我们做奇偶性分析.

【例如】 p, q 均为质数, $5p + 4q = 22$, 则以 p, q 为直角边的斜边 c 长为多少?

【解析】 因为 22 为偶数, $4q$ 亦为偶数, 所以, $5p$ 为偶数, p 为偶数, 而 p 又为质数, 因此, $p = 2, q = 3$, 根据勾股定理可知 $c = \sqrt{13}$.

② “3” 这个质数. 如果 3 加上一个数 a 为质数, 则 3 加上 $2a$ 也是质数.

【例如】 A, B, C 均为质数, 且 $A - B = B - C = 4$, 求 $A + B + C$.

【解析】 我们观察等式发现 $C + 4 = B, B + 4 = A$, 即 $C + 2 \times 4 = A$, 因为 A, B, C 都是质数, 所以 $C = 3, B = 7, A = 11$, 则 $A + B + C = 21$.

③ 考查质数表.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31...

④ 考查质数的定义: 如果 A 为质数, 则 $A = 1 \times A$. 这类题型往往需要我们做因式分解.

【例如】 $k^2 + 22k$ 是一个质数, 问此质数为?

【解析】 $k^2 + 22k = k(k + 22)$, 因为质数只能化成 1 和本身乘积的形式, 因此 $k = 1$, 这个质数为 23.

4. 奇数和偶数

(1) 定义: 能被 2 整除的数即为偶数, 反之为奇数.

(2) 运算法则:

奇数 + 奇数 = 偶数

奇数 + 偶数 = 奇数

偶数 + 偶数 = 偶数

奇数 $\times$ 奇数 = 奇数

奇数 $\times$ 偶数 = 偶数

偶数 $\times$ 偶数 = 偶数

(3) 应用技巧

运算过程中,常常需要用到奇偶性分析(见详解).

二、知识点详解

1. 数的整除

【例 1】 设 $72 \mid \overline{a679b}$, 则 a, b 的值分别为

- A. 3, 2 B. 2, 3 C. 3, 4 D. 4, 3 E. 1, 3

【解析】 根据整除的性质, $8 \mid 72, 9 \mid 72, 72 \mid \overline{a679b}$,

所以 $8 \mid \overline{a679b}$ 且 $9 \mid \overline{a679b}$.

对于 $8 \mid \overline{a679b}$, 末三位为 8 的倍数即可, 则 $b = 2$.

对于 $9 \mid \overline{a679b}$, 所有位数相加之和为 9 的倍数即可, 则 $a = 3$. 选 A.

【例 2】 $\frac{3a}{14}$ 是整数.

(1) 若 a 为整数, $\frac{6a}{7}$ 是一个整数;

(2) 若 a 为整数, $\frac{5a}{28}$ 是一个整数.

【解析】 a 为整数且 $\frac{6a}{7}$ 也为一个整数, 即 $a = 7n$, 不能推出 $\frac{3a}{14}$ 为整数, 反例: 当 $a = 7$ 时, 明显推不出结论, 所以条件(1) 不充分;

a 为整数且 $\frac{5a}{28}$ 也为一个整数, 即 $a = 28n$, 因为 14 为 28 的约数, 无论 n 取何值, 都可以推出 $\frac{3a}{14}$ 是一个整数. 条件(2) 充分, 故选 B.

【例 3】 若 x 和 y 是整数, 则 $xy + 1$ 能被 3 整除.

(1) 当 x 被 3 除时, 其余数为 1;

(2) 当 y 被 9 除时, 其余数为 8.

【解析】 显然(1)(2) 两个条件都只含有一个未知数, 不可能单独求出, 故联合得根据(1) 得 $x = 3k_1 + 1$ (k_1 为整数), 根据(2) 得 $y = 9k_2 + 8$ (k_2 为整数).

$xy + 1 = (3k_1 + 1)(9k_2 + 8) + 1 = 27k_1k_2 + 24k_1 + 9k_2 + 9$. 显然每一项均为 3 的倍数, 因此联合成立. 选 C.

【例 4】 一个六位数, 如果它的前三位数码与后三位数码完全相同, 顺序也相同, 由此六位数可以被() 整除.

- A. 1110 B. 1 000 C. 1 001 D. 1 111 E. 1 101

【解析】 根据题意, 我们故且令这六位数为 $abcabc$. 根据观察发现, 这个六位数有一个约数 abc , 则 $\frac{abcabc}{abc} = 1 001$, 所以这个六位数有约数 1 001. 选 C.

【例 5】 三个连续正整数的立方和是() 的倍数.

- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

【解析】 三个连续整数的立方和可以表示为: $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$.

根据立方和公式展开后合并同类项为: $3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$.

