学府考研
中国优秀高端教育品牌

理工社

2017考研数学

强化夺冠经典600题（数学二）

◎主编　张同斌　　◎策划　考研数学命题研究组

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Preface

前 言

数学二是全国硕士研究生入学统一考试工学类(数学要求较低)考生必考的课程,考试内容包括高等数学(占78%)、线性代数(占22%). 从试卷结构来看共23个题目,其中8个(单项)选择题[共4×8=32(分)]、6个填空题[共4×6=24(分)]、9个解答题(共94分),满分为150分. 解答题包括计算题、证明题和应用题等,属于主观题,占到了62.7%. 能否快速、准确地解答主观题,是考生取得优异成绩的基础与关键.

主观题主要考查考生在对基本概念、基本理论与基本方法理解与掌握的基础上综合分析、解决问题的能力. 从历年考试成绩的统计结果看,得分率一般. 基于此,作者编写了符合大纲要求、接近真题难度、体现命题规律的2017《考研数学强化夺冠经典600题(数学二)》,以期能够通过这些"好题"的训练解决主观题"得分率一般"的短板. 这本书与2017《考研数学基础通关经典1000题(数学二)》是姊妹篇,如果说2017《考研数学基础通关经典1000题(数学二)》对于夯实数学基础、提高客观题的解题能力有较大帮助的话,则这本2017《考研数学强化夺冠经典600题(数学二)》对提高综合分析、解决数学问题的能力起到了锦上添花的作用.

本书具有如下特色:

1. 将浩如烟海的数学题目通过513个题浓缩在有限的考点中,每个考点给出了题型变化,使考生从战略上能够把握数学的命题方向,从战术上掌握每个考点以不同形式命题时的应对方法,从而使考生从一个较高的角度俯瞰考研数学,把握考研数学全貌,对全面提高数学成绩起到引领作用.

2. 题目的"口味"与真题一致,难度达到或略高于真题,注重数学思维的培养,通过题目的训练,使考生能够在把握数学命题方向的基础上,提高解答题的速度与正确率.

3. 题目选取完全基于最新数学考试大纲并融入近年来的命题规律,有些题目是编者根据三十年的教学积累以及二十五年考研辅导班的经验有针对地性编制而成,具有较好的前瞻性与预测

性，这从 2016 年全国硕士研究生入学考题中已经得到验证．题目虽然是针对主观题设计，对主观题强化提高有较大的促进作用，同时对于进一步深化提高解答客观题的能力也有较大的帮助．

4. 每个题目都给出了详细的分析与解题过程，有的给出了一题多解，可提高考生的发散思维能力，同时使考生能够在此基础上选择适合自己的较简捷的解法，并且规范的解题过程也可对考生的考试答题起到示范作用．

本书适合数学二考生使用．书中收录了适量真题，对于真题，在题后以“年份[卷种]”的形式表示，如 121.（2013[1]）表示 121 题选自 2013 年数学一真题，218.（2014[2][3]）表示 218 题选自 2014 年数学二与数学三真题，以便于读者识别．

《考研数学强化夺冠经典 600 题（数学二）》与《考研数学强化夺冠经典 600 题（数学三）》《考研数学强化夺冠经典 600 题（数学一）》共同构成一个系列，从属于《学府考研张同斌数学系列丛书》．《考研数学强化夺冠经典 600 题（数学二）》内设题目实际为 513 题，原因在于数学二的考试内容相对较少较易，书名沿用“600 题”未作改变是为了方便读者认知和选择．如果您对此有意见或疑问，请及时与我们联系．您的意见就是我们前进的动力！

在本书的编写过程中，作者参考了国内外许多著作与教材，谨向有关作者表示衷心的感谢！

限于作者水平，书中疏漏与错误之处在所难免，恳请读者和同行批评指正．

编　者

2016 年 3 月

Contents

目 录

第一部分 精编解答题

高等数学

【考点 1】求函数极限．

【题型变化】(1)利用洛必达法则求未定式（“$\frac{0}{0}$”“$\frac{\infty}{\infty}$”“$\infty-\infty$”“$0\cdot\infty$”“1^∞”“0^0”“∞^0”）的极限．

