几类半导体模型的理论分析

Jilei Bandaoti Moxing de Lilun Fenxi

董建伟 著

西南交通大学出版社

几类半导体模型的理论分析

董建伟　著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

几类半导体模型的理论分析 / 董建伟著. —成都：西南交通大学出版社，2017.3
ISBN 978-7-5643-5297-4

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①董… Ⅲ. ①半导体 – 物理模型 Ⅳ. ①O47

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 035169 号

几类半导体模型的理论分析　董建伟　著

责任编辑　穆　丰
封面设计　米迦设计工作室

印张　9.5　　字数　164千	出版 发行　西南交通大学出版社
成品尺寸　170 mm × 230 mm	网址　http://www.xnjdcbs.com
版次　2017年3月第1版	地址　四川省成都市二环路北一段111号 西南交通大学创新大厦21楼
印次　2017年3月第1次	邮政编码　610031
印刷　四川森林印务有限责任公司	发行部电话　028-87600564　028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-5297-4　　定价：48.00元

前　言

随着科学技术的高速发展，从人们的日常生活到航空航天等领域，半导体器件都日益发挥着形影不离、举足轻重的巨大作用. 半导体工业的发展水平已经成为一个国家综合实力的重要组成部分.

半导体器件的研究，需要融合电子学、材料学和数学等各个学科. 为了研究半导体器件中载流子的运动规律，科学家们建立了不少半导体模型. 近二十年来，半导体器件的日益微型化使量子效应变得越来越重要，因而量子半导体模型成为众多数学家和物理学家的一个研究新热点，成为富有生命力的活跃领域. 量子半导体模型可分为微观量子模型和宏观量子模型两类，与微观量子模型相比较，宏观量子模型有两大优势：第一，宏观量子模型利用粒子密度、粒子速度、粒子温度和电流密度等来描述载流子的变化规律，在半导体器件的边界处便于给出这些量的描述；第二，宏观量子模型比微观量子模型更易于数值模拟.

本书的前四章研究四类常见的半导体宏观量子模型：量子漂移-扩散模型、量子能量输运模型、量子 Navier-Stokes 方程组和双极量子流体动力学模型. 我们在一维有界区间上利用指数变换法和 Leray-Schauder 不动点理论，证明了量子漂移-扩散稳态模型、量子能量输运稳态模型、量子 Navier-Stokes 稳态方程组古典解的存在性以及双极等温量子流体动力学稳态模型弱解的存在性，另外在一维有界区间上研究了量子 Navier-Stokes 方程组瞬态解的指数衰减性和爆破. 在研究这四类模型解的存在性时，虽然所用的方法类似，但模型的形式有很大不同，因此所用解的先验估计技巧以及不动点算子的构造都不尽相同. 第五章研究经典的能量输运模型，介绍其稳态方程组解的存在性和唯一性.

这五类模型从数学上讲都是复杂的非线性偏微分方程组，无法求出它们的真正解，只能从理论上研究它们的定解条件和解的性质，以便为解的近似计算和数值模拟提供理论依据。在超导体、流体力学、气体动力学、电动力学以及一些化学现象中，也出现过大量类似的偏微分方程。本书的研究成果将为研究其他类型的非线性偏微分方程提供新的方法和技巧，进一步丰富偏微分方程理论。在实际应用中，可以为一些半导体器件的科学试验和数值模拟提供合适的初始资料、边界条件和物理参数等，从而节减实验成本和实验

时间，加快生产进程，提高生产效益.

本书的编写和出版受到了河南省科技厅基础与前沿技术研究项目（编号：162300410077，名称：半导体器件中的能量输运模型研究）、郑州航空工业管理学院青年骨干教师计划项目、郑州航空工业管理学院重点学科建设项目以及航空经济发展河南省协同创新中心的支持和赞助.

虽极力追求完善，但书中不妥之处在所难免，欢迎各位专家、读者批评指正.