① 当 $n = 3k$ 时, 显然其为 9 的倍数;

② 当 $n = 3k \pm 1$ 时, 原式 $= 3(3k \pm 1)[(3k \pm 1)^2 + 2] = 3(3k \pm 1)(9k^2 \pm 6k + 3)$,



显然其也是 9 的倍数. 综上所述. 选 E.

提示 当我们讨论是否是 3 的倍数时可将正整数化成 $n = 3k$ 或者 $n = 3k \pm 1$ 的形式.

2. 最大公约数、最小公倍数

【例 6】 a, b 的最大公约数是 203.

(1) $a = 5\,887$;

(2) $b = 3\,857$.

【解析】 根据辗转相除法可知.

【例 7】 n 的最大值为 10.

(1) m 是合数, $m \leq 1\,025$, m 可以写成 n 个质因数相乘.

(2) m 是合数, $m \leq 2\,049$, m 可以写成 n 个质因数相乘.

【解析】 对于合数 m 可以写成 n 个质因数相乘的形式, 如果希望使得 n 取最大值, 那么其质因数应当最小. 最小的质因数为 2. 而 $2^{10} = 1\,024$, $2^{11} = 2\,048$, 所以 (1) 充分, (2) 不充分.

【例 8】 一个自然数除以 4 余 3, 除以 5 余 4, 除以 6 余 5. 这个自然数最小值为 m , 则 m 的各位数字之和为 ()

A. 8

B. 9

C. 10

D. 14

E. 15

【解析】 提示: 这种题型我们可以先将每个条件写出, 观察其共同点.

根据题意有: $n = 4k_1 + 3$, $n = 5k_2 + 4$, $n = 6k_3 + 5$.

我们发现, 如果将 n 加上 1 之后就可以同时被 4, 5, 6 整除. 所以 $n+1$ 也一定是 4, 5, 6 最小公倍数的倍数,

有: $n+1 = 60k$, k 为整数, 所以 $n+1$ 最小为 60, $n = 59$, 所以各个位数相加之和为 14. 选 D.

【例 9】 已知不全相等的正整数 a, b, c 都是两位数, 且它们的最小公倍数是 385, 则 $a+b+c$ 的最大值是 ()

A. 57

B. 81

C. 101

D. 143

E. 209

【解析】 a, b, c 的最小公倍数为 385, 我们将 385 进行质因数分解. $385 = 5 \times 7 \times 11$, 而 a, b, c 都是两位数且要求 $a+b+c$ 最大, 则有 $a = 55, b = 77, c = 77, a+b+c = 209$. 选 E.

【例 10】 在分数 $\frac{1}{324}, \frac{2}{324}, \frac{3}{324}, \dots, \frac{n}{324}$ 中最简分数有 21 个, 则满足条件的 n 可以为 ()

A. 57

B. 58

C. 59

D. 60

E. 61

【解析】 在 324 的约数中既有 2 又有 3, 所以如果想使分数最简, 则分子中不能出现 2 或 3 的倍数, 又题目中最简分数为 21, 有:

$$n - 21 = \left[\frac{n}{2} \right] + \left[\frac{n}{3} \right] - \left[\frac{n}{6} \right], \text{ 所以 } n = 61, 62, 63. \text{ 根据选项. 选 E.}$$

知识点 从 1 到 n 有 N 个数是 a 或 b 的倍数, $N = \left[\frac{n}{a} \right] + \left[\frac{n}{b} \right] - \left[\frac{n}{[a, b]} \right]$.



3. 质数合数问题

【例 11】 已知 p, q 都是质数, 且 $3p + 7q = 41$, 则 $p + 1, q - 1, pq + 1$ 的算术平均值为 ()

- A. 32 B. 24 C. 18 D. 14 E. 6

【解析】 等式右边 41 为奇数, 那么等式左边必然一奇一偶, 而 p, q 的系数都是奇数, 所以 p, q 中必然有一个偶数, 又 p, q 为质数, 所以必有一个数为 2.

当 $p = 2, q = 5$ 成立;

当 $q = 2, q = 9$ 不成立.

那么 $p + 1, q - 1, pq + 1$ 分别为 3, 4, 11, 算术平均值为 6. 选 E.

【例 12】 三个质数之积恰好等于它们和的 5 倍, 则这 3 个质数之和为 ()

- A. 11 B. 12 C. 13 D. 14 E. 15

【解析】 方法一: 我们另三个质数分别是 $a, b, c, abc = 5(a + b + c)$, 那么显然, a, b, c 中有一个数是 5, 故且令 $a = 5$, 那么 $bc = b + c + 5$, 移项因式分解有: $(b - 1)(c - 1) = 6$.

$$\text{得 } \begin{cases} b - 1 = 1 \\ c - 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ c = 7 \end{cases} \text{ 或者 } \begin{cases} b - 1 = 2 \\ c - 1 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3 \\ c = 4 \end{cases} \text{ (舍去).}$$

那么这三个数是 $a = 5, b = 2, c = 7$, 和为 14. 选 D.

