WILEY

经典译丛

电磁场理论与应用

# 高等电磁场理论

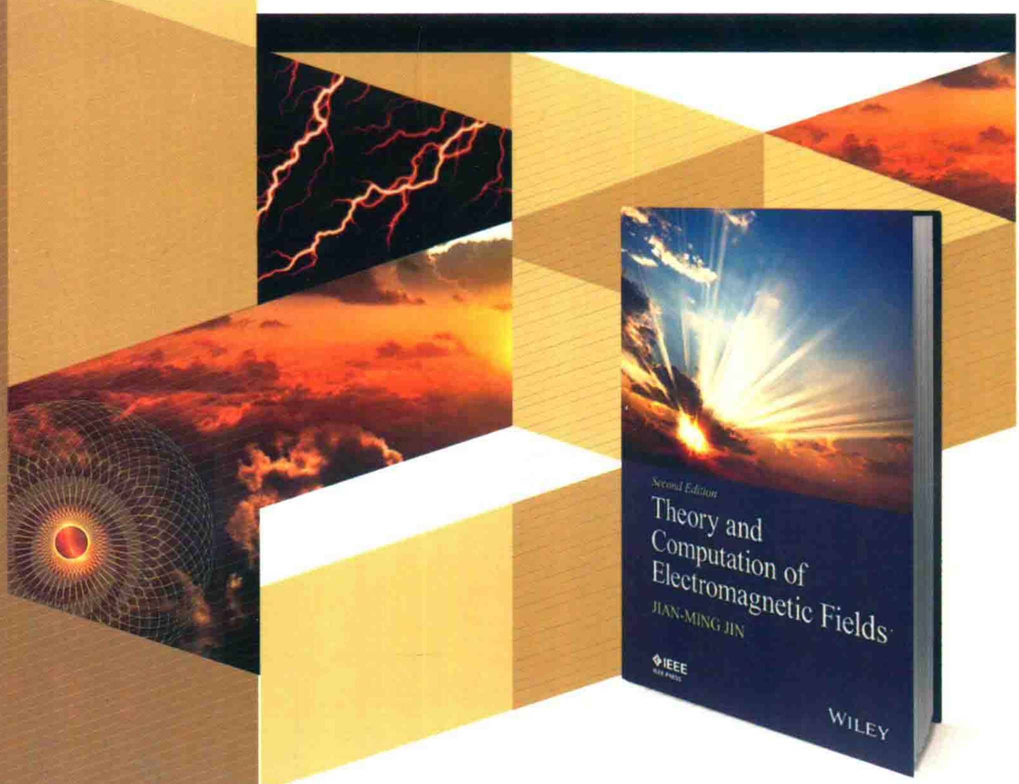
## （第二版）

Theory and Computation
of Electromagnetic Fields, Second Edition

Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition

【美】 Jian-Ming Jin（金建铭） 著

尹家贤 译




中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

经典译丛·电磁场理论与应用

# 高等电磁场理论

## (第二版)

# Theory and Computation of Electromagnetic Fields

## Second Edition



[美] Jian-Ming Jin(金建铭) 著
尹家贤 译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

## 内 容 简 介

*Theory and Computation of Electromagnetic Fields*, *Second Edition* 原著内容包含两个部分，中译本出版时分成两本书，分别对应原著的第一部分和第二部分。其中，本书为电磁场理论，适合作为刚入学研究生“电磁场理论”课程的教材；原著第二部分为电磁场的计算，适合作为高年级研究生“计算电磁学”课程的教材。通常的研究生电磁场课程的教材基本理论部分较为简练，内容较深，但由于过去20年间本科生的课程体系有了较大改变，研究生的电磁场课程要求与新入学研究生在本科获得的电磁场基础之间有较大差距，因此本书比较注重基础理论部分，并且在内容选取上比较注重工程应用，同时和电磁场的前沿研究有比较密切的结合。本书内容包含了基础理论（如：矢量分析、麦克斯韦方程组、边界条件和传输线理论）和高级问题（如：波变换、叠加原理和分层介质球散射）。

本书的逻辑严密，概念清晰，内容选取合理，难易程度适中，适合作为研究生“电磁场理论”课程教材，同时也可以作为从事需要电磁理论方面知识的工程技术人员的参考书。



版权贸易合同登记号　图字：01-2014-4718

**图书在版编目(CIP)数据**

高等电磁场理论：第二版/(美)金建铭(Jian-Ming Jin)著；尹家贤译. —北京：电子工业出版社，2017.4
(经典译丛 · 电磁场理论与应用)
书名原文：Theory and Computation of Electromagnetic Fields, Second Edition

ISBN 978-7-121-30594-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①金…　②尹…　Ⅲ. ①电磁场－研究生－教材　Ⅳ. ①O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第297850号

策划编辑：马　岚
责任编辑：马　岚
印　　刷：涿州市京南印刷厂
装　　订：涿州市京南印刷厂
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路173信箱　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：18.25　字数：467千字
版　　次：2017年4月第1版(原著第2版)
印　　次：2017年4月第1次印刷
定　　价：59.00元

所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：classic-series-info@phei.com.cn。

# 译　者　序

电磁场理论课程是国内外各大学的学生普遍感到畏惧的课程。本科学生如此，到了研究生阶段，仍然如此。其原因如下：电磁场理论公式多、推导复杂、内容抽象。有了基本的电磁场理论基础以后，在研究生阶段如何使电磁场理论知识系统化，使其运用麦克斯韦方程分析电磁问题的水平进一步提高，这是研究生电磁场理论课程需要解决的问题。

