

# 电磁理论中的边界元方法探索

覃新川 著



科学出版社

# 电磁理论中的边界元方法探索

覃新川 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书是一本关于电磁场数值计算理论的专著,共10章和5个附录,是作者近十年来对电磁理论边界积分方程式体系的探索和数值实施的研究总结。其中,第1、2章对本书所要求的主要数学基础和电磁场相关基础理论进行了简单的叙述。第3章是本书的引论,为本书研究内容定下了基调。第4~9章分别给出包含双旋度算子的三类微分方程的基本积分表述和旋度积分表述,从数学上分析了三类微分方程的基本性质,并对三类微分方程的两个积分表述进行数值验证和少量的实验验证探索。第10章给出包含双旋度算子的三类微分方程的分离变量解。

本书可供从事应用物理、电磁场工程以及相关领域研究的科技工作者参考,也可作为电磁场理论和计算电磁学相关专业的教学参考书。

---

### 图书在版编目(CIP)数据

电磁理论中的边界元方法探索/覃新川著. —北京:科学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-03-053313-5

I. ①电… II. ①覃… III. ①边界元法—研究 IV. ①O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第130701号

---

责任编辑:闫悦 / 责任校对:郭瑞芝

责任印制:张倩 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

文林印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2017年6月第一版 开本:720×1 000 1/16

2017年6月第一次印刷 印张:20 1/2

字数:398 000

定价:108.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

# 前 言

本书是一本关于电磁场数值计算理论的专著，是作者近十年来对电磁理论边界积分方程式体系的探索和数值实施的研究总结。

本书由 10 章和 5 个附录组成。

第 1 章和第 2 章主要就本书所要求的数学基础和电磁场相关基础理论进行了简单的叙述，这两章的内容是按照提纲格式来书写的，它们只是预备知识。除了第 2 章中少量对计算电磁学理论的部分疑问，对于专业读者可直接从第 3 章开始阅读。

第 3 章是本书的引论，为本书研究内容定下了基调。本章首先从多个方面指出麦克斯韦方程组的现有求解方法可能存在问题的各种表现形式，并大致描述了其他研究人员对麦克斯韦方程现有解法所提出的质疑和主要研究思路，分析了麦克斯韦方程现有解法存在的主要问题。在此基础上首先给出包含双旋度算子的三类微分方程本身隐含的所谓协调条件，并说明协调条件是由物理规律直接给予保证的。因此，经典理论中的各类规范条件是不必要的。其次本章明确指出通过规范（或者协调条件）和矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$  结合，将包含双旋度算子的微分方程转换为包含拉普拉斯算子的微分方程在物理上是存在问题的，并通过理论实例（或者说反例）说明了这一结论，从而纠正了经典电磁理论在这两方面的模糊认识。本章还从物理上推测麦克斯韦方程组的完善求解可能只能通过求解势函数表述的方程来实现，这本质上就是从计算电磁学的角度指出电磁场的基本量是势量  $A, \varphi$ ，而不是场量  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$  或者场量  $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ ，并明确指出：包含双旋度算子的一类微分方程的所谓欠定性是这类微分方程本身所固有的属性，它不可能完全消除。本章最后给出了电磁理论中出现的包含双旋度算子的三类微分方程定解问题的恰当提法，明确提出了完善求解麦克斯韦方程组的标准，这就是完善求解由麦克斯韦方程导出的反映静磁场分布规律的双旋度泊松方程、反映时谐电磁场分布规律的双旋度赫姆霍兹方程和反映一般电磁场变化规律的双旋度一般时域波动方程，这三个包含双旋度算子的微分方程的完善求解，我们将其比喻为需要翻越的“三座大山”。另外，为了实现工程应用，还必须解决实际工程材料的边界条件问题，我们将边界问题形象地称为一条不知深浅的河。

第 4 章、第 6 章和第 8 章分别用两种或三种方法推导出反映静磁场分布规律的双旋度泊松方程、反映时谐电磁场分布规律的双旋度赫姆霍兹方程和反映一般电磁场变化规律的双旋度一般时域波动方程的基本积分表述和旋度积分表述，并从数学上分析了包含双旋度算子的相应微分方程本身的欠定性特征、任意散度假设特性和初步的势分析等。限于作者的数学基础主要是工程数学，这些分析和数学证明如果从纯数学角