作 者

2016 年 5 月

目 录

第一章　量子漂移-扩散模型

1.1 引　言

单极量子漂移-扩散模型形式为[1]：

$$n_t = \operatorname{div}\left[-\varepsilon^2 n\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) + \nabla(p(n)) + n\nabla V\right], \tag{1.1.1}$$

$$-\lambda^2\Delta V = n - C(x) \ , \tag{1.1.2}$$

其中电子密度 n 和电位势 V 为未知函数，函数 $p(n)=n^\gamma$，$\gamma\geqslant 1$ 表示压力，已知函数 $C(x)$ 表示杂质密度，标度的普朗克常数 $\varepsilon>0$ 和德拜长度 $\lambda>0$ 为物理参数. 模型（1.1.1）~（1.1.2）可利用熵最小化原理从 Wigner-BGK 方程中取扩散极限[2]或从量子流体动力学方程组中取零弛豫时间极限[3]推导出. 在周期边界、Dirichlet 边界或 Dirichlet-Neumann 混合边界下，对于模型（1.1.1）~（1.1.2）的瞬态解的整体存在性、半古典极限及长时间行为已经有了很多研究结果，见文献[1，4-8]，稳态方面的结果见文献[9].

双极量子漂移-扩散模型形式为[10]：

$$n_t = \operatorname{div}\left[-\varepsilon^2 n\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right) + \nabla(n^\alpha) - n\nabla V\right], \tag{1.1.3}$$

$$p_t = \operatorname{div}\left[-\xi\varepsilon^2 p\nabla\left(\frac{\Delta\sqrt{p}}{\sqrt{p}}\right) + \nabla(p^\beta) + p\nabla V\right], \tag{1.1.4}$$

$$\lambda^2\Delta V = n - p - C(x) \ , \tag{1.1.5}$$

其中电子密度 n、空穴密度 p 和电位势 V 为未知函数，标度的普朗克常数 $\varepsilon>0$，德拜长度 $\lambda\geqslant 0$ 以及电子与空穴的效应质量比 $\xi>0$ 为物理参数，已知函数 $C(x)$ 表示杂质密度，$\alpha,\beta\geqslant 1$ 表示绝热指数. 关于模型（1.1.3）~（1.1.5）瞬态解的研究结果参看文献[10-14].

本章主要研究模型（1.1.1）~（1.1.2）一维稳态古典解的存在性和唯一性以及模型（1.1.3）~（1.1.5）一维稳态弱解的存在性、唯一性和半古典极限.

对于（1.1.1）~（1.1.2）一维稳态模型的古典解，我们考虑如下边值问题：

$$-\varepsilon^2 n\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_x + (p(n))_x + nV_x = J_0\,, \tag{1.1.6}$$

$$-\lambda^2 V_{xx} = n - C(x)\,,\ x\in(0,1)\,, \tag{1.1.7}$$

$$n(0)=n(1)=1\,,\ n_x(0)=n_x(1)=0\,, \tag{1.1.8}$$

$$V(0)=V_0=\begin{cases}\varepsilon^2(\sqrt{n})_{xx}(0), & p(n)=n,\\ \varepsilon^2(\sqrt{n})_{xx}(0)-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}, & p(n)=n^\gamma,\quad \gamma>1,\end{cases} \tag{1.1.9}$$

其中，常数 J_0 为电流密度。边界条件（1.1.9）可解释为 Bohm 位势 $\dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}$ 在 $x=0$ 处的 Dirichlet 边界条件。

对于问题（1.1.6）~（1.1.9），主要结果叙述如下：

定理 1.1.1[15] 设 $C(x)\in L^\infty(0,1)$，$C(x)>0$，$x\in(0,1)$，则问题（1.1.6）~（1.1.9）存在古典解 (n,V) 使得 $n(x)\geqslant \mathrm{e}^{-M}>0$，$x\in(0,1)$，其中 M 满足 $M=\sqrt{\dfrac{c_0\mathrm{e}^{(\gamma-1)M}}{\lambda^2\gamma}}$，$c_0=\mathrm{e}^{-1}+\|C(x)\log C(x)\|_{L^\infty(0,1)}$. 另外，在等温情形，即 $p(n)=n$ 时，如果 ε 和 $|J_0|$ 充分小，则问题（1.1.6）~（1.1.9）的解是唯一的.