要在研究生阶段学好电磁场理论课程，首先要有一本好的教材。计算电磁学的发展使得电磁理论与计算数学产生了越来越紧密的关系，以至于有必要将这部分内容纳入电磁理论教材中，让研究生阶段的学生比较系统地掌握这部分知识，目前国内还没有这样的中文教材，值得推介的3种著名的研究生电磁场理论课程的教材分别是：

1. 哈林顿(R. F. Harrington)的 *Time-Harmonic Electromagnetic Fields*；
2. 孔金瓯(J. A. Kong)的 *Electromagnetic Wave Theory*；
3. 巴拉尼斯(C. A. Balanis)的 *Advanced Engineering Electromagnetics*, *Second Edition*。

但是，这些教材各有不适合作为教材的特点。或因所撰写年代太早，比如第1种于1961年出版；或因过于偏重理论，比如第2种；或因涵盖的内容太多，比如第3种，全书超过1000页。在计算电磁学高度发展的当今，很多需要非常复杂的公式才能解决的电磁问题，都可以交给计算机完成。因此，研究生电磁场理论课程的内容需要非常精心地选择，主要考虑3方面的问题：

1. 由于本科阶段基础电磁场理论课程学时数的减少，因此教材中要有相当的篇幅加强基础内容；
2. 教材内容中要体现电磁场领域中的新理论、新技术、新成果；
3. 教材内容要体现完整的电磁场理论结构体系，但理论不宜太深奥，篇幅不宜太长，其主要内容适合安排一个学期的课程。

美国伊利诺伊大学香槟校区 Jian-Ming Jin(金建铭)教授所著的 *Theory and Computation of Electromagnetic Fields*, *Second Edition* 满足了研究生阶段电磁场理论课程对教材的所有要求。本书有下面几个特点：

1. 为不同层次的研究生学习和了解更高等的问题提供了必须的基础知识；
2. 分析了电磁辐射、传播、透射及反射现象；
3. 阐述了重要的电磁定理和原理；
4. 对笛卡儿坐标、柱坐标、球坐标中的波的传播、散射、辐射问题的电磁分析进行了讨论；
5. 涵盖了频域和时域中基本及高级电磁计算方法及其工程应用；
6. 为检验和巩固学生对课程内容的理解，每一章都包含了一定数量的习题。为便于读者学会如何使用这些知识分析和解决相关的电磁问题，很多章节都附有例题。

考虑到国内各大学研究生课程的安排情况，我们将英文原著分成两部分出版。《高等电磁场理论(第二版)》，即本书，其内容对应原著第一部分(即前7章)及附录，适合作为研究

生的“电磁场理论”课程的教材。《计算电磁学(第二版)》，其内容对应原著第二部分，可作为研究生的“计算电磁学”课程的教材。

本书由国防科技大学电子科学与工程学院尹家贤翻译。金建铭教授对全部译稿进行了认真的修改和审阅，在此表示感谢。电子工业出版社的马岚编辑在本书的出版过程中付出了辛勤的劳动，也在此表示感谢。

虽然笔者非常认真地进行了本书的翻译，但由于水平有限，书中译词不当、疏误之处难免，恳请读者批评指正。

# 前　　言[①]

正如书名所示，本书包括两部分内容。第一部分为电磁场理论，其可以作为研究生阶段基础电磁理论课程的教材。第二部分为计算电磁学，其可以作为研究生阶段计算电磁学课程的教材。研究生阶段的基础电磁理论课程已有若干教材可用，但计算电磁学课程却没有合适的教材，本书意在填补这一空缺。本书的两部分内容是一脉相承的，以便学生可以较为容易地从第一阶段课程过渡到第二阶段课程。

虽然本书的第一部分介绍的是经典的基础电磁理论，但其涵盖的内容与现有教材有所不同，这主要是因为本科生的课程体系在过去二十年中有了较大的改变。许多大学减少了必修课的数量，以便学生在自我规划时更为自由。这就导致在美国大多数的电子工程系中，本科生只有一门电磁场的必修课程。因而研究生在入学时对基础电磁理论的掌握情况差异很大。为了应对这一挑战，使不同层次的学生均能从中受益，作者的授课课程内容既涵盖基础理论（如矢量分析、麦克斯韦方程组、边界条件和传输线理论）也包括高等问题（如波变换、叠加原理和分层介质球散射）。

在撰写本书的第一部分时，作者始终遵循下列原则：第一，本书并不是要作为一本包罗万象的电磁理论参考书。其只应包含足够的基础知识，使电子工程专业的研究生在未来研究高级课题时有足够的知识准备。并且所有内容应该能在一学期内讲授完。因此，对该部分涵盖的内容进行了非常仔细的筛选。第二，书的形式应该适合课堂教学和自学，而不是作为参考书使用。举例说明这其中的区别：对于参考书，所有有关格林函数的内容应该独立列为一章以便查阅；而对于课堂教学，循序渐进地介绍新思想和新概念通常更为合适。第三，写作和教学应始终紧扣一个中心——完整的电磁理论是从麦克斯韦方程出发，以数学为工具推导发展而来的。因而在介绍每一个主题时，都应该从麦克斯韦方程，或者基于麦克斯韦方程的定理开始。