度来看并不十分严格，尽管如此，它们还是能为后续章节的数值验证和实验检验提供必要的数学基础。

第5章、第7章和第9章是在第4章、第6章和第8章的基础上，对三类方程的两个积分表述进行数值验证和实验验证。在第5章中数值验证包括两方面的内容：①从数学角度验证包含双旋度算子的微分方程的两个积分表述是否可行，也就是分别构造满足双旋度泊松方程和双旋度赫姆霍兹方程的理论解并由此构造恰当的边界条件，用数值计算验证所得数值解与理论解的差距；②选定可实现的物理模型，用新的积分表述的计算结果与经典理论的计算结果进行比较研究，找出两者明显不同的条件，并希望通过实验来证实这种不同。

实验验证当然需要建立具有一定检测精度的实验平台。第5章中作者选择“平行于铁磁体的通电导线产生的静磁场”这一问题作为反映静磁场分布规律的双旋度泊松方程的检验模型，该问题在理想条件下（理想磁体和无穷大尺寸）可得到理论解。同时实验较容易实现，且边界形状可以有一些变化，通过大量计算总能找到经典算法和新方法存在可以检测的差异的地方。事实上，在第5章我们将看到新的计算方法的计算结果与理论解、实测结果的吻合情况良好。

在第7章中，作者曾选择“平面波双孔干涉”实验来检验反映时谐电磁波的赫姆霍兹方程的相关结论。这一问题在实验实现上并不像人们想象得那么容易，例如，作为理论研究经常使用的平面波，在实验室的实现就有很大的困难，更不用说精确地检测电磁场了。后来作者考虑将以“平面波双孔干涉”实验为基础，降低频率，通过检测低频磁场的方式来检测。最近有朋友建议利用单色平面波球体衍射的严格解（米氏理论）来验证双旋度赫姆霍兹方程积分表述的正确性，但由于精力、能力和条件的限制，双旋度赫姆霍兹方程的实验验证并没有完成。

对于双旋度一般时域波动方程，由于问题过于复杂，对实验条件要求太高，作者没有进行实验验证的条件。除去构造理论解的数值验证外，只是选择索莫菲尔德问题，希望利用索莫菲尔德和布里渊的相关结论与数值计算结果相互检验。

第10章是用分离变量法求解包含双旋度算子的三个微分方程的一个尝试。本章在本书的最初计划中是没有的。本书作者自开始电磁场数值计算研究的近十年来曾进行了各种尝试，但由于牵扯的函数太多（9个），一直没能找到突破口。在本书初稿完成约50%时，再次尝试获得突破，当然这也推迟了本书交稿的时间至少3个月。看来当研究工作进行到一定程度后，静下心来进行认真的总结（如书写）是很有必要的。

本书在内容上主要有如下创新点。①说明包含双旋度算子的三类微分方程存在本身隐含的所谓协调条件，并且协调条件还与物理规律相联系，而经典理论中的规范条件是不必要的。②说明通过各类规范（或者协调条件）和矢量恒等式  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}$  结合，将包含双旋度算子的微分方程转换为包含拉普拉斯算子的微分方程在物理上是存在问题的，并通过理论例子说明了这一结论。③从物理上推测电磁场的完善求解可能只能通过求解势函数表述的方程来实现。这本质上就是从计算电磁学的角度指出电

磁场的基本量是势量  $A, \varphi$ , 而不是场量  $E, B$  或者场量  $D, H$ 。并明确指出: 包含双旋度算子的一类微分方程的所谓欠定性是这类微分方程本身所固有的属性, 它不可能完全消除。这三部分的相关内容在经典理论的相关著述中应该说或明或暗大致都能看到, 但对其进行系统的研究, 并将三者放在一起且明确指出应该说是很少见到 (甚至可以说是没有的)。这些内容主要在第 3 章体现。④首次用最基本的分离变量法直接给出了包含双旋度算子的三个微分方程的分离变量解, 这主要在第 10 章体现。⑤系统地给出了用边界元方法求解包含双旋度算子的微分方程时经常使用的 Cauchy 主值积分和 Hadamard 有限积分, 为边界元法在计算电磁学的广泛应用提供了一定基础。这主要体现在附录 B、附录 D 和附录 E 中。⑥用两种或三种方法给出了包含双旋度算子的双旋度泊松方程、双旋度赫姆霍兹方程和双旋度一般时域波动方程的基本积分表述和旋度积分表述, 并对其数学性质、边界元求解方法等进行了较为详细的讨论。这主要在第 4~9 章论述。本书的核心内容是作者近十年来所做主要研究工作的总结。