注 1.1.1 文献[9]仅在等温情形下得到了（1.1.1）~（1.1.2）一维稳态模型弱解的存在性和唯一性，而定理 1.1.1 在等温和等熵两种情形下得到的都是问题的古典解.

对于（1.1.1）~（1.1.2）一维稳态模型的古典解，我们可以把定理 1.1.1 的结果推广到端点处电子密度不相等的情形：

$$n(0)=n_0\,,\ n(1)=n_1\,,\ n_x(0)=n_x(1)=0\,, \tag{1.1.10}$$

$$V(0)=V_0=\begin{cases}\varepsilon^2\dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}(0)-\log n_0, & p(n)=n,\\ \varepsilon^2\dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}(0)-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}n_0^{\gamma-1}, & p(n)=n^\gamma,\quad \gamma>1,\end{cases} \tag{1.1.11}$$

这里 $n_0,n_1>0$，常数 J_0 为电流密度. 对于问题（1.1.6）~（1.1.7),（1.1.10）~（1.1.11），我们有如下结果：

定理 1.1.2[16] 设 $C(x)\in L^2(0,1)$，则问题（1.1.6）~（1.1.7),（1.1.10）~（1.1.11）存在古典解 (n,V) 使得 $n(x)\geqslant \mathrm{e}^{-M}>0$， $x\in(0,1)$，其中 M 满足

$$M=\left|\log n_0\right|+\sqrt{\frac{8c_0\mathrm{e}^{(\gamma-1)M}}{\gamma}}\,, \tag{1.1.12}$$

$$c_0=\frac{2\varepsilon^2\alpha^2}{3\mu(1-\mu)}+\frac{23\gamma\alpha^2}{30}\mathrm{e}^{3(\gamma-1)M}+\frac{23\gamma\alpha^2}{60\mathrm{e}^{(\gamma-1)M}}+\frac{\mathrm{e}^{(\gamma-1)M}}{2\lambda^4\gamma}\left\|\mathrm{e}^{u_D}-C(x)\right\|_{L^2(0,1)}^2+$$

$$2\gamma^{-1}J_0^2\mathrm{e}^{(\gamma+1)M}+|\,J_0\,|\,\alpha\mathrm{e}^{M}\,, \tag{1.1.13}$$

$\alpha=|\log n_1-\log n_0\,|$，$\mu\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right]$，$\mu<\dfrac{1}{2\alpha}$. u_D的定义见 1.3 节中引理 1.3.1 的证明.

另外，如果 ε和 $|\,J_0\,|$ 充分小且 λ 充分大，则问题（1.1.6）~（1.1.7),（1.1.10）~（1.1.11）的解是唯一的.

对于（1.1.3）~（1.1.5）一维稳态模型的弱解，设 $\alpha=\beta=1$（等温情形)，为了方便，再设 $\lambda=\xi=1$，我们考虑如下边值问题：

$$-\varepsilon^2 n\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_x+n_x-nV_x=J_0\,, \tag{1.1.14}$$

$$-\varepsilon^2 p\left(\frac{(\sqrt{p})_{xx}}{\sqrt{p}}\right)_x+p_x+pV_x=J_1\,, \tag{1.1.15}$$

$$V_{xx}=n-p-C(x)\,,\ x\in(0,1)\,, \tag{1.1.16}$$

$$n(0)=n(1)=1\,,\ n_x(0)=n_x(1)=0\,, \tag{1.1.17}$$

$$p(0)=p(1)=1\,,\ p_x(0)=p_x(1)=0\,, \tag{1.1.18}$$

$$V(0)=V_0\,, \tag{1.1.19}$$

其中 J_0和 J_1分别表示电子电流密度和空穴电流密度.（1.1.14）除以 n再关于 x求导，得

$$-\varepsilon^2\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_{xx}+\left(\frac{n_x}{n}\right)_x-(n-p-C(x))=\left(\frac{J_0}{n}\right)_x\,, \tag{1.1.20}$$