本书的第二部分介绍了几种重要的计算电磁学方法，它们在工程应用中得到了广泛使用。这些方法包括有限差分法（特别是时域有限差分法），有限元法和基于积分方程的矩量法，它们是电磁场数值分析中的三种最基本方法。学生在熟练掌握这三种方法后，可以很容易地学习其他数值方法。第二部分还介绍了求解积分方程的快速算法以及结合不同数值方法的混合方法，掌握这些技术，就能更有效地处理复杂电磁问题。随着计算电磁学这一电磁分析和仿真工具得到越来越广泛地应用，基于上述内容的计算电磁学课程也越来越受欢迎。在伊利诺伊大学，这门课程被许多非电磁方向甚至非电子工程专业的学生选修。

下面是本书所涵盖内容的摘要[②]。第 1 章介绍基本电磁理论，包括矢量分析的简要回顾，积分和微分形式的麦克斯韦方程，不同介质分界面和理想导体表面的边界条件，描述媒质中电磁特性的本构关系，电磁能量和功率的概念，以及时谐场的麦克斯韦方程。本章还介绍可以简化矢量分析的符号矢量法。在本章中，将积分形式的麦克斯韦方程作为基本假定，

---

① 为便于读者了解原著的写作思路和整体架构，这里保留了原著前言的全部内容。其中，只有前 7 章和附录是本书的内容，其余译文包括在《计算电磁学（第二版）》一书中，将稍迟于本书，由电子工业出版社出版。——编者注

② 书中部分插图所对应的彩色图片，可通过华信教育资源网（www. hxedu. com. cn）注册下载。——编者注

由此推出微分形式的麦克斯韦方程以及各种边界条件。

第 2 章研究自由空间辐射场。利用本构关系并求解微分形式的麦克斯韦方程，就可以得到辐射场。本章中介绍作为辅助函数的标量位函数和矢量位函数，并讨论使用辅助位函数求解麦克斯韦方程的优势。另外，还介绍将场-源联系起来的格林函数和并矢格林函数。最后，研究辐射场的远场近似，并由此得到索末菲辐射条件。

第 3 章介绍从麦克斯韦方程导出的一些重要定理和原理。首先是唯一性定理，以及以此为基础得到的镜像原理和面等效原理。作为面等效原理的应用，推导了感应定理、物理等效原理以及口径辐射问题的求解。由麦克斯韦方程的对称性得到对偶原理，并将其应用到互补结构中，得到巴比涅原理。

第 4 章的研究对象是均匀平面波。分析它在无界均匀媒质中的传播，以便更好地理解波的传播特性。文中首先回顾基本的传输线理论，介绍与波传播相关的一些基本概念，例如传播常数、衰减常数和各种速度。然后，用分离变量法求得波动方程在笛卡儿坐标系中的解，并由此讨论平面波的一些基本特性，例如波阻抗、极化。接下来，求解几个简单的边值问题，包括面电流的辐射场和平面波在两种不同媒质分界面的反射和透射。本章还讨论平面波在单轴媒质、回旋媒质、手征媒质、超材料中的传播以及入射到左手媒质中的情况。

第 5 章讨论电磁波在均匀和非均匀填充波导和介质波导中的传播，以及谐振腔问题。首先推导一般形式的波导和谐振腔中的电磁场解，并分析其基本特性。然后分析矩形波导和矩形谐振腔。接下来介绍微扰法，并用其计算非理想波导的衰减常数和谐振腔的品质因数，以及谐振腔中因填充材料或形状发生微小改变时谐振频率的变化。此外，还详细分析了部分填充波导和介质板波导中的混合模式。最后，讨论波导和分层媒质中的电流源激励问题，因为这个问题在实际应用中非常重要。

第 6 章讨论柱坐标系中的电磁问题。首先用分离变量法求解柱坐标系中的亥姆霍兹方程，并推导出柱面波函数。然后用柱面波函数分析圆波导、同轴线及圆柱谐振腔。接下来，分析圆柱介质波导中的波传播。此后，推导将平面波展开成柱面波的波变换，并应用波变换求解导体柱和介质柱的散射问题。最后，分析线电流和圆柱面电流在导体柱或导体劈存在时的辐射问题。由得到的结果，推导出了二维场的索末菲辐射条件，并解释导体劈横向场的奇异性。

第 7 章讨论球坐标系中的电磁问题。首先用分离变量法求解球坐标系中的亥姆霍兹方程，并推导出球面波函数。然后用球面波函数分析球谐振腔和双锥天线。接下来，推导将平面波展开成球面波的波变换，并应用波变换求解导体球和介质球的散射问题。此外，还研究点电荷的辐射问题，并由此推导出球面波的加法定理。最后，分析球面电流在导体球或导体锥存在时的辐射问题，以此说明球坐标系中辐射问题的分析方法并解释导体尖端场的奇异性。

从第 8 章开始，讨论计算电磁学的内容。第 8 章通过推导基本的有限差分公式并将其应用于波动方程和扩散方程中，展示有限差分法的基本原理。紧接着，讨论有限差分法中的两个重要问题：稳定性分析和色散分析。之后，介绍二维和三维情况下用于求解麦克斯韦方程的时域有限差分法。最后，讨论如何用吸收边界条件（ABC）和理想匹配层（PML）来截断开放区域中的电磁问题，在时域如何分析色散媒质，如何在计算空间产生入射波，以及如何基于近场信息计算远场。