总之, 本书作者认为: 作为一个科学体系, 在确定了明确的研究对象 (或者理想模型) 之后, 逻辑自洽就是这个科学体系的唯一要求。这就必须以数学为工具, 没有数学就不能以逻辑形式表达物质运动的本质规律, 也就无法透过错综复杂的表面现象发现物质运动的本质规律。作者以此为原则进行本书相关内容的研究。

自麦克斯韦建立电磁场理论体系的 100 多年以来, 麦克斯韦电磁理论不仅是现代理论物理中的一个重要分支, 还一直被绝大多数研究者视为自然科学体系中一个最为成熟的经典理论。本书作者认为经典的牛顿理论体系和麦克斯韦电磁理论体系是人类现代物质文明的两大最重要的基础理论体系, 也是现代所有工程应用都离不开的基础理论体系。也可以说, 没有这两大理论体系的指导, 就不可能建立起现代物质文明。对于如此重要的理论体系所存在的系统问题, 仅凭个人或几个人的力量是难臻完善的。因此把个人所做的有限工作 (当然就是这些有限的工作也是在很多人的支持和帮助下完成的, 关于这一点后记中有较完整的记录, 这里不再复述) 发表出来, 就是希望与感兴趣的读者进行研讨, 希望大家对书中的不足之处给予批评指正, 使计算电磁学真正成为电磁工程设计的有力工具。

借此机会向所有曾给予支持和帮助的前辈、同学、亲人和朋友表示深深的谢意。

作 者

2017 年 1 月

于上海奉贤海湾棕榈滩家中

qxczm@ecust.edu.cn

# 目 录

## 前言

|                            |    |
|----------------------------|----|
| 第 1 章 电磁场分析中的数学基础          | 1  |
| 1.1 矢量微分算符                 | 1  |
| 1.1.1 标量场的方向导数与梯度          | 1  |
| 1.1.2 矢量场的通量和散度            | 2  |
| 1.1.3 矢量场的环量与旋度            | 3  |
| 1.1.4 正交曲线坐标系中的矢量微分算符      | 4  |
| 1.1.5 矢量(场)分解定理            | 4  |
| 1.2 广义函数                   | 5  |
| 1.2.1 $\delta$ 函数          | 6  |
| 1.2.2 亥维赛单位阶跃函数与符号函数       | 7  |
| 1.2.3 三维 $\delta$ 函数       | 7  |
| 1.2.4 广义函数的正则化             | 8  |
| 1.3 格林函数法                  | 9  |
| 1.3.1 格林公式                 | 9  |
| 1.3.2 格林函数的物理意义和一般性质       | 10 |
| 1.3.3 无界标量泊松方程问题中的格林函数     | 10 |
| 1.3.4 无界时谐波动问题中的格林函数       | 10 |
| 1.3.5 无界时域波动问题中的格林函数       | 11 |
| 1.4 加权余量法                  | 12 |
| 1.4.1 加权余量法简介              | 12 |
| 1.4.2 应用实例                 | 12 |
| 1.5 边界元法                   | 14 |
| 1.5.1 边界元法简介               | 15 |
| 1.5.2 应用实例——三维标量泊松方程的边界元解法 | 15 |
| 1.5.3 边界元法实施过程中的奇异积分的处理    | 16 |
| 1.5.4 无奇异边界元法              | 17 |
| 1.5.5 向量泊松方程               | 17 |
| 参考文献                       | 18 |