这里用到了 Poisson 方程（1.1.16）. 类似地，（1.1.15）除以 p 再关于 x 求导，得

$$-\varepsilon^2\left(\frac{(\sqrt{p})_{xx}}{\sqrt{p}}\right)_{xx}+\left(\frac{p_x}{p}\right)_x+(n-p-C(x))=\left(\frac{J_1}{p}\right)_x. \tag{1.1.21}$$

令 $n=\mathrm{e}^u$， $p=\mathrm{e}^v$，则问题（1.1.20）~（1.1.21),（1.1.17）~（1.1.18）可写成

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)_{xx}+u_{xx}-(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x))=J_0(\mathrm{e}^{-u})_x\,, \tag{1.1.22}$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(v_{xx}+\frac{v_x^2}{2}\right)_{xx}+v_{xx}+(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x))=J_1(\mathrm{e}^{-v})_x\,, \tag{1.1.23}$$

$$u(0)=u(1)=0\,,\ u_x(0)=u_x(1)=0\,, \tag{1.1.24}$$

$$v(0)=v(1)=0\,,\ v_x(0)=v_x(1)=0\,. \tag{1.1.25}$$

定义 1.1.1 设 $(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$，如果对于 $\forall\psi\in H_0^2(0,1)$，成立

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)\psi_{xx}\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^1 u_x\psi_x\mathrm{d}x+\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x)\right)\psi\mathrm{d}x=J_0\int_0^1\mathrm{e}^{-u}\psi_x\mathrm{d}x\,, \tag{1.1.26}$$

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(v_{xx}+\frac{v_x^2}{2}\right)\psi_{xx}\mathrm{d}x+$$

$$\int_0^1 v_x\psi_x\mathrm{d}x-\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v-C(x)\right)\psi\mathrm{d}x=J_1\int_0^1\mathrm{e}^{-v}\psi_x\mathrm{d}x\,, \tag{1.1.27}$$

则称 $(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$ 为问题（1.1.22）~（1.1.25）的一个弱解.

对于问题（1.1.22）~（1.1.25)，我们的主要结果叙述如下：

定理 1.1.3[17] （解的存在性）设 $C(x)\in L^2(0,1)$，则问题（1.1.22）~（1.1.25）存在弱解 $(u,v)\in H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$.

定理 1.1.4[17] （解的唯一性）设 $C(x)\in L^2(0,1)$，若

$$\varepsilon^2\|C(x)\|_{L^2(0,1)}^2+(1+\sqrt{2}\,|J_0|)\mathrm{e}^{\sqrt{2}\|C(x)\|_{L^2(0,1)}}\leqslant 2\,, \tag{1.1.28}$$

$$\varepsilon^2 \|C(x)\|_{L^2(0,1)}^2 + (1+\sqrt{2}\,|J_1|)\mathrm{e}^{\sqrt{2}\|C(x)\|_{L^2(0,1)}} \leqslant 2\,, \tag{1.1.29}$$

则问题（1.1.22）~（1.1.25）的弱解是唯一的.

定理 1.1.5[17] （解的半古典极限）设$(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$为定理 1.1.3 中所得问题（1.1.22）~（1.1.25）的弱解，则当$\varepsilon \to 0$时，$(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$存在子列仍记为$(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$，使得

$$u_\varepsilon \to u\,,\quad v_\varepsilon \to v \quad \text{在 } H^1(0,1) \text{ 中弱收敛，在 } L^\infty(0,1) \text{ 中强收敛，} \tag{1.1.30}$$

且(u,v)是问题

$$u_{xx} - (\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v - C(x)) = J_0(\mathrm{e}^{-u})_x\,, \tag{1.1.31}$$

$$v_{xx} + (\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v - C(x)) = J_1(\mathrm{e}^{-v})_x\,, \tag{1.1.32}$$

$$u(0) = u(1) = 0\,,\quad v(0) = v(1) = 0 \tag{1.1.33}$$

的弱解。

本章我们作如下安排：1.2 节证明定理 1.1.1，1.3 节证明定理 1.1.2，1.4 节证明定理 1.1.3，定理 1.1.4 和定理 1.1.5.

