经济模型与MATLAB应用

主　编　孙云龙　唐小英

JINGJI MOXING YU MATLAB YINGYONG

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press
中国·成都

经济模型与MATLAB应用

主 编 孙云龙 唐小英

JINGJI MOXING YU MATLAB YINGYONG

西南财经大学出版社
Southwestern University of Finance & Economics Press

图书在版编目(CIP)数据

经济模型与 MATLAB 应用/孙云龙,唐小英主编.—成都:西南财经大学出版社,2016.12

ISBN 978-7-5504-2698-6

Ⅰ.①经… Ⅱ.①孙…②唐… Ⅲ.①经济模型—计算机辅助计算—Matlab 软件—研究 Ⅳ.①F224.0-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 261567 号

经济模型与 MATLAB 应用

孙云龙　唐小英　主编

责任编辑:植　苗

责任校对:涂洪波　王　琳

封面设计:杨红鹰　张姗姗

责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街 55 号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	四川五洲彩印有限责任公司
成品尺寸	185mm×260mm
印　　张	16
字　　数	365 千字
版　　次	2016 年 12 月第 1 版
印　　次	2016 年 12 月第 1 次印刷
印　　数	1—2000 册
书　　号	ISBN 978-7-5504-2698-6
定　　价	35.00 元

前 言

本教材是编者在20年数学建模教学和指导学生参加数学建模竞赛实践经验的基础上，通过整理修改课程讲稿、参考国内外相关文献编写而成。其内容包括：数学模型基本知识、代数模型、MATLAB符号运算与绘图、方程模型、MATLAB程序设计、线性规划模型、非线性规划模型、概率模型、统计模型、图论模型、体育模型、其他模型以及西南财经大学校内竞赛赛题。

数学建模不是一门学科，而是一门课程，没有明确的内容体系。目前我国出版发行的数学建模类教材至少有200种，内容均不相同，有些教材差异非常大甚至完全不相同。正是由于有这么多差别，编者希望将自己对数学建模教学内容的理解以教材的形式反映出来。在本书的编写过程中，编者做了以下尝试：

(1) 努力突出数学建模的基本思想和基本方法。本教材通过介绍经济管理、日常生活、科学技术中众多数学模型的实例，系统、详实地阐述了数学建模与数学实验的基本理论和主要方法，以便学生在学习过程中能较好地认识现实问题与数学理论的桥梁关系，从总体上把握数学建模的思想方法。

(2) 在编写思想、体系安排、内容取舍上，本教材力求最大限度地适应财经类各专业学习该课程和后续课程的需要，精选大量的经济管理模型，并覆盖教材的始终，做到每个专题都有经济管理模型。

(3) 强调数学软件的重要性，本教材对MATLAB软件的应用进行了详细的讲解，特别是对编程方法的讲解，包括算法思想、算法流程、代码详解。并且各类数学模型都涉及MATLAB的使用和编程，这在类似教材中是很难见到的。

(4) 本书配有电子资源，揽括书中所有MATLAB的m文件的源代码，方便读者学习使用。电子资源放置在西财出版网的出版资料栏，或者登录链接http://www.bookcj.com/download_content.aspx? id=314直接下载。

编者一直对学生承诺编写一本与教学内容一致的数学建模教材，今日得以实现，倍感轻松。

本书既可作为各类学校、各专业学生数学建模课程的教材，也可作为参加数学建模竞赛的辅导书。

本书虽通过认真编写和修改，但限于作者水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者不吝指正。

编者

2016年10月

目录

第一章 数学模型基本知识

本章介绍数学模型、数学建模、经济模型的基础知识，并对 MATLAB 软件进行简单介绍。

第一节 什么是数学模型

数学是一门重要的基础学科，是各学科解决问题的一种强有力的工具，对这一工具的使用过程就是数学建模。

一、数学与数学教育

1. 数学

数学（Mathematics）是研究数量、结构、变化、空间以及信息等概念的一门学科。数学是一门重要的基础学科，在自然科学和社会科学中都占据十分重要的地位。数学是服务性学科，是各学科解决问题的一种强有力的工具，与现实的紧密联系是数学发展的原动力。