|                        |    |
|------------------------|----|
| 第 2 章 宏观电磁场理论基础        | 20 |
| 2.1 描述宏观电磁场的基本方程组      | 20 |
| 2.1.1 麦克斯韦方程组          | 20 |
| 2.1.2 复数形式的麦克斯韦方程组     | 22 |
| 2.1.3 广义形式的麦克斯韦方程      | 23 |
| 2.2 波动方程               | 23 |
| 2.2.1 原始变量表示的波动方程      | 23 |
| 2.2.2 势函数形式的波动方程       | 25 |
| 2.3 电磁场理论的基本定理         | 27 |
| 2.3.1 解的唯一性定理          | 27 |
| 2.3.2 坡印亭定理            | 27 |
| 2.3.3 等效原理             | 27 |
| 2.4 齐次波动方程的解和基本波函数     | 28 |
| 2.4.1 标量波动方程和基本波函数     | 28 |
| 2.4.2 基本波函数的相互关系       | 30 |
| 2.4.3 矢量波动方程和矢量波函数     | 30 |
| 2.5 非齐次波动方程的积分表述       | 33 |
| 2.5.1 非齐次标量波动方程        | 33 |
| 2.5.2 非齐次矢量波动方程的积分解    | 33 |
| 2.6 计算电磁学中的矢量积分方程      | 34 |
| 2.6.1 自由空间中的麦克斯韦方程的解   | 34 |
| 2.6.2 金属体散射问题积分方程的建立   | 35 |
| 参考文献                   | 36 |
| 第 3 章 麦克斯韦方程组的一致性分析    | 37 |
| 3.1 概述                 | 37 |
| 3.2 关于麦克斯韦方程组求解的讨论     | 39 |
| 3.2.1 哈尔姆斯问题           | 39 |
| 3.2.2 实验研究与理论研究的脱节     | 39 |
| 3.2.3 计算电磁学的现状         | 39 |
| 3.2.4 基准问题             | 40 |
| 3.2.5 国际国内主要研究现状       | 41 |
| 3.3 麦克斯韦方程组的一致性分析      | 41 |
| 3.3.1 旋度和散度是矢量场中不同性质的源 | 42 |
| 3.3.2 关于规范条件           | 42 |
| 3.3.3 关于赫姆霍兹矢量分解定理     | 43 |



|       |                       |    |
|-------|-----------------------|----|
| 3.3.4 | 一个重要的特殊矢量恒等式          | 43 |
| 3.3.5 | 双旋度算子和拉普拉斯算子          | 44 |
| 3.4   | 包含双旋度算子的微分方程的一致性分析    | 44 |
| 3.4.1 | 电磁场经典理论的微分方程与规范条件     | 44 |
| 3.4.2 | 协调条件                  | 47 |
| 3.4.3 | 包含双旋度算子的微分方程转换的讨论     | 50 |
| 3.4.4 | 理论验证实例                | 50 |
| 3.4.5 | 电磁势量为基本量的物理解释         | 55 |
| 3.5   | 包含双旋度算子的微分方程定解问题的恰当提法 | 57 |
| 3.5.1 | 包含双旋度算子微分方程的定解对象      | 57 |
| 3.5.2 | 包含双旋度算子的微分方程定解问题的数学提法 | 58 |
| 3.6   | 麦克斯韦方程组完善求解的标准        | 59 |
|       | 参考文献                  | 60 |
| 第 4 章 | 双旋度泊松方程求解理论           | 62 |
| 4.1   | 双旋度泊松方程的基本积分表述推导      | 62 |
| 4.1.1 | 基本积分表述的导出(格林函数法)      | 62 |
| 4.1.2 | 基本积分表述的导出(加权余量法)      | 64 |
| 4.2   | 双旋度泊松方程的旋度积分表述推导      | 67 |
| 4.2.1 | 旋度积分表述推导(格林函数法)       | 67 |
| 4.2.2 | 旋度积分表述推导(求导)          | 69 |
| 4.2.3 | 旋度积分表述的导出(加权余量法)      | 69 |
| 4.3   | 双旋度泊松方程的数学性质          | 71 |
| 4.3.1 | 双旋度泊松方程解的存在性和唯一性      | 71 |
| 4.3.2 | 双旋度泊松方程解的欠定性(任意散度假设)  | 72 |
| 4.3.3 | 双旋度泊松方程的协调性条件         | 74 |
| 4.3.4 | 双旋度泊松方程的二维特征          | 74 |
| 4.3.5 | 双旋度赫姆霍兹方程的势分析         | 76 |
|       | 参考文献                  | 80 |
| 第 5 章 | 双旋度泊松方程的数值验证和实验验证     | 81 |
| 5.1   | 数值验证问题介绍              | 81 |
| 5.1.1 | 理论验证数学模型              | 81 |
| 5.1.2 | 实际物理模型                | 83 |
| 5.2   | 积分表述离散模型              | 84 |
| 5.2.1 | 边界上的矢量分解              | 85 |
| 5.2.2 | 问题提法与离散格式             | 86 |