1.2 定理 1.1.1 的证明

我们首先把方程组（1.1.6）~（1.1.7）转化为一个四阶椭圆方程. 事实上，将（1.1.6）式除以 n 再关于 x 求导得

$$-\varepsilon^2\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_{xx} + \left(\frac{(p(n))_x}{n}\right)_x - \frac{n - C(x)}{\lambda^2} = J_0\left(\frac{1}{n}\right)_x\,, \tag{1.2.1}$$

这里，我们用到了 Poisson 方程（1.1.7）。电位势 V 可以通过式（1.1.6）除以 n 再积分得到表达式（注意边界条件（1.1.8）~（1.1.9）可以使积分常数消失）:

$$V(x) = \begin{cases} \varepsilon^2 \dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}(x) - \log n(x) + J_0 \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{n(s)}, & \gamma = 1, \\ \varepsilon^2 \dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}(x) - \dfrac{\gamma}{\gamma - 1} n^{\gamma-1}(x) + J_0 \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{n(s)}, & \gamma > 1. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

令 $n=\mathrm{e}^u$，则式（1.2.1）~（1.2.2）可写成

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)_{xx}+[(p(\mathrm{e}^u))_x\mathrm{e}^{-u}]_x-\frac{\mathrm{e}^u-C(x)}{\lambda^2}=J_0(\mathrm{e}^{-u})_x\,, \tag{1.2.3}$$

$$V(x)=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^2}{2}\left(u_{xx}+\dfrac{u_x^2}{2}\right)(x)-u(x)+J_0\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-u(s)}\mathrm{d}s, & \gamma=1,\\ \dfrac{\varepsilon^2}{2}\left(u_{xx}+\dfrac{u_x^2}{2}\right)(x)-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\mathrm{e}^{(\gamma-1)u(x)}+J_0\displaystyle\int_0^x\mathrm{e}^{-u(s)}\mathrm{d}s, & \gamma>1.\end{cases} \tag{1.2.4}$$

相应边界条件为

$$u(0)=u(1)=0\,,\quad u_x(0)=u_x(1)=0\,, \tag{1.2.5}$$

$$V(0)=V_0=\begin{cases}\dfrac{\varepsilon^2}{2}u_{xx}(0), & \gamma=1\\ \dfrac{\varepsilon^2}{2}u_{xx}(0)-\dfrac{\gamma}{\gamma-1}, & \gamma>1\end{cases} \tag{1.2.6}$$

容易证明问题（1.1.6）~（1.1.9）与问题（1.2.3）~（1.2.6）对于古典解 $n>0$ 来说是等价的。

定义 1.2.1 设 $u\in H_0^2(0,1)$，如果对于 $\forall\psi\in H_0^2(0,1)$，成立

$$\begin{aligned}&-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)\psi_{xx}\mathrm{d}x-\gamma\int_0^1\mathrm{e}^{(\gamma-1)u}u_x\psi_x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-C(x)\right)\psi\,\mathrm{d}x-J_0\int_0^1\mathrm{e}^{-u}\psi_x\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.2.7}$$

则称 u 为问题（1.2.3）、（1.2.5）的一个弱解，这里我们用到了 $p(n)=n^\gamma$，$\gamma\geqslant 1$. 考虑如下截断问题：

$$\begin{aligned}&-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)\psi_{xx}\mathrm{d}x-\gamma\int_0^1\mathrm{e}^{(\gamma-1)u_M}u_x\psi_x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-C(x)\right)\psi\,\mathrm{d}x-J_0\int_0^1\mathrm{e}^{-u}\psi_x\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.2.8}$$

这里常数 $M>0$ 的定义见定理 1.1.1，$u_M=\min\{M,\max\{-M,u\}\}$。我们需要如下引理：

引理 1.2.1 设 $u\in H_0^2(0,1)$ 为（1.2.8）的解，则

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\|u_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2+\gamma\,\mathrm{e}^{-(\gamma-1)M}\|u_x\|_{L^2(0,1)}^2\leqslant\frac{c_0}{\lambda^2},\tag{1.2.9}$$

这里 $c_0=\mathrm{e}^{-1}+\|C(x)\log C(x)\|_{L^\infty(0,1)}$，另外成立 $\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M$.