方法二: 因为题目涉及的数较小, 当我们知道其中一个数是 5 的时候, 完全可以用试数法得出剩下的两个数是 2 和 7.

提示 作为基础阶段复习, 考生可以通过方法一训练自己数的分析能力.

【例 13】 a 是不大于 10 的偶数, N 是质数, 满足 $N = a^4 - 3a^2 + 9$, 则 $N =$ ()

- A. 3 B. 5 C. 7 D. 11 E. 13

【解析】 方法一: $N = (a^2 + 3a + 3)(a^2 - 3a + 3)$. 因为 N 是质数, 根据质数的性质, 质数等于 1 和本身的乘积, 所以令 $a^2 - 3a + 3 = 1, a = 1$ 或 2, 又 a 是偶数, 所以 $a = 2$, 带入 N 的表达式可得 $N = 13$. 选 E.

方法二: N 是不大于 10 的偶数, 那么 $N = 0, 2, 4, 6, 8, 10$, 带入 N 的表达式即可.

【例 14】 一对正常年龄结婚的夫妻, 结婚 5 年之后生了一个女儿, 又过了若干年, 女儿的年龄加上母亲的年龄正好等于父亲的年龄, 并且三人的年龄数都是质数. 那么现在父亲的年龄是 () 岁?

- A. 23 B. 31 C. 27 D. 29 E. 37

【解析】 现在女儿年龄加上母亲年龄等于父亲的年龄, 三人年龄都是质数. 我们知道, 质数中除了 2 其余的全部是奇数, 奇数 = 奇数 + 偶数, 所以女儿现在的年龄是 2 岁. 回忆质数表, 在 30 左右相差 2 的两个质数是 29, 31, 所以父亲的年龄是 31. 选 B.

提醒 本题题干说的是正常结婚年龄, 不要瞎想.

【例 15】 如果 A, B, C 是三个质数, 而且 $A - B = B - C = 40$, 那么 $A + 2B + 3C =$ ()

- A. 33 B. 43 C. 53 D. 158 E. 178

【解析】 根据质数常考类型 ②, 有 $C = 3, B = 43, A = 83$, 所以 $A + 2B + 3C = 178$. 选 E.



4. 奇数、偶数

【例 16】若 a, b 是正整数, 且 $m = ab(a+b)$, 则 ()

- A. m 一定是奇数
- B. m 一定是偶数
- C. 只有当 a, b 都是偶数时, m 是偶数
- D. 只有当 a, b 一奇一偶时, m 是偶数
- E. 只有当 a, b 都是奇数时, m 是偶数

【解析】 a 为奇数 b 为偶数或者 a 为偶数 b 为奇数时, ab 为偶数, m 为偶数; a, b 同奇同偶时, $a+b$ 为偶数, m 还是偶数. 选 B.

【例 17】 m 为偶数.

(1) 设 n 为整数, $m = n(n+1)$;

(2) 在 $1, 2, 3, \dots, 90$ 个自然数中的相邻两个数之间任意添加一个加号或减号. 设这样组成的运算式的结果是 m .

【解析】条件(1), m 是连续两个整数相乘, 结果必为偶数, 所以(1)充分.

条件(2), 由于自然数之间相加或相减结果奇偶性一样. 那么我们发现实际上 $1 \sim 90$ 之间的运算是 45 个奇数相加减和 45 个偶数相加减的结合. 前者结果还是奇数, 后者结果还是偶数, 相加结果必然是奇数. (2) 不充分. 本题选 A.

【例 18】 $n^2 - 1$ 是 8 的倍数.

(1) n 是偶数;

(2) n 是奇数.

【解析】条件(1), n 是偶数, $n^2 - 1$ 显然为奇数, 显然不充分;

条件(2), n 是奇数, 令 $n = 2k+1$, 那么 $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1)$, 显然是 8 的倍数. 条件(2)充分. 选 B.

【例 19】70 个数排成一行, 除了两头的两个数以外, 每个数的 3 倍都恰好等于它两边两个数的和, 这一行最左边的几个数是这样的: $0, 1, 3, 8, 21, \dots$. 问最右边的一个数被 6 除余数为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

【解析】前面的数依次是 $0, 1, 3, 8, 21, 55, 144, 377, \dots$

被 2 除的余数依次是 $0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, \dots$, 3 个一循环, 且 $70 = 3 \times 23 + 1$;

被 3 除的余数依次是 $0, 1, 0, 2, 0, 1, 0, 2, \dots$, 4 个一循环, 且 $70 = 4 \times 17 + 2$.