(2)已知一个极限求与其相关的另一个极限．

(3)已知极限求参数．

(4)求分段函数在分段点的极限．

1. 设 $f(x)=e^x$，且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=xf[xu(x)]$，求 $\lim\limits_{x\to0}u(x)$．

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{\tan x-x}$．

3. (2016[2][3])求极限 $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$．

4. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x\ln(1-x^2)}$．

5. (2004[3])求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{\cos^2 x}{x^2}\right)$．

6. (2014[1][2][3])求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x\left[t^2\left(e^{\frac{1}{t}}-1\right)-t\right]\mathrm{d}t}{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$．

7. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-\cos x)[x-\ln(1+\sin x)]}{\tan^4 x}$．

8. 已知 $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{ax^2+bx+1}+2x)=3$，求常数 a,b．

9. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$．

10. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x^3}$．

11. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\cos x)^x-1}{x(e^{x^2}-1)}$．

12. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+ax^3)}{x-\arcsin x}, & x<0,\\ \dfrac{e^{ax}+x^2-ax-1}{1-\cos\dfrac{\sqrt{2}}{2}x}, & x>0,\end{cases}$ 问当 a 为何值时,极限 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

13. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{2}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}-\dfrac{\sin(x-1)}{|x-1|}\right]$.

14. (2005[3])求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1-e^{-x}}-\dfrac{1}{x}\right)$.

15. 设 $f(x)$ 是连续函数, $\lim\limits_{x\to 0}\left[1+\dfrac{f(x)}{2^x-1}\right]^{\frac{1}{\ln\cos 2x}}=8$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}$.

16. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x+f(x)}{x^3}=2$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

17. 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,dt}{x^3\int_0^1 f(xt)\,dt}$.

18. 求极限 $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+xe^{\frac{1}{x}})$.

19. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{(e^x-1)\sin^2 x}$.

20. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2\tan x}-\sqrt{1+2\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

21. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\sin x}{\ln(1+x\sin x)}}$.

22. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\dfrac{5+\cos x}{6}\right)^x-1}{x\arcsin x^2}$.

【考点 2】求数列极限.

【题型变化】(1)利用函数极限求数列极限.

(2)利用夹逼定理求数列极限(函数极限).

(3)利用单调增(减)有上界(下界)数列必收敛求数列极限.

23. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

24. 设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 的某一邻域内可导,且 $f(0)=1$, $f'(0)=-1$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n(e^{\frac{1}{n}}-1)\right]^{\frac{1}{1-f\left(\frac{1}{n}\right)}}$.

25. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1>0$, $x_{n+1}=\ln(1+x_n)(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_n}-\dfrac{1}{x_{n+1}}\right)$;

(Ⅲ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n}}$.

26. (Ⅰ)设$\{x_n\}$是单调递减数列,$\{y_n\}$是单调递增数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$.

证明:数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$都收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$;

(Ⅱ)证明:数列$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$收敛.

27. 设有数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$,其中$a_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{i}$,$b_n=\int_0^n\sqrt{x}\,\mathrm{d}x(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^{\frac{3}{2}}}$;

(Ⅱ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n-b_n}{\sqrt{n}}$存在,并求该极限.

28. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$.

29. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left(\cos\dfrac{1}{n}+2\cos\dfrac{2}{n}+\cdots+n\cos\dfrac{n}{n}\right)$.

30. (2013[2])设函数$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$.

(Ⅰ)求$f(x)$的最小值;

(Ⅱ)设数列$\{x_n\}$满足$\ln x_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}<1$. 证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,并求此极限.

31. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=\dfrac{1}{2}$,$x_{n+1}=x_n^2+x_n(n=1,2,\cdots)$.

(Ⅰ)证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}$存在,并求该极限;

(Ⅱ)计算$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{x_1+1}+\dfrac{1}{x_2+1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n+1}\right)$.

32. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=1$,$x_{n+1}=\dfrac{1+2x_n}{1+x_n}(n=1,2,\cdots)$. 证明:数列$\{x_n\}$收敛,并求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

33. (2014[2])设函数$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$,$x\in[0,1]$. 定义函数列:

$$f_1(x)=f(x),f_2(x)=f[f_1(x)],\cdots,f_n(x)=f[f_{n-1}(x)],\cdots,$$

记S_n是由曲线$y=f_n(x)$,直线$x=1$及x轴所围成平面图形的面积,求极限$\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

【考点3】 无穷小的比较.

【题型变化】(1)比较两个或三个无穷小的大小(主要考客观题).

(2)已知两个无穷小的比较,求参数.

34. (2006[2])试确定常数 A,B,C 的值,使得

$$e^x(1+Bx+Cx^2)=1+Ax+o(x^3),$$

其中 $o(x^3)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x^3 高阶的无穷小.

35. 已知函数 $F(x)=\dfrac{\int_0^x \ln(1+t^2)\mathrm{d}t}{x^\alpha}$,当 $x\to 0^+$ 时,$F(x)$ 是 $g(x)=1-e^x e^{2x} e^{3x}$ 的高阶无穷小,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=0$,试求 α 的取值范围.

36. 当 $x\to 0^+$ 时,$\alpha(x)=\sqrt{1+x\arctan x}-\sqrt{\cos x}$ 是比 x^k 低阶的无穷小,而 $\beta(x)=3\sin x-\sin 3x$ 是比 x^k 高阶的无穷小,试求 k 的取值范围.

37. 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}$,$g(x)=\int_0^{1-\cos x}\tan t\,\mathrm{d}t$ 和 $h(x)=\tan x-\sin x$ 都是无穷小量,试将它们从高阶到低阶进行排序.

38. 设 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$,当 $x\to 0$ 时 $f(x)-\tan x$ 是比 x^3 高阶的无穷小,求常数 a,b,c,d.

39. 设 $f(x)$ 是满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\ln(1+x^2)}=2$ 的连续函数,且当 $x\to 0$ 时,$\int_0^{\sin^2 x}f(t)\mathrm{d}t$ 是关于 x 的 n 阶无穷小,求 n.

40. 设 $f(x)$ 为连续函数,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\sin x}{x^3}=1$,$F(x)=\int_0^x tf(x-t)\mathrm{d}t$,当 $x\to 0$ 时,$F(x)-\dfrac{1}{2}x^2$ 与 ax^k 为等价无穷小,其中 a 为非零常数,k 为正整数.

(Ⅰ)求 a 与 k 的值及 $f(0)$;

(Ⅱ)证明:$f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导,并求 $f'(0)$.

【考点 4】 函数的连续性与间断点的类型及判断.

41. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin ax+2x}{e^x-1}, & x<0,\\ b, & x=0,\\ \dfrac{e^x-\sin x-1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{2}x^2\right)}, & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续,求常数 a,b.

42. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi x}+\dfrac{1}{\sin\pi x}-\dfrac{1}{\pi(1-x)}, & \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ a, & x=1,\\ \dfrac{e^{\frac{1}{\pi}(x-1)}-1}{x-1}, & x>1.\end{cases}$

（Ⅰ）当 a 满足什么条件时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的可去间断点？

（Ⅱ）当 a 为何值时，$f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$ 是连续函数．

43. 设函数 $f(x)=x^{\sin x}$，$x\in(0,1]$，对于其他 x，$f(x)$ 满足 $3f(x+1)-f(x)=k$，其中 k 为常数．

（Ⅰ）写出 $f(x)$ 在 $(-1,0]$ 上的表达式；

（Ⅱ）问 k 为何值时，$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续．

44. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^{2n-1}-ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数，求常数 a,b.

45. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\tan t}{\tan x}\right)^{\frac{x}{\tan t-\tan x}}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型．

46. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\dfrac{\ln|x+2|}{x^2+x-6}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型．

47. 设 $f(x)=\dfrac{x^3-4x}{\sin \pi x}$，求 $f(x)$ 的间断点并判断其类型.

48. 求常数 a，b，使得 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1-ax}-1}{x}, & x<0,\\ ax+b, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \arctan\dfrac{1}{x-1}, & x>1,\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是连续函数.

【考点 5】 闭区间上连续函数的性质．

【题型变化】（1）利用零点定理证明函数零点（方程根）的存在性．

（2）利用最值定理与介值定理（推论）证明存在一点 ξ，使得 $f(\xi)=C$.

49.（Ⅰ）证明：方程 $x^n+nx=2$ 存在唯一的正实根 a_n（其中 n 为正整数）；

（Ⅱ）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{-2n}$.

50. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，证明：在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{2[f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+nf(x_n)]}{n(n+1)}.$$

51. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$，证明：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=f\left(\xi+\dfrac{b-a}{2}\right)$.

【考点 6】 导数的概念．

【题型变化】（1）利用导数定义求某些函数在特殊点的导数．

（2）利用导数定义或左、右导数讨论分段函数在分段点的可导性．

(3)求隐函数、参数方程所确定的函数、积分上限函数对应曲线上某点处的切线与法线方程.

(4)已知一个极限,求函数在某点处的导数.

(5)已知函数在某点可导,求极限.

(6)曲线 $y=f(x)$ 与 $y=f'(x)$ 及 $y=f''(x)$ 之间的关系.

52. 设 $f(x)=(x^2-1)\arctan\sqrt{\dfrac{3-x}{x+1}}$,求 $f'(1)$.

53. 设 $f(x)=\tan x(\tan 2x-1)(\tan 3x-2)\cdots[\tan(n+1)x-n]$,求 $f'(0)$.

54. 设 $f(x)$在 $x=1$ 点处连续,且$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+x^{\sin x}+2}{x-1}=-3$. 证明:$f(x)$在 $x=1$ 处可导,并求 $f'(1)$.

55. 利用导数定义证明:$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$,其中 $u=u(x)$,$v=v(x)$是可导函数.

56. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2 e^{n(x-1)}+ax+b}{e^{n(x-1)}+1}$是区间$(-\infty,+\infty)$内的可导函数,试确定常数 a,b.

57. 设 $f(x)$是周期为 2 的周期函数,且在点 $x=1$ 处连续,$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[f(x)+3]}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}=2$,求曲线 $y=f(x)$在$(-1,f(-1))$点的切线方程.

58. 已知函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义,且对任意 x,y 都有 $f(x+y)=e^x f(y)+e^y f(x)$,$f'(0)=e$,求 $f(x)$的表达式.

59. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq0,\\ a, & x=0,\end{cases}$其中 $\varphi(x)$具有二阶导数,且 $\varphi(0)=1$,$\varphi'(0)=-1$.

(Ⅰ)确定常数 a 的值,使得 $f(x)$在点 $x=0$ 处连续;

(Ⅱ)求 $f'(x)$;

(Ⅲ)讨论 $f'(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$内的连续性.

60. 设函数 $F(x)=f(x)g(x)$,如果 $f(x)$在 x_0 点可导,$g(x)$在 x_0 点连续但不可导,证明:$F(x)$在 x_0 点可导$\Leftrightarrow f(x_0)=0$.

61. 设曲线 $y=f(x)$与曲线 $\tan\left(x+y+\dfrac{\pi}{4}-1\right)=e^y$ 在点(1,0)处有公共切线.

(Ⅰ)求公共切线方程;

(Ⅱ)计算极限$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

62. 设 $f(x)$是周期为 3 的连续函数,在点 $x=0$ 的某一邻域内恒有

$$f(1+\tan x)-2f(1-\tan x)=6x+\tan^2 x,$$

已知 $f(x)$在点 $x=1$ 处可导,求曲线 $y=f(x)$在点$(10,f(10))$处的切线方程.