伽利略（Galileo，意大利数学家、物理学家、天文学家，1564—1642 年）：大自然是一本书，这本书是用数学写的。

罗吉尔·培根（Roger Bacon）（英国自然科学家、哲学家，1214—1294 年）：数学是科学大门的钥匙，忽视数学必将伤害所有的知识，因为忽视数学的人是无法了解任何其他科学乃至世界上任何其他事物的。更为严重的是，忽视数学的人不能理解他自己这一疏忽，最终将导致无法寻求任何补救的措施。

弗兰西斯·培根（Francis Bacon）（英国散文作家、哲学家、政治家和法理学家，1561—1626 年）：历史使人聪明，诗歌使人机智，数学使人精细，哲学使人深邃，道德使人严肃，逻辑与修辞使人善辩。

米山国藏（日本数学教育家）：学生在学校学的数学知识，毕业后若没什么机会去用，不到一两年，很快就忘掉了。然而，不管他们从事什么工作，唯有深深铭刻在头脑中的数学的精神、数学的思维方法和研究方法、推理方法和看问题的着眼点等会随时随地发生作用，使他们终身受益。

E. 戴维（E. David）（美国尼克松总统的科学顾问）：被人如此称颂的高技术本质上就是数学。

保罗·柯林斯（Paul Collins）（美国花旗银行副总裁）：一个从事银行业务而不懂数学的人，无非只能做些无关紧要的小事。

2. **数学教育**

历史地看，数学教育几乎总是与各行各业密切联系在一起，只是随着中学与大学的学院化，数学与现实的联系才被忽视或受到歪曲。美国数学家柯朗在其名著《数学是什么》的序言中这样写道："今天，数学的教学，逐渐流于无意义的单纯演算习题的训练，数学的研究，有过度专门化和过度抽象化的倾向，忽视了应用以及数学与其他领域之间的联系。"

一方面，数学以及数学的应用在世界的科学、技术、商业和日常生活中所起的作用越来越大；另一方面，数学科学的作用未被一般公众甚至科学界充分认识，数学科学作为技术变化以及工业竞争的推动力的重要性也未被充分认识。《数学是什么》于 1941 年初版，至今已 70 多年，数学教育的状况并没有根本改变。

事实上，人们正努力改变现状。20 世纪数学教育先后经历了两次全球性的大规模改革：一次是 20 世纪初的克莱因培利运动，另一次是 20 世纪 50 年代末的数学教育现代化改革运动蓬勃兴起。两次运动范围之广、影响之大都是史无前例的，改革的思想包括强调联系实际学习数学的重要性等。然而，这两次改革均宣告失败。

改革仍在继续。20 世纪末，数学教师全美协会强调："设计数学教学大纲，必须以能帮助学生解决各种实际问题的数学方法来武装学生。"1985 年，由美国科学基金会、美国工业与应用数学学会、美国国家安全局等发起赞助美国数学建模竞赛（Mathematical Contest in Modeling，MCM），创立该项比赛的目的就是为了吸引优秀学生关注数学应用。

3. **数学与经济学**

数学与经济学的关系很特别。经济管理类专业学生在学习数学时，普遍有两个感觉：数学既"无用"又"不够用"。一方面，学生会感觉所学的微积分、线性代数、概率论在经济管理类课程中很少使用甚至不用；另一方面，许多学生特别是研究生，在阅读一些科研论文尤其是国外研究前沿的科研论文时，发现自己所学的数学根本不够用，学多少数学好像都不够用。这是因为数学学科与许多理工学科是相互促进、互相渗透、共同发展的，在许多理工科的学习中能充分感受数学思维，比如"理论力学"就是数学。而经济学科中的数学基本上是拿来主义，即在经济定量分析研究中，寻找数学工具，建立模型，分析求解。因此我们认为，与理工科学生相比，数学模型对财经类学生更重要。

由于数学与经济学的这种特殊关系，我们想要在经济理论做深入研究就必须具有较好的数学基础。诺贝尔奖中没有数学奖，却与数学有不解之缘。我们可以通过观察诺贝尔经济学奖获得者可得到相关启示。21 世纪诺贝尔经济学奖获奖者如下：

2000 年：詹姆斯·赫克曼（James J. Heckman），科罗拉多学院数学学士；丹尼尔·麦克法登（Daniel L. McFadden），明尼苏达大学物理学士。