|       |                         |     |
|-------|-------------------------|-----|
| 5.2.3 | 数值验证结果                  | 92  |
| 5.3   | 实验过程与实验平台介绍             | 101 |
| 5.3.1 | 实验研究过程                  | 101 |
| 5.3.2 | 实验平台介绍                  | 104 |
| 5.4   | 数值验证与实验验证               | 105 |
| 5.4.1 | 积分表述与实际问题的离散形式          | 105 |
| 5.4.2 | 数值验证和实验验证               | 109 |
| 5.5   | 边界条件讨论                  | 117 |
|       | 参考文献                    | 119 |
| 第 6 章 | 双旋度赫姆霍兹方程求解理论           | 120 |
| 6.1   | 双旋度赫姆霍兹方程的基本积分表述推导      | 120 |
| 6.1.1 | 基本积分表述的导出 (格林函数法)       | 120 |
| 6.1.2 | 基本积分表述的导出 (加权余量法)       | 122 |
| 6.2   | 双旋度赫姆霍兹方程的旋度积分表述推导      | 125 |
| 6.2.1 | 旋度积分表述推导 (格林函数法)        | 125 |
| 6.2.2 | 旋度表述的另一种获得方式 (求导)       | 127 |
| 6.2.3 | 旋度积分表述的导出 (加权余量法)       | 127 |
| 6.3   | 双旋度赫姆霍兹方程的数学性质          | 129 |
| 6.3.1 | 双旋度赫姆霍兹方程解的存在性和唯一性      | 129 |
| 6.3.2 | 双旋度赫姆霍兹方程解的欠定性 (任意散度假设) | 130 |
| 6.3.3 | 双旋度赫姆霍兹方程的协调性条件         | 132 |
| 6.3.4 | 双旋度赫姆霍兹方程的二维特征          | 133 |
| 6.3.5 | 双旋度赫姆霍兹方程的势分析           | 135 |
|       | 参考文献                    | 139 |
| 第 7 章 | 双旋度赫姆霍兹方程数值求解与试验验证      | 140 |
| 7.1   | 数值验证问题介绍                | 140 |
| 7.1.1 | 理论验证数学模型                | 140 |
| 7.1.2 | 实验验证情况介绍                | 142 |
| 7.2   | 积分表述离散格式                | 146 |
| 7.2.1 | 旋度积分表述的离散格式             | 147 |
| 7.2.2 | 无奇异边界元方法的离散格式           | 148 |
| 7.2.3 | 双旋度赫姆霍兹方程边界元的系数计算       | 150 |
| 7.3   | 数值计算                    | 151 |
| 7.3.1 | 积分表述验证 (无损耗情况)          | 154 |
| 7.3.2 | 积分表述验证 (有损耗情况)          | 156 |

|                                                                                                    |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.3.3 边界元算法验证 (无损耗情况) .....                                                                        | 158 |
| 7.3.4 边界元算法验证 (有损耗情况) .....                                                                        | 161 |
| 7.4 实际工程材料边界条件初步探讨 .....                                                                           | 163 |
| 参考文献 .....                                                                                         | 165 |
| <b>第 8 章 时域电磁场计算理论</b> .....                                                                       | 166 |
| 8.1 时域双旋度波动方程的积分表述 .....                                                                           | 166 |
| 8.1.1 基本积分表述的导出 (格林函数法) .....                                                                      | 166 |
| 8.1.2 基本积分表述的导出 (加权余量法) .....                                                                      | 170 |
| 8.2 时域双旋度波动方程的旋度积分表述 .....                                                                         | 174 |
| 8.2.1 旋度积分表述推导 (格林函数法) .....                                                                       | 174 |
| 8.2.2 旋度积分表述 (求旋) .....                                                                            | 178 |
| 8.2.3 旋度积分表述的导出 (加权余量法) .....                                                                      | 179 |
| 8.3 双旋度波动方程的数学性质 .....                                                                             | 182 |
| 8.3.1 双旋度波动方程解的存在性和唯一性 .....                                                                       | 182 |
| 8.3.2 双旋度一般时域波动方程解的欠定性 (任意散度假设) .....                                                              | 182 |
| 8.3.3 双旋度波动方程的协调性条件 .....                                                                          | 185 |
| 8.3.4 双旋度波动方程的二维特征 .....                                                                           | 188 |
| 8.3.5 双旋度波动方程的势分析 .....                                                                            | 189 |
| 参考文献 .....                                                                                         | 194 |
| <b>第 9 章 时域电磁场数值验证</b> .....                                                                       | 195 |
| 9.1 数值验证问题介绍 .....                                                                                 | 195 |
| 9.1.1 理论验证数学模型 .....                                                                               | 195 |
| 9.1.2 索莫菲尔德问题 .....                                                                                | 199 |
| 9.2 双旋度波动边界积分方程的求解 .....                                                                           | 200 |
| 9.2.1 问题的提出 .....                                                                                  | 201 |
| 9.2.2 边界积分方程的求解 .....                                                                              | 202 |
| 9.2.3 区域内 $\mathbf{A}, \nabla \times \mathbf{A}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 的计算 ..... | 204 |
| 9.2.4 一般时域波动方程的边界元递推解法的基本步骤 .....                                                                  | 204 |
| 9.3 数值验证 .....                                                                                     | 205 |
| 9.3.1 计算模型 .....                                                                                   | 206 |
| 9.3.2 基本递推算法的理论验证 .....                                                                            | 206 |
| 9.3.3 积分表述验证 .....                                                                                 | 209 |
| 9.3.4 时域问题的迭代算法 .....                                                                              | 209 |
| 9.4 索莫菲尔德问题的数值呈现 .....                                                                             | 209 |