第 9 章主要讨论有限元法。首先通过一个简单的一维问题介绍有限元法的基本原理。然后，详细推导频域中标量和矢量电磁问题的有限元分析公式。之后，将其扩展至时域，并简要介绍一种处理色散媒质的方法。对于每个主题，都提供若干算例来展示有限元法的应用。最后，讨论如何用吸收边界条件和理想匹配层截断无界电磁问题的计算区域，以及有限元法在具体实现过程中涉及的一些数值问题。

第 10 章首先通过一个简单的静电场问题介绍矩量法的基本原理。之后，推导针对二维亥姆霍兹方程的通用积分方程，并且将其应用到几个具体问题中。对于每个问题，文中都详细给出其矩量法的求解步骤。之后，对三维问题重复上述过程，并分析几个导体和介质散射问题。本章还用矩量法分析平面周期结构和角周期结构，以及微带天线和微带电路，并由此讨论矩量法优势。最后，用一个简单的例子介绍如何将矩量法从频域推广到时域。

第 11 章讨论计算电磁学中的两个重要问题。第一个是快速算法，这些算法是为了更高效地求解积分方程发展起来的。快速算法分为两类，第一类需要基于积分核重新构建积分方程的数值离散形式，主要包括基于快速傅里叶变换的快速算法、自适应积分算法以及快速多极子算法；第二类直接应用于离散后的矩阵方程，包括自适应交叉近似算法。第二个主题是混合方法的发展，这种方法结合不同的数值方法，扬长避短，因而可以更有效地处理复杂电磁问题。文中用两个例子来展示混合方法，一个是有限元法和时域有限差分法的结合，另一个是有限元法和矩量法的结合。在讨论每一个快速算法和混合方法时都有相应的数值算例来展示它们的能力。

第 12 章对电磁分析的计算方法进行了简要回顾，其中包括一些在第 8 章到第 11 章中没有涉及的数值方法。最后，简要讨论计算电磁学的应用与挑战。

本书在写作时假定学生已经掌握基本的电磁学知识(至少上过一门本科生电磁学课程)。作为一本工程类教材，本书中使用 $e^{j\omega t}$ 作为时谐场的时间因子，而全书内容的侧重点放在解决各种电磁场边值问题上。每一章的末尾列出了一定数量的参考文献。每一章都包含了一定数量的习题，用于检验和巩固学生对课程内容的理解。每道习题都经过精心选择和设计，相互之间几乎没有重复，因而希望学生能够完成所有习题。选修计算电磁学课程的学生最好能够就时域有限差分法、有限元法和矩量法这三种方法各完成一个课程设计，并且撰写相应的技术报告。

# 目　录

# 第 1 章　基本电磁理论

本章介绍基本电磁理论，主要内容包括对矢量分析的简短回顾；微分和积分形式的麦克斯韦方程；将电磁场与可测力联系起来的洛伦兹力定律；描述媒质电磁特性的本构关系；不同媒质分界面及理想导体表面的边界条件；电磁能量和功率的概念；描述电磁场中能量守恒的坡印亭定理；时谐场中相量的概念；以及时谐场中复数形式的麦克斯韦方程和坡印亭定理。在开始这一章的学习之前，读者需要掌握矢量微积分的基本知识及本科水平的电磁理论[1~7]。

## 1.1　矢量分析

我们知道电场和磁场是矢量，它们既有大小又有方向。因此，学习电磁场时需要掌握矢量分析的基本知识。矢量分析中最常用的概念是散度、旋度和梯度。这一节首先介绍它们的定义以及对应的积分定理，接着介绍一种处理各种矢量恒等式的方法，最后讨论在研究麦克斯韦方程时非常有用的亥姆霍兹定理。

### 1.1.1　矢量算子和积分定理

假设 $\mathbf{f}$ 是矢量函数，其大小和方向随空间位置的变化而变化。矢量函数 $\mathbf{f}$ 的**散度**由下面的极限定义：

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \left[ \oiint_s \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{s} \right] \tag{1.1.1}$$

式中，$\Delta v$ 为无限小体积，$s$ 为包围此体积的闭合曲面。微分面元 $\mathrm{d}\mathbf{s}$ 垂直于 $s$，方向由内向外。把式(1.1.1)应用到笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标系中的微分体积上，可以得到散度在这三种最常用坐标系中的表达式：

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{1.1.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho f_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial f_\phi}{\rho \partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \tag{1.1.3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(f_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} \tag{1.1.4}$$

$\nabla \cdot \mathbf{f}$ 这个记号最早由 J. Willard Gibbs 用来表示 $\mathbf{f}$ 的散度[8]。注意，$\nabla \cdot \mathbf{f}$ 不应该理解成$\nabla$算子和矢量 $\mathbf{f}$ 的点乘，否则在柱坐标系和球坐标系中推导散度的表达式时很容易出错。现在考虑由闭合曲面 $S$ 所包围的有限体积 $V$。我们把 $V$ 分解成无数个无限小体积元，在每个小体积元上应用式(1.1.1)，然后求和。若矢量 $\mathbf{f}$ 和它的一阶导数在体积 $V$ 内及闭合曲面 $S$ 上连续，则可以得到

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{f} \, \mathrm{d}V = \oiint_S \mathbf{f} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1.1.5}$$

式(1.1.5)称为**散度定理**或**高斯定理**，这是一个电磁场理论中非常重要的定理。

除了散度，另一个描述矢量函数 $\mathbf{f}$ 变化情况的算子为**旋度**。矢量 $\mathbf{f}$ 的旋度由下面的极限定义：

$$\nabla\times\mathbf{f}=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\left[\oiint_s \mathrm{d}\mathbf{s}\times\mathbf{f}\right] \tag{1.1.6}$$