2001 年：乔治·阿克尔洛夫（George A. Akerlof）；迈克尔·斯彭斯（A. Michael

Spence）牛津大学数学硕士；约瑟夫·斯蒂格利茨（Joseph E. Stiglitz）。

2002年：丹尼尔·卡纳曼（Daniel Kahneman），希伯来大学心理学与数学学士；弗农·史密斯（Vernon L. Smith）。

2003年：克莱夫·格兰杰（Clive W. J. Granger），英国第一个经济学数学双学位、统计学博士；罗伯特·恩格尔（Robert F. Engle）。

2004年：芬恩·基德兰德（Finn E. Kydland）；爱德华·普雷斯科特（Edward C. Prescott），数学学士。

2005年：托马斯·克罗姆比·谢林（Thomas Crombie Schelling）；罗伯特·约翰·奥曼（Robert John Aumann），数学博士、数学硕士学位、数学博士，耶路撒冷希伯莱大学数学研究院教授、纽约州立大学斯坦尼分校经济系和决策科学学院教授以及以色列数学俱乐部主席、美国经济联合会荣誉会员等。

2006年：埃德蒙·菲尔普斯（Edmund S. Phelps）。

2007年：里奥尼德·赫维茨（Leonid Hurwicz），华沙大学法学硕士；埃克里·马斯金（Eric S. Maskin），哈佛大学数学博士；罗杰·梅尔森（Roger B. Myerson），哈佛大学应用数学博士。三人均没有经济学学位。

2008年：保罗·克鲁格曼（Paul Krugman）。

2009年：埃莉诺·奥斯特罗姆（Elinor Ostrom），政治学博士；奥利弗·威廉姆森（Oliver E. Williamson），高中就十分喜欢数学，麻省理工学院理学士、斯坦福大学工商管理硕士、卡内基-德梅隆大学经济学哲学博士。

2010年：彼得·戴蒙德（Peter Diamond），耶鲁大学数学学士，麻省理工学院经济学博士；戴尔·莫滕森（Dale T. Mortensen）；克里斯托弗·皮萨里德斯（Christopher A. Pissarides）。

2011年：托马斯·萨金特（Thomas J. Sargent）；克里斯托弗·西姆斯（Christopher A. Sims），哈佛大学数学学士。

2012年：埃尔文·罗斯（Alvin Roth），哥伦比亚大学运筹学学士、硕士、博士；罗伊德·沙普利（Lloyd Shapley），哈佛大学数学学士、博士。

2013年：尤金·法玛（Eugene F. Fama），法文学士；拉尔斯·彼得·汉森（Lars Peter Hansen），犹他州立大学数学学士；罗伯特·希勒（Robert J. Shiller）。

2014年：让·梯若尔（Jean Tirole），巴黎第九大学应用数学博士、麻省理工学院经济学博士。

2015年：安格斯·迪顿（Angus Deaton），曾就读于爱西堡 Fettes 学院，并在剑桥大学获得他的学士、硕士和博士学位。他在剑桥大学的前两年学习中，攻读数学专业。

2016年：奥利弗·哈特（Oliver Hart），剑桥大学国王学院数学学士学位；本特·霍尔姆斯特伦（Bengt Holmstroöm），赫尔辛基大学数学学士学位，斯坦福大学运筹学硕士学位。

二、数学模型

1. 模型

模型（Model）的概念应用极其广泛。

最常见的是实物模型，通常是指依照实物的形状和结构按比例制成的物体。比如玩具、手办、户型模型、机械模型、城市规划模型等。

物理模型，主要指为了一定目的根据相似原理构造的模型。比如机器人、航模飞机、风洞等。

结构模型，主要反映系统的结构特点和因果关系，最常见的就是图模型。比如地图、电路图、分子结构图等。

其他模型，比如工业模型、仿真模型、3D模型、人力资源模型、思维模型等。

模型是为了一定目的对客观事物的一部分进行简缩、抽象、提炼出来的原型的替代物，模型集中反映了原型中人们需要的那一部分特征。对于一个原型，根据目的不同，可以建立多个截然不同的模型。而对于同一目的，由于考查方面不同，采用的方法不同，也会得到不同的模型。

2. 数学模型

数学模型（Mathematical Model）是近些年发展起来的新学科，是数学理论与实际问题相结合的一门科学。它将现实问题归结为相应的数学问题，并在此基础上利用数学的概念、方法和理论进行深入的分析和研究，从而从定性或定量的角度来刻画实际问题，并为解决现实问题提供精确的数据或可靠的指导。