|                                        |            |
|----------------------------------------|------------|
| 9.4.1 索莫菲尔德问题的自相似现象 .....              | 209        |
| 9.4.2 索莫菲尔德问题的数值呈现 .....               | 210        |
| 9.5 存在的不足 .....                        | 214        |
| 参考文献 .....                             | 215        |
| <b>第 10 章 双旋度算子相关方程的分离变量法尝试 .....</b>  | <b>216</b> |
| 10.1 双旋度赫姆霍兹方程的分离变量法 .....             | 216        |
| 10.1.1 分离变量尝试 .....                    | 216        |
| 10.1.2 耦合的常微分方程求解 .....                | 220        |
| 10.1.3 利用协调条件求解相关的微分方程 .....           | 234        |
| 10.2 双旋度赫姆霍兹方程解的验证 .....               | 235        |
| 10.3 推广应用 .....                        | 240        |
| 10.3.1 双旋度泊松方程和双旋度一般时域波动方程的分离变量解 ..... | 240        |
| 10.3.2 曲线坐标系的双旋度赫姆霍兹方程分离变量解 .....      | 242        |
| 10.4 相关方程解的进一步讨论 .....                 | 245        |
| 10.5 结语 (应用展望) .....                   | 247        |
| 参考文献 .....                             | 247        |
| 本书主要参考文献 .....                         | 248        |
| 附录 A 矢量恒等式与张量简介 .....                  | 252        |
| 附录 B 与三维双旋度泊松方程有关的积分推导 .....           | 261        |
| 附录 C 平行于铁磁体的通电导线产生的静磁场实测数据 .....       | 273        |
| 附录 D 与三维双旋度赫姆霍兹方程有关的积分推导 .....         | 280        |
| 附录 E 时域积分处理 .....                      | 300        |
| 后记 .....                               | 310        |

# 第 1 章 电磁场分析中的数学基础

麦克斯韦方程组是反映电磁变化规律的基本方程,是用矢量表示的场方程(偏微分方程组),由此必要的矢量微分算符<sup>[1,2]</sup>知识是必须要了解的。

格林函数法是由微分方程导出积分方程的主要方法,而边界元法是本书在解决电磁场数值计算中使用的主要方法,因此,本章将介绍广义函数理论、格林函数法、加权余量法、边界元法等方法。

本章就本书所需的主要数学基础进行简单叙述。为了减少不必要的篇幅,本章是按照提纲式来书写的,缺乏必要的证明、说明和实例。欲了解更为详细的内容,请参阅相关参考文献。

## 1.1 矢量微分算符

电磁理论的场涉及标量场和矢量场。标量(如电位等)的空间分布构成标量场,矢量(如电场强度等)的空间分布构成矢量场。描写场在各点的空间变化趋势需要用微分手段,微分算符 $\nabla$ (读作“哈密顿”或“那勃勒”)就是为此引入的。