式中，$\Delta v$ 为无限小体积，$s$ 为包围此体积的闭合曲面。同样，$\nabla\times\mathbf{f}$ 仅是用来表示 $\mathbf{f}$ 的旋度的数学记号，而不能理解成$\nabla$算子和矢量 $\mathbf{f}$ 的叉乘。将式(1.1.6)应用到笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标系中的微分体积上，可以得到旋度的表达式：

$$\nabla\times\mathbf{f}=\hat{x}\left(\frac{\partial f_z}{\partial y}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\right)+\hat{y}\left(\frac{\partial f_x}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial x}\right)+\hat{z}\left(\frac{\partial f_y}{\partial x}-\frac{\partial f_x}{\partial y}\right) \tag{1.1.7}$$

$$\nabla\times\mathbf{f}=\hat{\rho}\left(\frac{\partial f_z}{\rho\partial\phi}-\frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)+\hat{\phi}\left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z}-\frac{\partial f_z}{\partial\rho}\right)+\hat{z}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho f_\phi)}{\partial\rho}-\frac{\partial f_\rho}{\partial\phi}\right] \tag{1.1.8}$$

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{f}=&\ \hat{r}\frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(f_\phi\sin\theta)-\frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\right]+\hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial f_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rf_\phi)\right]\\&+\hat{\phi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta)-\frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right]\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

很明显，旋度是一个具有与 $\mathbf{f}$ 不同大小、不同方向的矢量。旋度在给定方向$\hat{a}$上的分量为

$$\hat{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{f})=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{1}{\Delta s}\left[\oint_c \mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}\right] \tag{1.1.10}$$

式中，$\Delta s$ 为垂直于$\hat{a}$的无限小面积，$c$ 为 $\Delta s$ 的边界闭曲线。线元 $\mathrm{d}\mathbf{l}$ 与轮廓线 $c$ 相切，其方向和$\hat{a}$的方向满足右手定则。把式(1.1.6)应用到与$\hat{a}$垂直且厚度趋于零的无限小圆盘上，即可得到式(1.1.10)。现在，考虑以封闭轮廓线 $C$ 为边界的敞开面 $S$。我们把 $S$ 分解成无数无限小面积元，在每个小面积元上应用式(1.1.10)，然后求和。若矢量 $\mathbf{f}$ 和它的一阶导数在面 $S$ 及轮廓线 $C$ 上连续，则可以得到

$$\iint_S(\nabla\times\mathbf{f})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint_C\mathbf{f}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{1.1.11}$$

式(1.1.11)称为**斯托克斯定理**，它在电磁理论中同样非常重要。

随后将看到，一个矢量函数的散度和旋度足以完整地描述其变化情况。在矢量分析中，第三个常用的算子是**梯度**，它描述的是一个标量函数的变化情况。假设$f$是一个空间坐标的标量函数，其梯度定义为

$$\nabla f=\lim_{\Delta v\to 0}\frac{1}{\Delta v}\left[\oiint_s f\,\mathrm{d}\mathbf{s}\right] \tag{1.1.12}$$

这是一个矢量，其在给定方向$\hat{a}$上的分量为

$$\hat{a}\cdot\nabla f=\frac{\partial f}{\partial a} \tag{1.1.13}$$

将式(1.1.12)应用到法向为$\hat{a}$的厚度和半径均趋于零的无限小圆盘上，即可得到上式。将式(1.1.12)应用到笛卡儿坐标、柱坐标和球坐标系中的微分体积上，可以得到梯度的表达式：

$$\nabla f=\hat{x}\frac{\partial f}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial f}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.1.14}$$

$$\nabla f = \hat{\rho}\frac{\partial f}{\partial \rho} + \hat{\phi}\frac{\partial f}{\rho \partial \phi} + \hat{z}\frac{\partial f}{\partial z} \tag{1.1.15}$$

$$\nabla f = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{\partial f}{r \partial \theta} + \hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi} \tag{1.1.16}$$

在矢量分析中，另一个重要的算子是求一个标量函数梯度的散度，即$\nabla \cdot (\nabla f)$。这个算子称为**拉普拉斯算子**，表示为

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) \tag{1.1.17}$$

在三种常用坐标系中，其表达式为

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.1.18}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{1.1.19}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{1.1.20}$$

## 1.1.2　符号矢量法

在矢量分析中，经常需要对矢量表达式进行等价变换。推导矢量恒等式比较困难的原因之一是不能把算子$\nabla$当成一个矢量。这一节引入的**符号矢量法**可以使这个过程变得相对容易一些[8]。符号矢量用$\tilde{\nabla}$表示，其定义如下：

$$T(\tilde{\nabla}) = \lim_{\Delta v \to 0}\frac{1}{\Delta v}\left[\oiint_s T(\hat{n})\,\mathrm{d}s\right] \tag{1.1.21}$$