数学模型没有一个统一的定义。姜启源教授对数学模型的解释是："对于一个现实对象，为了一个特定目的，根据其内在规律，做出必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构。"建立数学模型，包括表述、求解、解释、检验等的全过程称为数学建模。

数学模型具有这样几个特征：

（1）沟通现实世界与数学之间的桥梁。

（2）一种抽象模型，区别于具体模型。

（3）数学结构，如数学符号、数学公式、程序、图、表等。

3. 数学建模的一般步骤

问题分析：了解问题背景，明确建模目的，掌握必要信息。

模型假设：根据对象的特征和建模目的，做出必要、合理的简化和假设。模型假设既要反映问题的本质特征，又能使问题得到简化，便于进行数学描述。

建立模型：在分析和假设的基础上，利用合适的数学工具去刻画各变量之间的关系，把问题转化为数学问题。建立模型的方法包括机理分析法、测试分析法、计算机模拟等，常见模型包括函数模型、几何模型、方程模型、随机模型、图论模型、规划模型等。

模型求解：利用数学方法求解得到的数学模型，即应用数学理论求解，特别是计算方法理论，借助计算机求解。

模型分析：结果分析、数据分析。常见的分析内容包括变量之间的依赖关系或稳定性态、数学预测、最优决策控制等。

模型检验：分析所得结果的实际意义，与实际情况进行比较，看是否符合实际，如果结果不够理想，应该修改、补充假设或重新建模。有些模型需要经过多次反复修改，不断完善。

模型应用：建模的最终目的就是实际应用。

三、数学建模竞赛

1. 三大赛事

通常数学建模竞赛是指美国大学生数学建模竞赛、全国大学生数学建模竞赛、全国研究生数学建模竞赛三大赛事。

美国大学生数学建模竞赛（MCM/ICM）是一项国际性的学科竞赛，在世界范围内极具影响力，为现今各类数学建模竞赛之鼻祖。MCM/ICM 是 Mathematical Contest in Modeling 和 Interdisciplinary Contest in Modeling 的缩写，即数学建模竞赛和交叉学科建模竞赛。MCM 始于 1985 年，ICM 始于 2000 年，由美国数学及其应用联合会（the Consortium for Mathematics and Its Application，COMAP）主办，得到了美国工业和应用数学学会（Society for Industry and Applied Mathematics，SIAM）、美国国家安全局（National Security Agency，NSA）、运筹与管理科学学会（Institute for Operations Research and the Management Sciences，INFORMS）等多个组织的赞助。MCM/ICM 着重强调研究问题、解决方案的原创性、团队合作、交流以及结果的合理性。近几年，每年均有来自美国、中国、加拿大、芬兰、英国等国家和地区的近万支队伍参加，包括来自哈佛大学、普林斯顿大学、西点军校、麻省理工学院、清华大学、北京大学、浙江大学等国际知名高校学生参与此项赛事角逐。

全国大学生数学建模竞赛由教育部高教司和中国工业与应用数学学会联合主办，创办于 1992 年，每年一届，目前已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛，也是世界上规模最大的数学建模竞赛。二十多年来，全国大学生数学建模竞赛得到了飞速发展，已经成为“推进素质教育、促进创新人才培养的重大品牌竞赛项目”（教育部高教司张大良司长在全国大学生数学建模竞赛 20 周年庆典暨 2011 年颁奖仪式上的致辞）。近几年，每年均有来自全国 33 个省、市、自治区（包括香港和澳门特区）以及新加坡、美国的高等院校的数万名大学生报名参加本项竞赛。

全国研究生数学建模竞赛是一项面向全国研究生群体的学术竞赛活动，创办于 2004 年，2006 年被列为教育部研究生教育创新计划项目之一。从 2013 年起，该竞赛作为“全国研究生创新实践系列活动”主题赛事之一，由教育部学位与研究生教育发展中心主办。该项赛事是广大研究生探索实际问题、开展学术交流、提高创新能力和培养团队意识的有效平台。近几年，每年均有来自全国 30 个省、市、自治区的数千支研