### 1.1.1 标量场的方向导数与梯度

标量场可用等值面来加以形象描述。等值面方程为

$$\Phi(\mathbf{r}) = \text{常数值} \quad (1.1)$$

标量函数 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 在给定时刻 $t_0$ 给定点 $M_0$ 沿给定方向 $l$ 的方向导数为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Phi(M) - \Phi(M_0)}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta l} \quad (1.2)$$

显然,当 $\frac{\partial \Phi}{\partial l} > 0$ 时,表示标量 $\Phi(\mathbf{r}, t)$ 在给定时刻 $t_0$ 给定点 $M_0$ 沿给定方向 $l$ 的方向是增大的,如图 1.1 所示。

在笛卡儿直角坐标系中,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1.3)$$

式中,  $\frac{\partial x}{\partial l} = \cos \alpha$ ,  $\frac{\partial y}{\partial l} = \cos \beta$ ,  $\frac{\partial z}{\partial l} = \cos \gamma$  是沿三个直角分量的方向余弦。

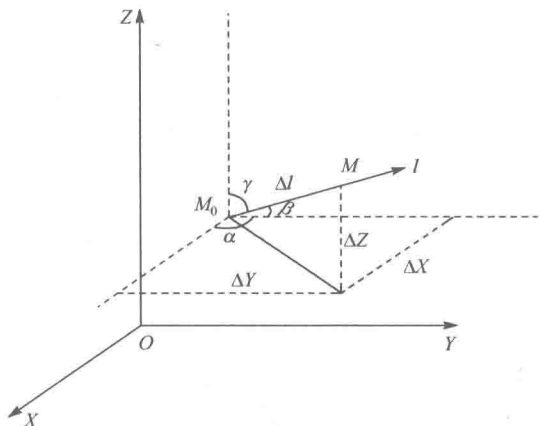


图 1.1 方向导数的方向

引入方向余弦矢量  $\mathbf{e}_l = \mathbf{e}_x \cos \alpha + \mathbf{e}_y \cos \beta + \mathbf{e}_z \cos \gamma$  和  $\mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ ,

则方向导数可表示为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \gamma = \mathbf{e}_l \cdot \mathbf{G} \quad (1.4)$$

当  $\mathbf{e}_l$  和  $\mathbf{G}$  同方向时, 方向导数具有最大值, 这个最大值称为标量场的梯度。记为

$$\text{grad } \Phi = \mathbf{G} = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.5)$$

梯度同时给出了最大方向导数的方向和最大方向的导数值, 是空间点的矢量函数。为简洁表达, 引入哈密顿算符  $\nabla$ , 即

$$\text{grad } \Phi = \nabla \Phi = \mathbf{e}_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1.6)$$

### 1.1.2 矢量场的通量和散度

面元矢量的定义为

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS \quad (1.7)$$

式中,  $\mathbf{n}$  是一个与面元相垂直的单位矢量, 一般取闭合面的外法线方向。而开表面的法线方向  $\mathbf{n}$ , 则与构成表面的闭合曲线呈右手螺旋关系, 闭合曲线的绕行方向应保证左手始终在内侧。

微元的通量为

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \cos \theta dS(\mathbf{r}) \quad (1.8)$$

指定曲面的通量为

$$\int_S \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{S}(r) = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S A \cos \theta dS \quad (1.9)$$

若为闭曲面，则通量为

$$\oint_S \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{S}(r) = \oint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S A \cos \theta dS \quad (1.10)$$

封闭曲面通量的极限，就是散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta V} \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{S}(r)}{\Delta V} \quad (1.11)$$

在笛卡儿直角坐标系中，

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (1.12)$$

散度定理（高斯定理）为

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A}(r) dV = \oint_S \mathbf{A}(r) \cdot d\mathbf{S} = \oint_S \mathbf{A}(r) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.13)$$

### 1.1.3 矢量场的环量与旋度

环量为

$$\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l A \cos \theta dl \quad (1.14)$$

注意：环量的积分曲线一定是封闭的。

环量的极限就是环流面密度（或称环量强度），但环量面密度与面元的法向方向  $\mathbf{n}$  有关，因此空间一点有多个环流面密度：

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}}{\Delta S} = \operatorname{rot}_n \mathbf{A} \quad (1.15)$$

规定某点环流面密度的最大值为该点的旋度：

$$\nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\left( n \oint_l \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \right)_{\max}}{\Delta S} \quad (1.16)$$