所以, 第 70 个数为偶数, 且被 3 除余 1, 即 $2k = 3m + 1 (k, m \in \mathbb{Z})$.

当 $m = 2p$ 时, $2k = 6p + 1$ 不成立;

当 $m = 2p + 1$ 时, $2k = 6p + 4 (k, m \in \mathbb{Z})$, 所以, 第 70 个数被 6 除余 4. 选 D.

【例 20】已知 n 是偶数, m 是奇数, 方程组 $\begin{cases} x - 1988y = n \\ 11x + 27y = m \end{cases}$ 的解 $\begin{cases} x = p \\ y = q \end{cases}$ 是整数, 那么 ()

- A. p, q 都是偶数
- B. p, q 都是奇数
- C. p 是偶数, q 是奇数
- D. p 是奇数, q 是偶数
- E. 无法判断

【解析】因为 n 是偶数, $x = 1988y + n$ 为偶数, 即 p 是偶数, 则 $11x = m - 27y$ 是偶数,

又 m 是奇数, 所以 $27y$ 是奇数, 故 y 是奇数, 所以选 C.

三、测试题

条件充分性判断选项:

- A. 条件(1) 充分, 但条件(2) 不充分
- B. 条件(2) 充分, 但条件(1) 不充分
- C. 条件(1) 和条件(2) 单独都不充分, 但条件(1) 和条件(2) 联合起来充分
- D. 条件(1) 充分, 条件(2) 也充分
- E. 条件(1) 和条件(2) 单独都不充分, 条件(1) 和条件(2) 联合起来也不充分

1. 每一个合数都可以写成 k 个质数的乘积, 在小于 100 的合数中, k 的最大值为 ()
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6
2. 已知 p, q 均为质数, 且满足 $5p^2 + 3q = 59$, 则以 $p+3, 1-p+q, 2p+q-4$ 为边长的三角形是 ()
A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 全等三角形
D. 钝角三角形 E. 等腰三角形
3. 一个两位数 $\overline{xy}$ 与一个三位数 $\overline{xyz}$ 满足 $\overline{xy} \cdot \overline{xyz} = 7\,850$, 则 x, y, z 分别为 ()
A. 2, 1, 2 B. 3, 1, 2 C. 2, 1, 4 D. 4, 1, 2 E. 5, 2, 1
4. 三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足 6 岁), 他们的年龄都是质数(素数), 且依次相差为 6 岁, 他们的年龄之和为 ()
A. 21 B. 27 C. 33 D. 39 E. 51
5. 已知乘法式 $\overline{A} \times \overline{BC} \times \overline{CB} = 2\,015, \overline{A} + \overline{BC} + \overline{CB} = k$. 其中每个字母代表 0 到 9 之间的数码, 则 k ()
A. 是 5 的倍数 B. 有 4 个约数 C. 是一个质数
D. 是一个完全平方数 E. 是一个偶数
6. 设 a, b, c 是小于 12 的 3 个不同的质数, 且 $|a-b| + |b-c| + |c-a| = 4$, 则 $a+b+c$ = ()
A. 10 B. 12 C. 15 D. 17 E. 19
7. 已知 $\overline{7x} \times \overline{yz6} = 41\,808$, 其中 x, y, z 代表非零的数字, 那么 $x^2 + y^2 + z^2 =$ ()
A. 9 B. 25 C. 64 D. 36 E. 98
8. 有一堆棋子, 总数小于 100, 2 个一组分堆多 1 个, 3 个一组分堆多 1 个, 4 个一组分堆也多 1 个, 5 个一组分堆也多 1 个, 问 7 个一组分堆多 () 个?
A. 1 B. 2 C. 4 D. 5 E. 6
9. 已知 $x = 2\,015, A = \sqrt{x^2 + x^2(x+1)^2 + (x+1)^2}$, 则 A 是 ()
A. 偶数 B. 奇数 C. 3 的倍数
D. 5 的倍数 E. 无理数
10. 4 个不同的正整数 a, b, c, d , 满足 $(7-a)(7-b)(7-c)(7-d) = 4$, 那么 $a+b+c+d$ = ()
A. 20 B. 28 C. 18 D. 24 E. 44
11. 有 a 个人聚在一起, 他们的生日都是 8 月 8 日, 且都属虎. 某年他们的年龄之积为 207 025, 他们的年龄之和为 102, 则 $a =$ ()
A. 3 B. 4 C. 5 D. 6 E. 7