63. 设函数 $f(x)$在 $x\leqslant x_0$ 时具有二阶导数,

$$F(x)=\begin{cases}f(x), & x\leqslant x_0,\\ a(x-x_0)^2+b(x-x_0)+c, & x>x_0,\end{cases}$$

试确定常数 a,b,c，使得 $F(x)$ 在点 x_0 处二阶可导．

64. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，当 $0\leqslant x<1$ 时，$f(x)=x(x^2-1)$，且 $f(x+1)=af(x)$，试确定常数 a 的值，使 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导，并求出此导数．

【考点 7】 各种类型函数的求导运算．

【题型变化】（1）求分段函数的导数．

（2）求初等函数的导数．

（3）求隐函数的一阶、二阶导数．

（4）求参数方程所确定的函数的导数．

（5）求幂指函数与连乘积形式函数的导数．

（6）求简单函数的高阶导数．

（7）求积分上限函数的导数．

65. 设 $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{2+3x^2}{3-\sin x}}$，求 $f''(0)$．

66. 设 $f(x)=e^{-\sin^2\frac{1}{x}}+x\sin[\tan(\cos^2 x)]$，求 $f'(x)$．

67. 设 $f(x)=(3x+\sin^3 x)^{\frac{1}{x}}$，求 dy．

68. 设 $y=x^2e^{-2x}$，求 $y^{(n)}(0)$．

69. 设 $y=\dfrac{1}{2x^2+x-3}$，求 $y^{(n)}$．

70. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x<0,\\ \sin x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$．

71. 已知 $y=f\left(\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)$，$f'(x)=\ln(1-x)$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$．

72. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1.\end{cases}$ $y=f[f(x)]$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=e}$．

73. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$，$F(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^1 f(xt)dt, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \ln(1+2t)dt, & x<0,\end{cases}$ 试讨论 $F(x)$ 在点 $x=0$ 处的可导性．

74. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)=\displaystyle\int_0^x tf(x-t)dt$，求 $F''(x)$．

75. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left[(t-1)\int_0^{t^2}\varphi(u)du\right]dt}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 为连续函数．

(Ⅰ)讨论 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的连续性与可导性;

(Ⅱ)求 $f'(x)$.

76. 设 $f(x)$ 为可导函数,且 $f(0)=0$,n 为正整数,$F(x)=\int_x^0 t^{2n-1}f(x^n-t^n)\mathrm{d}t$,求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x^{3n}}$.

77. 设函数 $f(t)=\lim\limits_{x\to 0}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{xt}$ $(t\neq 0)$.

(Ⅰ)求 $f^{(n)}(t)$;

(Ⅱ)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n)}(t)}{nf(t)}$.

78. 设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\sin x}$,$g(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \ln(1+x^2), & x>0,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))]\Big|_{x=0}$.

79. (2007[2])已知函数 $f(u)$ 具有二阶导数,且 $f'(0)=1$,函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-x\mathrm{e}^{y-1}=1$ 所确定,设 $z=f(\ln y-\sin x)$,求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

80. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$ 所确定.

(Ⅰ)求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的切线方程;

(Ⅱ)求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(1,0)$ 处的曲率.

81. 设 $y=y(x)$ 是由方程 $x^2-y+1=\mathrm{e}^y$ 所确定的隐函数,求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

82. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(xy)+\ln y-x=1$ 确定,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=0}$.

83. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^{xy}-x+y^3=0$ 确定,求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$,$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{x=0}$.

84. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x^2}t\mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^{\ln y}\mathrm{e}^t\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{x^2}$ 确定,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

85. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^y=y^x$ 确定,其中 $x>0,y>0$,且 $x-y\ln x\neq 0$,求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

86. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\int_0^{t^2}\ln(1+u)\mathrm{d}u,\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定,其中 $y(t)$ 是初值问题 $\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-4t\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}=0,\\ x\big|_{t=0}=0\end{cases}$ 的解,求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

87. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t} e^{-u^2}\,du, \\ y=(2-t^2)e^{-(1-t)^2} \end{cases}$ 所确定，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$.

88. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\int_0^{x+y} e^{-t^2}\,dt=\int_0^x xe^t\,dt$ 所确定，求 $dy|_{x=0}$，$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

89. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x=\arctan t, \\ y=\ln\sqrt{1+t^2} \end{cases}$ 确定.

(Ⅰ)求曲线 $y=y(x)$ 上点 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{1}{2}\ln 2\right)$ 处的法线方程；

(Ⅱ)求 $\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{t=1}$.

90. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases} 2x-tx^2+e^t=5, \\ y=\arctan t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

91. 将微分方程 $\dfrac{d^2x}{dy^2}+(4y+e^{2x})\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^3=0$ 中的 y 看成函数，而 x 看成自变量，试变换该方程，并求变换后微分方程的通解.

92. 试用变换 $x=\cos t$ 将微分方程 $(1-x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2}-x\dfrac{dy}{dx}=0$ 化为以 t 为自变量的方程，并解方程.

【考点 8】与微分中值定理相关的问题.

【题型变化】(1)与微分中值定值相关的极限计算问题.

(2)利用罗尔定理证明 $f'(\xi)=0$ 或 $f''(\xi)=0$.

(3)利用拉格朗日中值定理、柯西中值定理以及泰勒中值定理证明与 ξ 相关的等式或不等式.

(4)关于两个中值 ξ,η 相关的证明问题.

93. 设 ξ 是函数 $f(x)=\arcsin x$ 在 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上满足拉格朗日中值定理的中值，其中 $\xi=\theta x(0<\theta<1)$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\theta^2$.

94. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\dfrac{e}{n}-\arctan\dfrac{e}{n+1}\right)$.

95. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=f(1)$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$|f''(x)|\leqslant M$（M 为大于零的常数）. 证明：对任意 $x\in(0,1)$，$|f'(x)|\leqslant\dfrac{1}{2}M$.

96. 设函数 $f(x)$ 的一阶泰勒公式为

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2(0<\theta<1),$$

如果 $f(x)$ 具有三阶连续导数，且 $f'''(a)\neq 0$. 证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{3}$.

97. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,5]$ 上连续，在 $(0,5)$ 内二阶可导，且 $3f(0)=\int_0^3 f(x)\mathrm{d}x=f(3)+f(4)+f(5)$.

(Ⅰ)证明：存在 $\eta\in(0,3)$，使得 $f(\eta)=f(0)$；

(Ⅱ)证明：存在 $\xi\in(0,5)$，使得 $f''(\xi)=0$.

98. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)f(b)>0$，$f(a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. 证明：对任意常数 k，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=kf(\xi)$.

99. 设 $0<a<b$，函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,a+b]$ 上连续，在 $(a,a+b)$ 内可导，且 $f(a)=b$，$f(b)=a$，$f(a+b)=a+b$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(a,a+b)$，使得 $f'(\xi)+g'(\xi)[f(\xi)-\xi]=1$.

100. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，如果 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M>0$，证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=M$.

101. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)$，常数 $a>0$，$b>0$. 证明：存在满足条件 $0<\xi<\eta<1$ 的 ξ,η，使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=0$.

102. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导 $(0<a<b)$. 证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=\dfrac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$.

103. (2013[1][2])设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)=1$. 证明：

(Ⅰ)存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$；

(Ⅱ)存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

104. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(0)=-1$，$f(1)=-2$，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. 证明：在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $f'''(\xi)=-24$.

105. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，在 $(0,a)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(a)=1$. 证明：对任意正常数 m,n，存在 $\xi,\eta\in(0,a)$，使得 $\dfrac{m}{f'(\xi)}+\dfrac{n}{f'(\eta)}=(m+n)a$.

106. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，对任意常数 $k>1$，有 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}} x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$. 证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

107. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 内可导，当 $x>a$ 时，$f'(x)>k>0$(k 为常数)，如果 $f(a)<0$，则方程 $f(x)=0$ 在 $\left[a,a-\dfrac{f(a)}{k}\right]$ 内有且仅有一个实根.