究生队成功参赛，参赛规模历年均创新高。

此外，还有许多类似的比赛，如苏北数学建模联赛、华中数学建模竞赛、华东地区大学生数学建模邀请赛、东北三省数学建模竞赛、中国电机工程学（电工）杯数学建模竞赛、数学中国数学建模网络挑战赛、数学中国数学建模国际赛等。目前，相当数量的学校已开始举办“数学建模校内赛”。

2. **数学建模竞赛是一个创新实践平台**

我国大学生的数学建模竞赛活动是从北京大学、清华大学、北京理工大学等共 4 个队于 1989 年参加美国数学建模竞赛开始的。从那时起，数学建模竞赛活动在我国高校中得到迅速发展。1992 年由中国工业与应用数学学会数学模型专业委员会组织举办了我国 10 城市的大学生数学模型联赛。教育部领导及时发现并扶植、培育了这一新生事物，决定从 1994 年起由教育部高教司和中国工业与应用数学学会共同主办全国大学生数学建模竞赛，每年一届，至今已二十多年，竞赛的规模以平均年增长 25%以上的速度发展。

以数学建模竞赛为主体的数学建模活动实际上是一种规模巨大的教育教学改革的实验，数学建模实践活动已成为培养高素质人才的创新实践平台，在此平台上可以全面、系统地培养学生的各种能力。在我国甚至世界范围内，尚没有哪一门数学课程、哪一项活动、哪一项学科性竞赛能取得如此迅猛的发展，能够在培养学生能力上起到如此大的作用。中国高等教育学会会长周远清教授曾用“成功的高等教育改革实践”给以评价。李大潜、陈永川、徐宗本、袁亚湘、曾庆存、谷超豪、江伯驹、张恭庆、王选、刘应明等许多中国科学院和中国工程院院士以及教育界的专家在参加为数学建模竞赛举办的活动时，均对这项竞赛给予热情关心和很高的评价。

首先，数学建模竞赛活动是提高学生综合素质的有效途径。

数学建模是沟通现实世界和数学科学之间的桥梁，是数学走向应用的必经之路。它强调的是解决实际问题，以实际问题为载体，通过综合运用经济、数学等各方面的知识，利用计算机等先进技术手段，用数学的方法解决现实社会中的各种问题。通过数学建模活动的开展，有利于培养大学生的创造能力和创新意识，有利于培养大学生的组织协调能力，有利于培养和提高大学生的自学能力，有利于培养和提高大学生使用计算机的能力，有利于培养大学生严谨的治学态度，有利于增强大学生的适应能力，有利于磨炼大学生的意志和增强锻炼身体的意识，有利于提高大学生的综合素质。

其次，以数学建模为主体的教学活动推动了数学教学内容、方法、手段改革的日趋完善。

以大学生数学建模为主体的数学建模教学活动实际上是一种不打乱教学秩序的、规模相当大的大学生数学教育改革的试验，是我国一项成功的高等教育改革实践，为高等学校应该培养什么人、怎样培养人做出了重要的探索，为提高学生综合素质提供了一个范例。关于大学应设置什么样的课程，虽然尚不能有定论，但从已经在国内广泛开设的数学建模课来看，大学生数学建模竞赛已经对课程设置产生了实质性的影响。更可喜的是，许多教师在自己开设的课程中力图渗透数学建模的思想，并取得了很好

的教学效果。在1997—2014年的五届普通高等学校国家级教学成果奖中，与数学建模和数学实验直接相关的成果共有13项；截至2014年，在国家级精品课程中，数学建模和数学实验课程有12门。

最后，让数学建模竞赛活动成为一个创新实践平台。

数学建模如果只停留在单独设课、举行竞赛的层面上，不仅其受益面受到很大限制，而且不能深入到数学教育的核心中去。在西南财经大学，数学建模活动已形成了以“普及发动、课堂教学、课外实践”为特色的教学模式，其独特的实践环节吸引了一大批各专业学生。每年为全校学生举办的数学建模课题讲座，用微积分、简单微分方程、线性代数等大学一年级新生已经掌握的数学知识讲解数学建模在解决生产实际问题中的作用，使困惑于“学数学究竟有什么用”的学生豁然开朗，并对数学建模产生了浓厚的兴趣。本科生、研究生的数学建模课程的选修率名列前茅，是学校影响最大的课程之一。每年的建模培训与建模竞赛备受学生瞩目，许多学生踊跃报名，要求参赛。由此可以看出，数学建模活动的深入开展具有广泛的群众基础，其独特的教育教学方式吸引了大批优秀学生，学校、教师通过努力探索，可以使之成为一个创新实践平台。

许多参加数学建模竞赛的同学均感到“一次参赛，终身受益!”