证明：用 $\psi=u$ 作为（1.2.8）的试验函数，得

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1\left(u_{xx}^2+\frac{u_x^2}{2}u_{xx}\right)\mathrm{d}x=-\gamma\int_0^1\mathrm{e}^{(\gamma-1)u_M}u_x^2\mathrm{d}x-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^u-C(x)\right)u\mathrm{d}x+$$

$$J_0\int_0^1\mathrm{e}^{-u}u_x\mathrm{d}x=I_1+I_2+I_3.\tag{1.2.10}$$

显然，$I_1\leqslant-\gamma\,\mathrm{e}^{-(\gamma-1)M}\int_0^1u_x^2\mathrm{d}x$.

不难看出，$\mathrm{e}^{-1}+\|C(x)\log C(x)\|_{L^\infty(0,1)}$ 是函数 $u\mapsto-u(\mathrm{e}^u-C(x))$，$u\in R$，$x\in(0,1)$ 的一个上界，这里我们用到了 $C(x)>0$。所以

$$I_2\leqslant\lambda^{-2}\left(\mathrm{e}^{-1}+\|C(x)\log C(x)\|_{L^\infty(0,1)}\right).$$

由边界条件（1.2.5）知

$$I_3=-J_0\int_0^1\left(\mathrm{e}^{-u}\right)_x\mathrm{d}x=0.$$

注意：由于边界条件（1.2.5），积分

$$\int_0^1u_x^2u_{xx}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}[u_x^2(1)-u_x^2(0)]=0,$$

所以（1.2.10）式可估计为

$$\frac{\varepsilon^2}{2}\|u_{xx}\|_{L^2(0,1)}^2+\gamma\,\mathrm{e}^{-(\gamma-1)M}\|u_x\|_{L^2(0,1)}^2\leqslant\lambda^{-2}\left(\mathrm{e}^{-1}+\|C(x)\log C(x)\|_{L^\infty(0,1)}\right).$$

再由 Poincare-Sobolev 不等式得

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant\|u_x\|_{L^2(0,1)}\leqslant M:=\sqrt{\frac{c_0\mathrm{e}^{(\gamma-1)M}}{\lambda^2\gamma}},$$

这里 $c_0=\mathrm{e}^{-1}+\|C(x)\log C(x)\|_{L^\infty(0,1)}$，引理 1.2.1 得证.

下面我们可以利用 Leray-Schauder 不动点定理证明（1.2.7）解的存在性.

引理 1.2.2 在引理 1.2.1 的条件下，（1.2.7）存在解 $u\in H_0^2(0,1)$.

证明：对于给定的 $w\in W_0^{1,4}(0,1)$ 和试验函数 $\psi\in H_0^2(0,1)$，我们考虑如下线性问题：

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 u_{xx}\psi_{xx}\mathrm{d}x-\frac{\sigma\varepsilon^2}{4}\int_0^1 w_x^2\psi_{xx}\mathrm{d}x-\sigma\gamma\int_0^1 \mathrm{e}^{(\gamma-1)w}w_x\psi_x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sigma}{\lambda^2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^w-C(x)\right)\psi\mathrm{d}x-\sigma J_0\int_0^1\mathrm{e}^{-w}\psi_x\mathrm{d}x\,,\tag{1.2.11}$$

这里 $\sigma\in[0,1]$。我们定义双线性形式

$$a(u,\psi)=\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 u_{xx}\psi_{xx}\mathrm{d}x\tag{1.2.12}$$

和线性泛函

$$F(\psi)=-\frac{\sigma\varepsilon^2}{4}\int_0^1 w_x^2\psi_{xx}\mathrm{d}x-\sigma\gamma\int_0^1 \mathrm{e}^{(\gamma-1)w}w_x\psi_x\mathrm{d}x-$$

$$\frac{\sigma}{\lambda^2}\int_0^1\left(\mathrm{e}^w-C(x)\right)\psi\mathrm{d}x+\sigma J_0\int_0^1\mathrm{e}^{-w}\psi_x\mathrm{d}x.\tag{1.2.13}$$