108. 设 $f'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，在 $(0,\pi)$ 内 $f''(x)$ 存在. 证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $2f'(\xi)\cos\xi+\sin\xi f''(\xi)=0$.

【考点 9】 不等式的证明.

【题型变化】 (1)利用拉格朗日中值定理证明不等式.

(2)利用函数的单调性证明不等式.

(3)通过求函数的最值证明不等式.

(4)利用泰勒公式证明不等式.

(5)利用曲线凹凸性的定义证明不等式.

109. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内二阶可导,如果在(a,b)内 $f''(x)<0$,证明:对任意 $x_1\neq x_2,x_1,x_2\in[a,b]$,有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

110. (2002[2])设 $0<a<b$,证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}.$$

111. (2012[1][2][3])证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$.

112. 证明:当 $0<x<1$ 时,$\frac{1-x}{1+x}<\mathrm{e}^{-2x}$.

113. 证明:当 $0<x<1$ 时,$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}<\frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}<1$.

114. 证明:当 $0<x<\frac{\pi}{2}$时,$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x}$.

115. 设 $0<\alpha<\beta$,证明:当 $x>0,y>0$ 时,$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$.

116. 设函数 $f(x)$在$[0,a](a>0)$上可导,且 $f(0)=0,0<f'(x)<1$. 证明:

$$\left[\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right]^2\geqslant\int_0^a f^3(x)\mathrm{d}x.$$

117. 设 $p>1,q>1$,且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 证明:对任意 $x>0$,有$\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{q}\geqslant x$.

118. 设函数 $f(x)$在(a,b)内恒有 $f''(x)<0(ab<0)$,$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-\sin x}{x}=k$(其中 k 为任意非零常数). 证明:在(a,b)内,恒有 $f(x)\leqslant(k+1)x$.

119. 设函数 $f(x)$在$(0,+\infty)$内连续,且 $f(0)=0,f''(x)<0$. 证明:

(Ⅰ)对于任意 $x\in(0,+\infty)$及 $x_0\in(0,+\infty)$,有 $f(x)\leqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$;

(Ⅱ)对于 $x_i\in(0,+\infty)$及任意 $0<k_i<1(i=1,2,\cdots,n)$恒有:

$$f(k_1x_1+k_2x_2+\cdots+k_nx_n)\geqslant k_1f(x_1)+k_2f(x_2)+\cdots+k_nf(x_n),$$

其中,$k_1+k_2+\cdots+k_n=1$.

【考点 10】 函数的零点或方程根的个数.

120. 讨论曲线 $y=\ln x$ 与 $y=ax+b$(其中 $a>0$)交点的个数.

121. 证明:方程 $\ln x=\frac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$内只有两个不同的实根.

122. 试就参数 a 的不同取值讨论方程 $\mathrm{e}^x=ax^2$ 的根的个数.

123. (2011[3])证明方程 $4\arctan x-x+\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}=0$ 恰有两个实根.

【考点 11】 函数的性态、函数的极值与最值.

【题型变化】(1)求函数 $y=f(x)$ 或二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数 $y=y(x)$ 的单调区间与极值.

(2)求函数曲线 $y=f(x)$ 或二元方程 $F(x,y)=0$ 所确定的一元隐函数 $y=y(x)$ 的凹凸区间与拐点.

(3)确定由参数方程确定的函数的性态.

(4)描绘函数 $y=f(x)$ 的图形(单调区间与极值、凹凸区间与拐点、渐近线).

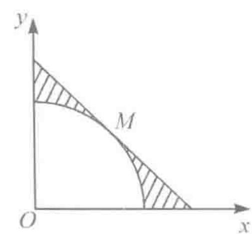
(5)求闭区间上连续函数的最值.

(6)实际问题的最值问题.

124. (2010[1][2])求函数 $f(x)=\int_1^{x^2}(x^2-t)e^{-t^2}dt$ 的单调区间与极值.