式中，$\Delta v$ 为无限小体积，$s$ 为包围这个体积的闭合曲面，$\hat{n}$为 $s$ 的单位外法向矢量，因而 $\mathbf{ds}$ 可以表示为 $\mathbf{ds} = \hat{n}\mathrm{d}s$。式(1.1.21)的左边，即 $T(\tilde{\nabla})$，代表包含符号矢量$\tilde{\nabla}$的一个表达式，如 $a\,\tilde{\nabla}$、$\mathbf{a} \cdot \tilde{\nabla}$、$\mathbf{a} \times \tilde{\nabla}$和$\tilde{\nabla} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$。等式右边的被积函数 $T(\hat{n})$，代表用$\hat{n}$替换$\tilde{\nabla}$后的形式完全相同的表达式。例如，对应上面例子中 $T(\tilde{\nabla})$的 $T(\hat{n})$，分别为 $a\,\hat{n}$、$\mathbf{a} \cdot \hat{n}$、$\mathbf{a} \times \hat{n}$和$\hat{n} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$。

基于式(1.1.21)的定义，不难发现：

$$\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f} = \lim_{\Delta v \to 0}\frac{1}{\Delta v}\left[\oiint_s \hat{n} \cdot \mathbf{f}\,\mathrm{d}s\right] = \lim_{\Delta v \to 0}\frac{1}{\Delta v}\left[\oiint_s \mathbf{f} \cdot \hat{n}\,\mathrm{d}s\right] = \mathbf{f} \cdot \tilde{\nabla} \tag{1.1.22}$$

类似地，可以证明$\tilde{\nabla} f = f\tilde{\nabla}$和$\tilde{\nabla} \times \mathbf{f} = -\mathbf{f} \times \tilde{\nabla}$。这表明，可以把$\tilde{\nabla}$作为一个普通的矢量来对待。因此，所有矢量分析中的处理技巧和恒等式都适用于$\tilde{\nabla}$。把式(1.1.21)与散度、旋度和梯度的定义进行比较，可以得到

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = \tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot \tilde{\nabla} \tag{1.1.23}$$

$$\nabla \times \mathbf{f} = \tilde{\nabla} \times \mathbf{f} = -\mathbf{f} \times \tilde{\nabla} \tag{1.1.24}$$

$$\nabla f = \tilde{\nabla} f = f\tilde{\nabla} \tag{1.1.25}$$

这些等式给出了符号矢量$\tilde{\nabla}$与散度、旋度和梯度算子之间的关系。对于任意给定的包含这些算子的表达式，可以首先根据式(1.1.23)至式(1.1.25)，将算子表达式变换成对应的矢量运算表达式，然后利用代数恒等式进行处理，最后再把符号矢量换回散度、旋度或梯度。例如，考虑$\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \times \mathbf{f})$，由于$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$，则有

$$\tilde{\nabla} \times (\tilde{\nabla} \times \mathbf{f}) = (\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f})\tilde{\nabla} - (\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\nabla})\mathbf{f} = \tilde{\nabla}(\tilde{\nabla} \cdot \mathbf{f}) - \tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\nabla}\mathbf{f}) \tag{1.1.26}$$

应用式(1.1.23)至式(1.1.25)，然后应用式(1.1.17)，可以得到一个非常有用的恒等式：

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{f})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{f})-\nabla^2\mathbf{f} \tag{1.1.27}$$

当一个矢量表达式包含符号矢量$\tilde{\nabla}$和两个任意函数时，由于$\tilde{\nabla}$作用于两个函数，可以用如下的链式法则来处理：

$$T(\tilde{\nabla},a,b)=T(\tilde{\nabla}_a,a,b)+T(\tilde{\nabla}_b,a,b) \tag{1.1.28}$$

式中，$a$ 和 $b$ 代表两个函数，它们可以是标量或者矢量。$\tilde{\nabla}_a$ 是作用于函数 $a$ 的符号矢量，$\tilde{\nabla}_b$ 是作用于函数 $b$ 的符号矢量。式(1.1.28)来自于微分中的链式法则：

$$\frac{\partial(ab)}{\partial x}=b\frac{\partial a}{\partial x}+a\frac{\partial b}{\partial x} \tag{1.1.29}$$

下面用3个例子来说明式(1.1.28)的应用。首先考虑表达式$\nabla\cdot(a\mathbf{b})$，使用式(1.1.28)，则有

$$\tilde{\nabla}\cdot(a\mathbf{b})=\tilde{\nabla}_a\cdot(a\mathbf{b})+\tilde{\nabla}_b\cdot(a\mathbf{b})=(\tilde{\nabla}_a a)\cdot\mathbf{b}+a\tilde{\nabla}_b\cdot\mathbf{b} \tag{1.1.30}$$

由于$\tilde{\nabla}\cdot(a\mathbf{b})=\nabla\cdot(a\mathbf{b})$，$\tilde{\nabla}_a a=\nabla a$ 和$\tilde{\nabla}_b\cdot\mathbf{b}=\nabla\cdot\mathbf{b}$，由此得到矢量恒等式

$$\nabla\cdot(a\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla a)+a\nabla\cdot\mathbf{b} \tag{1.1.31}$$

作为第二个例子，考虑$\nabla\times(a\mathbf{b})$，使用式(1.1.28)，有

$$\tilde{\nabla}\times(a\mathbf{b})=\tilde{\nabla}_a\times(a\mathbf{b})+\tilde{\nabla}_b\times(a\mathbf{b})=(\tilde{\nabla}_a a)\times\mathbf{b}+a\tilde{\nabla}_b\times\mathbf{b} \tag{1.1.32}$$

由此，得到矢量恒等式

$$\nabla\times(a\mathbf{b})=-\mathbf{b}\times\nabla a+a\nabla\times\mathbf{b} \tag{1.1.33}$$