因为双线性形式 $a(u,\psi)$ 在 $H_0^2(0,1)\times H_0^2(0,1)$ 上是连续且强制的，且线性泛函 $F(\psi)$ 在 $H_0^2(0,1)$ 上是连续的，我们利用 Lax-Milgram 定理可以得到（1.2.11）存在解 $u\in H_0^2(0,1)$。因此，算子

$$S:W_0^{1,4}(0,1)\times[0,1]\to W_0^{1,4}(0,1)\,,\qquad (w,\sigma)\mapsto u$$

是有定义的. 此外，此算子是连续且紧的（这是因为嵌入 $H_0^2(0,1)\subset W_0^{1,4}(0,1)$ 是紧的），且有 $S(w,0)=0$. 仿照引理 1.2.1 的证明步骤，我们可以证明对于所有满足 $S(u,\sigma)=u$ 的 $(u,\sigma)\in W_0^{1,4}(0,1)\times[0,1]$ 有 $\|u\|_{H_0^2(0,1)}\leqslant const.$ 因此，由 Leray-Schauder 不动点定理知 $S(u,1)=u$ 存在一个不动点 u. 此不动点是（1.2.8）的一个解，也是（1.2.7）的一个解，这是因为 $\|u\|_{L^\infty(0,1)}\leqslant M$. 引理 1.2.2 证毕.

有了引理 1.2.2，我们可以得到问题（1.2.3）~（1.2.6）解的存在性.

定理 1.2.1 在引理 1.2.1 的条件下，问题（1.2.3）~（1.2.6）存在解 $(u,V)\in H^4(0,1)\times H^2(0,1)$.

证明：设 u 是（1.2.7）或（1.2.3）的一个弱解. 因为 $u\in H_0^2(0,1)$，所以

$u_x^2 \in H_0^1(0,1)$．那么，由（1.2.3）可以推出 $u_{xxxx} \in H^{-1}(0,1)$．因此存在 $w \in L^2(0,1)$ 使得 $w_x = u_{xxxx}$．这意味着 $u_{xxx} = w + const. \in L^2(0,1)$，再由（1.2.3）知，$u_{xxxx} \in L^2(0,1)$．这样我们得到 $u \in H^4(0,1)$ 并且由 u 的正则性及（1.2.4）推出 V 的正则性. 定理 1.2.1 得证.

因为 $u \in H^4(0,1)$，$\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant M$ 和 $n = \mathrm{e}^u$，所以对于 $x \in (0,1)$，我们有 $n \in H^4(0,1)$ 和 $n(x) \geqslant \mathrm{e}^{-M} > 0$．由问题（1.1.6）~（1.1.9）和（1.2.3）~（1.2.6）的等价性以及定理 1.2.1 可以推出（1.1.6）~（1.1.9）存在古典解 (n,V)．

为了证明当等温时（即 $p(n)=n$）问题（1.1.6）~（1.1.9）解的唯一性，事实上，我们只需证明问题（1.2.3）有唯一解. 为此，设 $u,v \in H_0^2(0,1)$ 是

$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\left(u_{xx}+\frac{u_x^2}{2}\right)_{xx}+u_{xx}-\frac{\mathrm{e}^u-C(x)}{\lambda^2}=J_0(\mathrm{e}^{-u})_x \tag{1.2.14}$$

的两个解，这里在（1.2.3）式中用到了 $p(\mathrm{e}^u)=\mathrm{e}^u$．由 u_x 的边界条件，有

$$u_x^2(x)=2\int_0^x u_x(s)u_{xx}(s)\mathrm{d}s \leqslant 2\|u_x\|_{L^2(0,1)}\|u_{xx}\|_{L^2(0,1)},$$

从而由 Young 不等式得

$$\begin{aligned}\|u_x\|_{L^\infty(0,1)} &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\varepsilon}}\|u_x\|_{L^2(0,1)}+\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}\|u_{xx}\|_{L^2(0,1)}\\ &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\varepsilon}}M+\frac{\sqrt{2\varepsilon}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}M}{\varepsilon}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)\frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