在笛卡儿直角坐标系中，矢量  $\mathbf{A}$  的旋度可表示：

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A} &= \mathbf{e}_x \operatorname{rot}_x \mathbf{A} + \mathbf{e}_y \operatorname{rot}_y \mathbf{A} + \mathbf{e}_z \operatorname{rot}_z \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{e}_x \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (1.17)$$

斯托克斯定律为

$$\oint_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.18)$$

散度、旋度的重要性质为

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (1.19)$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) = \nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (1.20)$$

### 1.1.4 正交曲线坐标系中的矢量微分算符

在电磁场理论研究中,除了笛卡儿直角坐标系,还经常用到圆柱坐标系、球坐标系等曲线坐标系,为减少不必要的篇幅,这里直接给出正交曲线坐标系中的矢量微分算符的相关公式如下:

$$\nabla = \mathbf{e}_1 \frac{\partial}{h_1 \partial q_1} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{h_2 \partial q_2} + \mathbf{e}_3 \frac{\partial}{h_3 \partial q_3} \quad (1.21)$$

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left( \frac{h_3 h_1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} \right) \right] \quad (1.22)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_3 h_1 h_2) \right] \quad (1.23)$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{bmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

式中,  $h_1, h_2, h_3$  称为拉梅系数(或度规因子); 对于笛卡儿直角坐标系  $(x, y, z)$ ,  $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$ ; 对于圆柱坐标系  $(\rho, \theta, z)$ ,  $h_1 = 1, h_2 = \rho, h_3 = 1$ ; 对于球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$ ,  $h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \theta$ 。

### 1.1.5 矢量(场)分解定理

#### 1) 赫姆霍兹矢量分解定理

在有限的区域  $V$  内,任一矢量场由它的散度、旋度和边界条件唯一地确定,且可表示为

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla \varphi(\mathbf{r}) + \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (1.25)$$

式中,



$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (1.26)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\mathbf{n} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (1.27)$$

式中,  $\mathbf{n}$  为区域边界的单位外法向分量。

赫姆霍兹矢量分解定理表明: 一个矢量场所具有的性质可完全由它的散度和旋度来表示。

特别指出: 只有矢量函数  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  是在连续的区域,  $\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$  和  $\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r})$  才有意义, 因为它们都包含  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  对空间位置的导数。另外, 赫姆霍兹分解不是唯一的。

## 2) 广义赫姆霍兹定理<sup>[3]</sup>

$$\mathbf{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} = \nabla \varphi_l + \nabla \times (\varphi_m \hat{z}) + \frac{1}{\lambda} \nabla \times \nabla \times (\varphi_n \hat{z}) \quad (1.28)$$

式中,  $\varphi_l, \varphi_m, \varphi_n$  满足标量赫姆霍兹方程  $\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = 0$  的解<sup>①</sup>。

式(1.28)第一个等号表示在欧氏空间上的投影; 第二个等号表示在矢量偏微分算子的本征函数空间上的投影。其第一项  $E_l = \nabla \varphi_l$  称为无旋场子空间; 而后两项:

$$\mathbf{E}_r = \nabla \times (\varphi_m \hat{z}) + \frac{1}{\lambda} \nabla \times \nabla \times (\varphi_n \hat{z}) \quad (1.29)$$

称为旋量场函数, 属于旋量场子空间。旋量场中包含两个独立的标量函数  $\varphi_m$  与  $\varphi_n$ , 所以从矢量偏微分算子空间上看, 旋量场只是一个“二维”的矢量。

## 3) 边界上的矢量分解

矢量场中任一点的矢量  $\mathbf{a}$  还可以按指定方向  $\mathbf{l}$  进行分解。即

$$\mathbf{a} = \mathbf{l}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{l}) \quad (1.30)$$

这种分解经常用在边界上, 此时一般将其分解为法向分量和切向分量。即

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \quad (1.31)$$

# 1.2 广义函数

广义函数<sup>[1,4-7]</sup>是对经典函数概念的推广。广义函数的主要内容之一就是把用经典数学观点不能解析运算的奇异函数变成能够严格进行解析运算的广义函数。首先对广义函数中, 历史最悠久、应用最广泛的  $\delta$  函数进行简略介绍。

① 在一般电磁学著述中, 是将  $\varphi_l, \varphi_m, \varphi_n$  统一标记为  $\varphi$ 。这里采用文献[3]的标记方法。