下面是最后一个例子，考虑$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$，使用式(1.1.28)和代数恒等式

$$\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} \tag{1.1.34}$$

则有

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})&=\tilde{\nabla}_a\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\tilde{\nabla}_b\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\&=(\tilde{\nabla}_a\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\tilde{\nabla}_a\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}+(\tilde{\nabla}_b\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}-(\tilde{\nabla}_b\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}\end{aligned} \tag{1.1.35}$$

由此得到矢量恒等式

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}-\mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\nabla\cdot\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b} \tag{1.1.36}$$

这些例子展示了如何使用符号矢量法推导矢量恒等式，而若用通常的方法，这些推导则相当烦琐。

现在，考虑闭合曲面 $S$ 包围的有限体积 $V$。把这个体积分解成无数个无限小体积元，对每个小体积元应用式(1.1.21)，然后求和。若 $T(\tilde{\nabla})$所作用的函数在体积 $V$ 内连续，则可以得到

$$\iiint_V T(\tilde{\nabla})\,\mathrm{d}V=\oiint_S T(\hat{n})\,\mathrm{d}S \tag{1.1.37}$$

式(1.1.37)称为**广义高斯定理**。从这个定理出发可以推导出许多积分定理。例如，令 $T(\tilde{\nabla})=\tilde{\nabla}\cdot\mathbf{f}=\nabla\cdot\mathbf{f}$，可以得到式(1.1.5)表示的标准高斯定理；令 $T(\tilde{\nabla})=\tilde{\nabla}\times\mathbf{f}=\nabla\times\mathbf{f}$，可以得到**旋度定理**

$$\iiint_V \nabla\times\mathbf{f}\,\mathrm{d}V=\oiint_S \mathrm{d}\mathbf{S}\times\mathbf{f} \tag{1.1.38}$$

把上式应用在面积为 $S$ 的厚度趋于零的体积上，就能推出由式(1.1.11)表示的斯托克斯定理。

▷

【例 1.1】　使用广义高斯定理推导如下积分定理：

$$\iiint_V (\mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b})\,\mathrm{d}V=\oiint_S (\hat{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}\,\mathrm{d}S$$

**解**：基于等式右边的表达式，应该令 $T(\hat{n})=(\hat{n}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$。相应的符号矢量表达式为 $T(\tilde{\nabla})=(\tilde{\nabla}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}$。此式可以进一步写为

$$T(\tilde{\nabla})=(\tilde{\nabla}_a\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}+(\tilde{\nabla}_b\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}=(\tilde{\nabla}_a\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}+(\mathbf{a}\cdot\tilde{\nabla}_b)\mathbf{b}=\mathbf{b}\nabla\cdot\mathbf{a}+\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}$$

这里应用了式(1.1.28)所示的链式法则，以及 $\tilde{\nabla}$ 与散度和梯度算子之间的关系。将 $T(\tilde{\nabla})$ 和 $T(\hat{n})$ 的表达式代入式(1.1.37)的广义高斯定理中，就可以得到所需的积分定理。

◁

### 1.1.3　亥姆霍兹定理

在矢量分析中，有两种特殊的矢量。一种称为**无旋**矢量，其旋度为零。用 $\mathbf{F}_\mathrm{i}$ 表示这种矢量，有

$$\nabla\times\mathbf{F}_\mathrm{i}=0,\qquad \nabla\cdot\mathbf{F}_\mathrm{i}\neq 0 \tag{1.1.39}$$

另一种称为**无散**矢量，其散度为零。用 $\mathbf{F}_\mathrm{s}$ 表示这种矢量，有

$$\nabla\cdot\mathbf{F}_\mathrm{s}=0,\qquad \nabla\times\mathbf{F}_\mathrm{s}\neq 0 \tag{1.1.40}$$

使用符号矢量法，很容易证明如下两个非常重要的矢量恒等式：

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=0 \tag{1.1.41}$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0 \tag{1.1.42}$$

这两个恒等式适用于任意连续且可微分的标量函数 $\varphi$ 和矢量函数 $\mathbf{A}$。显然，$\nabla\varphi$ 是无旋矢量；而 $\nabla\times\mathbf{A}$ 是无散矢量。

不管矢量函数具有怎样复杂的变化情况，可以证明：一个在无穷远区趋于零的光滑矢量函数可以分解为一个无旋矢量和一个无散矢量的叠加，即

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_\mathrm{i}+\mathbf{F}_\mathrm{s} \tag{1.1.43}$$

对式(1.1.43)分别取旋度和散度，可以得到

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}_\mathrm{i},\qquad \nabla\times\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}_\mathrm{s} \tag{1.1.44}$$

上式表明：矢量的无散分量只与其旋度有关，而无旋分量只与其散度有关。因此，当一个矢量的散度和旋度完全确定时，这个矢量就完全确定了，这就是**亥姆霍兹定理**。

### 1.1.4　格林定理

从式(1.1.5)的高斯定理出发，可以推导出一些非常有用的积分定理。例如，如果把 $\mathbf{f}=a\nabla b$ 代入式(1.1.5)中，其中 $a$ 和 $b$ 为标量函数，应用矢量恒等式(1.1.31)，可以得到

$$\iiint_V (a\nabla^2 b+\nabla a\cdot\nabla b)\,\mathrm{d}V=\oiint_S a\frac{\partial b}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{1.1.45}$$