第二节　数学建模实例

本节给出两个数学建模实例，重点说明如何做出合理、简化假设，用数学语言表述实际问题，用数学理论解决问题以及结果的实际意义。

一、椅子放稳问题

1. 问题

四只脚的椅子在不平的地面上，通过调整位置，使四只脚同时着地。

分析：四只脚的椅子在不平的地面上放置，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只需稍微挪动几次，就可能使四只脚同时着地，就放稳了。这个看来似乎与数学无关的现象能用数学语言给以表述，并用数学工具来证实吗？

2. 模型假设

注意：我们并不研究所有的椅子和任意地面，我们需要明确要研究的对象和简化研究的问题，对椅子和地面做一些必要的假设：

（1）椅子：方形，四条腿一样长，椅脚与地面接触处可视为一个点，四脚的连线呈正方形。

（2）地面：高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断（没有像台阶那样的情况），即地面可视为数学上的连续曲面。

（3）动作：将椅子放在地面上，对于椅脚的间距和椅脚的长度而言，地面是相对

平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地。

3. 模型建立

模型构成的中心问题是用数学语言把椅子四只脚同时着地的条件和结论表示出来。

在这里，我们研究方椅沿椅脚连线正方形的中心旋转的情形下椅子的状态变化。

（1）椅子的位置的描述

根据模型假设中的假设（1），椅脚连线成正方形，以中心为对称点，正方形的中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度 θ 这一变量表示椅子的位置。如图 1-1 所示。

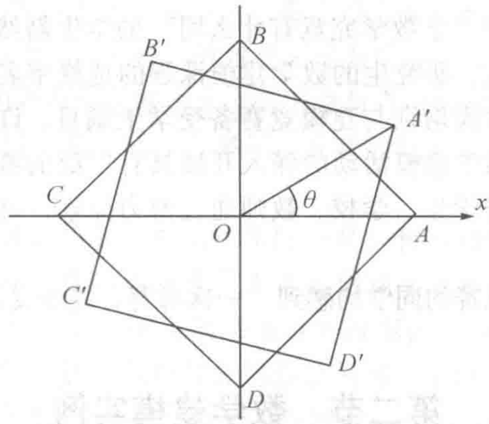

图 1-1　椅脚位置平面示意图

椅脚连线为正方形 $ABCD$，对角线 AC 与 x 轴重合，椅子绕中心点 O 旋转角度 θ 后，正方形 $ABCD$ 转至 $A'B'C'D'$ 的位置，所以对角线 AC 与 x 轴的夹角 θ 表示了椅子的位置。

椅脚着地用数学语言来描述就是：距离。由于椅子有四只脚，因此有四个距离，由正方形的中心对称性可知，只要设两个距离函数即可。

设 f 为 AC 两脚与地面距离之和，g 为 BD 两脚与地面距离之和。显然 f、g 是旋转角度 θ 的函数，于是，两个距离可表示为 $f(\theta)$、$g(\theta)$。

（2）模型

根据假设（2），f、g 是连续函数。根据假设（3），椅子在任何位置至少有三只脚着地，因此对于任意的 θ，$f(\theta)$、$g(\theta)$ 至少有一个为零。

不妨设当 $\theta=0$ 时，$g(\theta)=0$，$f(\theta)>0$。

于是，改变椅子的位置使四只脚同时着地问题就归结为证明如下的数学命题：

已知 $f(\theta)$、$g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)\,g(\theta)=0$，且 $g(0)=0$，$f(0)>0$。证明存在 θ_0，使 $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$。

4. 模型求解

上述命题有多种证明方法，这里介绍其中比较简单，但是有些粗糙的一种。

令 $h(\theta)=f(\theta)-g(\theta)$，则：$h(\theta)$ 为连续函数

当 $\theta=0$ 时，$h(0)=f(0)>0$

将椅子旋转 90^0，对角线 AC 与 BD 互换，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$h(\frac{\pi}{2})=f(\frac{\pi}{2})-g(\frac{\pi}{2})=g(0)-f(0)=-f(0)<0$$

于是：$h(\theta)$ 为闭区间 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的连续函数，其端点异号。