（注意：等温时有 $M=\dfrac{\sqrt{c_0}}{\lambda}$，$\|u_x\|_{L^2(0,1)} \leqslant M$，$\|u_{xx}\|_{L^2(0,1)} \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{\varepsilon}M$．）对于 v_x，可以得到类似的估计. 因此

$$\|(u+v)_x\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant (2+\sqrt{2})\frac{M}{\sqrt{\varepsilon}}. \tag{1.2.15}$$

现在我们估计差 $u-v$．用 $u-v$ 分别作为 u 和 v 所满足方程的试验函数并将两式相减，得

$$\begin{aligned}&\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1(u-v)_{xx}^2\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon^2}{4}\int_0^1(u_x^2-v_x^2)(u-v)_{xx}\mathrm{d}x+\int_0^1(u-v)_x^2\mathrm{d}x\\ &=-\frac{1}{\lambda^2}\int_0^1(\mathrm{e}^u-\mathrm{e}^v)(u-v)\mathrm{d}x+J_0\int_0^1(\mathrm{e}^{-u}-\mathrm{e}^{-v})(u-v)_x\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.2.16}$$

由（1.2.15）和 Young 不等式得

$$\frac{\varepsilon^2}{4}\int_0^1 (u_x^2 - v_x^2)(u-v)_{xx}\,\mathrm{d}x \geqslant -\frac{(2+\sqrt{2})M\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{4}\int_0^1 \left|(u-v)_{xx}\right|\cdot\left|(u-v)_x\right|\mathrm{d}x$$

$$\geqslant -\frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^1 (u-v)_{xx}^2\,\mathrm{d}x - \frac{(2+\sqrt{2})^2 M^2\varepsilon}{32}\int_0^1 (u-v)_x^2\,\mathrm{d}x. \qquad (1.2.17)$$

由中值定理和 $\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leqslant M$ 得 $\left|\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-v}\right| \leqslant \mathrm{e}^M |u-v|$. 所以再由 Holder 不等式与 Poincare 不等式得

$$J_0\int_0^1 (\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-v})(u-v)_x\,\mathrm{d}x \leqslant |J_0|\,\mathrm{e}^M\left[\int_0^1 (u-v)^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^1 (u-v)_x^2\,\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant |J_0|\,\mathrm{e}^M\int_0^1 (u-v)_x^2\,\mathrm{d}x. \qquad (1.2.18)$$

由式（1.2.16）~（1.2.18）得

$$\left[1 - \frac{(2+\sqrt{2})^2 M^2\varepsilon}{32} - |J_0|\,\mathrm{e}^M\right]\int_0^1 (u-v)_x^2\,\mathrm{d}x \leqslant 0. \qquad (1.2.19)$$

所以如果 ε 和 $|J_0|$ 充分小，则 $u=v$. 解的唯一性得证.

1.3 定理 1.1.2 的证明

我们首先把方程组（1.1.6）~（1.1.7）转化为一个四阶椭圆方程. 事实上，将（1.1.6）式除以 n 再关于 x 求导得

$$-\varepsilon^2\left(\frac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}\right)_{xx} + \left(\frac{(p(n))_x}{n}\right)_x - \frac{n - C(x)}{\lambda^2} = J_0\left(\frac{1}{n}\right)_x, \qquad (1.3.1)$$

这里用到了 Poisson 方程（1.1.7）. 电位势 V 可以通过（1.1.6）除以 n 再积分得到表达式（注意边界条件（1.1.10）~（1.1.11）可以使积分常数消失）:

$$V(x) = \begin{cases} \varepsilon^2\dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}(x) - \log n(x) + J_0\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{n(s)}, & \gamma = 1, \\ \varepsilon^2\dfrac{(\sqrt{n})_{xx}}{\sqrt{n}}(x) - \dfrac{\gamma}{\gamma-1}n^{\gamma-1}(x) + J_0\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}s}{n(s)}, & \gamma > 1. \end{cases} \qquad (1.3.2)$$