125. 设函数 $f(x)$ 满足方程 $3f(x)+4x^2f\left(-\frac{1}{x}\right)+\frac{7}{x}=0$,求 $f(x)$ 的极值.

126. 设曲线 l 是 $y=6-2x^2$ 在第一象限内的部分,在 l 上求一点 M(如图所示),使过点 M 的曲线 l 的切线与两坐标轴和 l 所围成的图形面积最小.



126 题图

127. 设 $f(x)=-2a+\int_0^x(t^2-a^2)dt\,(a>0)$.

(Ⅰ)将 $f(x)$ 的极大值 M 用 a 表示出来;

(Ⅱ)当 a 取何值时,M 取得极小值并求其最小值.

128. 设 $a>1$,函数 $f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内驻点为 $t(a)$,问当 a 为何值时,$t(a)$ 最小.

129. 已知一个长方体的长 x 以 2 cm/s 的速率增加,宽 y 以 3 cm/s 的速率增加,高 z 以 6 cm/s 的速率增加,当 $x=2$ cm,$y=3$ cm,$z=6$ cm 时,求长方体的对角线增加的速率.

130. (2014[1])设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定,求 $f(x)$ 的极值.

131. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x^2-y+1=e^y$ 确定,试判断曲线 $y=y(x)$ 在函数 $y=y(x)$ 的驻点对应的曲线上的点附近的凹凸性.

132. 设函数 $f(x)=nx(1-x)^n$,$x\in[0,1]$,$n\in N$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值 $M(n)$;

(Ⅱ)求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)$.

133. 设 $\varphi(x)$ 为连续的正偶函数,$f(x)=\int_{-a}^{a}|x-t|\varphi(t)dt$,$x\in[-a,a]$.

(Ⅰ)证明:曲线 $y=f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上是凹的;

(Ⅱ)求 $f(x)$ 的最小值;

(Ⅲ)如果 $f(x)$ 的最小值为 $\varphi(a)-a^2-1$，求 $\varphi(x)$.

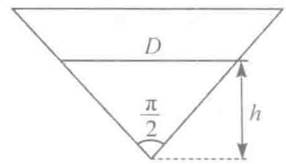
134. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(4-t)e^{-t}dt$.

(Ⅰ)求 $f(x)$ 的单调区间与极值；

(Ⅱ)求 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值与最小值.

135. (2011[2])设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}t^3+t+\dfrac{1}{3},\\ y=\dfrac{1}{3}t^3-t+\dfrac{1}{3}\end{cases}$ 确定，求 $y=y(x)$ 的极值和曲线 $y=y(x)$ 的凹凸区间及拐点.

136. 顶角为 $\dfrac{\pi}{2}$ 的正圆锥形容器(如图所示)内盛有 b cm^3 水，从开始($t=0$)到 t 秒时灌入容器中的水为 at^2cm^3(a,b 均为正常数)，问何时水平面上升速率最快?



136 题图

【考点 12】不定积分的计算.

【题型变化】(1)不定积分的计算.

(2)分段函数的不定积分.

(3)函数记号的灵活表示与不定积分计算结合的综合问题.

137. 计算不定积分 $\int\dfrac{xe^{-x}}{(1-x)^2}dx$.

138. 计算不定积分 $\int\dfrac{1}{x\ln x(\ln^2 x+1)}dx$.

139. 计算不定积分 $\int\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$.

140. 计算不定积分 $\int\dfrac{\ln^3 x}{x^3}dx$.

141. 计算不定积分 $\int\dfrac{x\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}dx$.

142. 计算不定积分 $\int\dfrac{\arctan x}{x^2(1+x^2)}dx$.

143. 计算不定积分 $\int\dfrac{\arctan x}{x^3}dx$.

144. 计算不定积分 $\int e^x\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$.

145. 计算不定积分 $\int\dfrac{1}{x^5(1+x^2)}dx$.

146. 计算不定积分 $\int\dfrac{x+\sin x}{1+\cos 2x}dx$.