由零点存在定理，得

存在 θ_0，使 $h(\theta_0)=0$

$\because$ 对任意 θ，$f(\theta)\ g(\theta)=0$

$\therefore$ $f(\theta_0)=g(\theta_0)=0$

结论：椅子一定能够放稳。

5. 评注

面对实际问题时，我们并没有马上看见数学，而是在建模的过程中逐步将数学语言引入的。

这个模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离，进而把模型假设和椅脚同时着地的结论用简单、精确的数学语言表达出来，构成了这个实际问题的数学模型。

由此可以看出，在模型建立过程中，有一些讨论我们粗糙带过，比如四个距离变成两个距离等，这也是建模的常用方法。

二、商人过河问题

1. 问题

三名商人各带一个随从乘船过河，河中只有一只小船，小船只能容纳两人，由乘船者自己划船。随从们密约，在河的任何一岸，一旦随从的人数比商人多，就杀人越货，但是乘船渡河的大权掌握在商人们手中，商人们怎样才能安全渡河呢？

分析：这是一个智力游戏题，其中，商人明确知道随从的特性。该问题求解本不难，可以使用数学模型求解，目的是显示数学建模解决实际问题的规范性与广泛性。

显然这是一个构造性问题，虚拟的场景已经很明确简洁了，不需要再做假设，最多只做符号假设。

原问题为多阶段决策问题，使用向量的概念可较好地刻画各阶段的状态和变化。

2. 模型建立

令第 k 次渡河前此岸，商人数、随从数为 x_k，y_k，其中 $k=1,\ 2,\ \cdots$

定义状态向量：$s_k=(x_k,\ y_k)$

称 s_k 的安全条件下的取值范围为允许状态集 S。

$S=\{(x,\ y)\mid x=0,\ y=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ x=3,\ y=0,\ 1,\ 2,\ 3;\ x=y=1,\ 2\}$

定义一次渡船上的商人数和随从数为决策：$d_k = (u_k,\ v_k)$

称 d_k 的取值范围为允许决策集 D。

$D = \{(u,\ v) \mid u + v = 1,\ 2\}$

每次渡河产生状态改变，状态改变律为：

$s_{k+1} = s_k + (-1)^k d_k$

问题：求决策序列

$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_n$

使 $s_1 = (3,\ 3)$ 通过有限步 n 到达 $s_{n+1} = (0,\ 0)$。

3. 模型求解

模型是递推公式，非常适合计算机编程搜索。不过，在这里我们采用数学上的一种常用方法求解：图解法。

在平面直角坐标系中，用方格点代表状态 $s_k = (x_k,\ y_k)$，如图 1-2 所示。

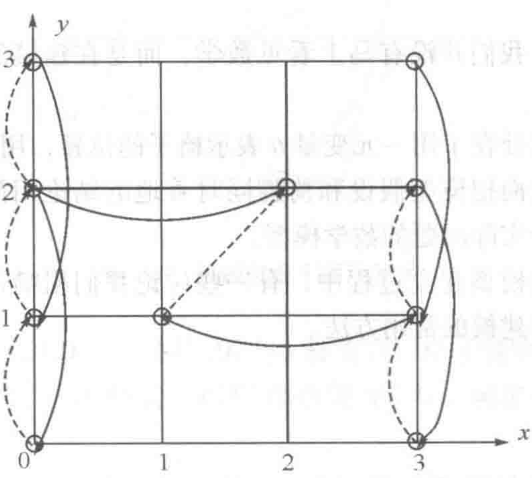

图 1-2　商人过河图解法示意图

其中：允许状态点用“○”表示。

决策：沿方格线在允许状态点之间移动 1~2 格。其中：当 k 为奇数时，决策为渡河，向左、下方移动；当 k 为偶数时，决策为渡河，向右、上方移动。要确定一种移动方式，使状态 $s_1 = (3,\ 3)$ 通过有限步 n 到达原点 $s_{n+1} = (0,\ 0)$。

图 1-2 给出了一种移动方案。这个结果很容易翻译成实际的渡河方案。

4. 评注

此问题的求解方法很典型，建立指标体系、变量符号化、确定变量关系、寻找求解方法。在解决实际问题特别是经济、社会问题使用定量分析方法时，常常使用这种方法进行数学建模。

本问题共有两个结果，读者可使用此方法寻找另一个结果。