上式称为**第一标量格林定理**。交换 $a$ 和 $b$ 的位置，把结果与式(1.1.45)相减，可以得到

$$\iiint_V (a\nabla^2 b-b\nabla^2 a)\,\mathrm{d}V=\oiint_S \left(a\frac{\partial b}{\partial n}-b\frac{\partial a}{\partial n}\right)\mathrm{d}S \tag{1.1.46}$$

上式称为**第二标量格林定理**。

如果把 $\mathbf{f}=\mathbf{a}\times\nabla\times\mathbf{b}$ 代入式(1.1.5)中，其中 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 为矢量函数，应用矢量恒等式 $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times$

$\nabla\times\mathbf{b})=(\nabla\times\mathbf{a})\cdot(\nabla\times\mathbf{b})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{b})$，可以得到

$$\iiint_V [(\nabla\times\mathbf{a})\cdot(\nabla\times\mathbf{b})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{b})]\,\mathrm{d}V=\oiint_S(\mathbf{a}\times\nabla\times\mathbf{b})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1.1.47}$$

上式称为**第一矢量格林定理**。交换 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的位置，把结果与式(1.1.47)相减，可以得到

$$\iiint_V [\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{b})]\,\mathrm{d}V=\oiint_S(\mathbf{a}\times\nabla\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{1.1.48}$$

上式称为**第二矢量格林定理**。现在，令 $\mathbf{b}=\hat{b}\,b$，其中 $\hat{b}$ 为一任意方向的单位常矢量，$b$ 为标量函数，然后将其代入式(1.1.48)中，经过一些运算后，可以得到

$$\begin{aligned}&\iiint_V \left[b(\nabla\times\nabla\times\mathbf{a})+\mathbf{a}\nabla^2 b+(\nabla\cdot\mathbf{a})\nabla b\right]\mathrm{d}V\\&=\oiint_S[(\hat{n}\cdot\mathbf{a})\nabla b+(\hat{n}\times\mathbf{a})\times\nabla b+(\hat{n}\times\nabla\times\mathbf{a})b]\,\mathrm{d}S\end{aligned} \tag{1.1.49}$$

上式称为**标量-矢量格林定理**。

【**例 1.2**】 从式(1.1.48)的第二矢量格林定理推导式(1.1.49)所表示的标量-矢量格林定理。

**解**：令 $\mathbf{b}=\hat{b}\,b$，其中 $b$ 为任意标量连续函数，$\hat{b}$ 为任意方向的单位常矢量，则有

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{b})&=\mathbf{a}\cdot[\nabla\times\nabla\times(\hat{b}b)]=\mathbf{a}\cdot[\nabla\nabla\cdot(\hat{b}b)-\nabla^2(\hat{b}b)]\\&=\mathbf{a}\cdot[\nabla(\hat{b}\cdot\nabla b)-\hat{b}\nabla^2 b]=\mathbf{a}\cdot\nabla(\hat{b}\cdot\nabla b)-\hat{b}\cdot\mathbf{a}\nabla^2 b\\&=\nabla\cdot[\mathbf{a}(\hat{b}\cdot\nabla b)]-\hat{b}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{a})\nabla b-\hat{b}\cdot\mathbf{a}\nabla^2 b\end{aligned}$$

式中应用了矢量恒等式(1.1.27)和恒等式(1.1.31)。由此，式(1.1.48)左边的被积函数变为

$$\begin{aligned}&\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{b})\\&=\hat{b}\cdot[b(\nabla\times\nabla\times\mathbf{a})+(\nabla\cdot\mathbf{a})\nabla b+\mathbf{a}\nabla^2 b]-\nabla\cdot[\mathbf{a}(\hat{b}\cdot\nabla b)]\end{aligned}$$

另一方面，式(1.1.48)右边的被积函数可以写为

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\nabla\times\mathbf{b}-\mathbf{b}\times\nabla\times\mathbf{a})\cdot\hat{n}&=[\mathbf{a}\times\nabla\times(\hat{b}b)-b\hat{b}\times\nabla\times\mathbf{a}]\cdot\hat{n}\\&=[\mathbf{a}\times(\nabla b\times\hat{b})]\cdot\hat{n}-b\hat{b}\cdot[(\nabla\times\mathbf{a})\times\hat{n}]\\&=\hat{b}\cdot[(\hat{n}\times\mathbf{a})\times\nabla b+(\hat{n}\times\nabla\times\mathbf{a})b]\end{aligned}$$

式中应用了矢量恒等式(1.1.33)，并重复应用了恒等式 $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$。把被积函数的新表达式代入式(1.1.48)中，并应用高斯散度定理，可以得到

$$\begin{aligned}&\hat{b}\cdot\iiint_V \left[b(\nabla\times\nabla\times\mathbf{a})+\mathbf{a}\nabla^2 b+(\nabla\cdot\mathbf{a})\nabla b\right]\mathrm{d}V\\&=\hat{b}\cdot\oiint_S[(\hat{n}\cdot\mathbf{a})\nabla b+(\hat{n}\times\mathbf{a})\times\nabla b+(\hat{n}\times\nabla\times\mathbf{a})b]\,\mathrm{d}S\end{aligned}$$

由于 $\hat{b}$ 为任意方向的单位常矢量，上式即为式(1.1.49)表示的标量-矢量格林定理。

## 1.2 总电荷和总电流表示的麦克斯韦方程组

麦克斯韦方程是一组四个精确描述电场和磁场与电荷和电流关系的数学方程。它们由