

轧机振动

的

分析理论与方法



张德臣 孙艳平 杨 铭 韩二中 编著



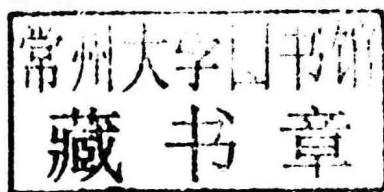
冶金工业出版社

www.cnmp.com.cn

辽宁科技大学学术著作出版基金资助

轧机振动的 分析理论与方法

张德臣 孙艳平 杨 铭 韩二中 编著



北 京
冶金工业出版社
2016

内 容 简 介

本书共分为7章,详细地介绍了机械阻抗的基本概念,对单自由度振动系统和多自由度振动系统进行了导纳分析,阐述了复模态理论,分别对2130mm、1450mm和5500mm轧机振动进行了分析、计算。通过对具体轧机设备振动问题的研究,阐述了轧机振动原理和研究方法,对于分析和研究各类机械的振动有一定的参考价值。

本书可作为高等院校机械专业研究生的教材,也可供机械设计与制造、轧钢机械设计和操作人员以及有关专业师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

轧机振动的分析理论与方法/张德臣等编著. —北京:冶金工业出版社, 2016. 12

ISBN 978-7-5024-7449-2

I. ①轧… II. ①张… III. ①轧机—振动分析 IV. ①TG333

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第312376号

出 版 人 谭学余

地 址 北京市东城区嵩祝院北巷39号 邮编 100009 电话 (010)64027926

网 址 www.cnmp. com. cn 电子信箱 yjcbbs@cnmp. com. cn

责任编辑 曾 媛 谢冠伦 美术编辑 杨 帆 版式设计 杨 帆

责任校对 卿文春 责任印制 李玉山

ISBN 978-7-5024-7449-2

冶金工业出版社出版发行;各地新华书店经销;固安华明印业有限公司印刷

2016年12月第1版,2016年12月第1次印刷

169mm×239mm;10.5印张;202千字;156页

49.00元

冶金工业出版社 投稿电话 (010)64027932 投稿信箱 tougao@cnmp. com. cn

冶金工业出版社营销中心 电话 (010)64044283 传真 (010)64027893

冶金书店 地址 北京市东四西大街46号(100010) 电话 (010)65289081(兼传真)

冶金工业出版社天猫旗舰店 yjgycbs. tmall. com

(本书如有印装质量问题,本社营销中心负责退换)

前 言

本书针对轧钢生产中普遍存在的问题,分别采用解析法和有限元法对轧机振动进行了模态分析和力学特性分析。

本书共分7章,第1章论述了机械阻抗的基本概念,用复指数表示简谐振动,分析了机电相似问题,在简谐激励作用下定义了机械阻抗,分析了力—电流相似。

第2章进行了单自由度振动系统导纳分析,进行了位移导纳特性分析,从导纳(阻抗)曲线识别系统的固有动态特性,近似勾画导纳曲线。

第3章进行了多自由度振动系统导纳分析,分析了阻抗矩阵和导纳矩阵,接地约束系统的原点和跨点导纳特性,以及自由—自由系统的导纳特性,介绍了导纳函数的实模态展开式。

第4章分析了单自由度和多自由度系统传递函数的复模态展开式,采用状态向量法求解黏性阻尼系统。

第5章运用有限元法对2130mm轧机机架进行动力学特性分析,找出典型模态的固有频率和主振型,并对其进行分析。然后采用解析法对典型模态的固有频率进行计算,并与有限元法的结果进行比较,既验证了有限元法的正确性,又为估算结构的固有频率提供简便而实用的计算方法。

第6章通过建立1450mm轧机机架、轧辊和轧机机座系统有限元模型,对轧机进行动力学分析,得出其相应的固有频率和振型,并分析轧机机座结构参数不同的情况下对轧机振动固有特性的影响,对轧机结构的设计、动力学分析及其抑制方法的理论发展与完善具有重要的理论意义,同时对轧钢企业实践具体的轧制生产过程也具有指导和借

鉴意义。

第7章建立5500mm轧机机架简化模型,在有限元分析软件ANSYS中对简化后的机架模型进行参数化建模,以ANSYS中计算出的机架纵向最大位移为约束条件,对轧机机架的主要结构参数进行优化设计,并通过计算确定机架的几何尺寸。在有限元模型的基础上,运用ANSYS对5500mm轧机机架固有频率的变化,找出对轧制精度影响比较大的固有频率和振型,并对各阶振型加以描述。对5500mm宽厚板轧机机架进行了有限元分析和优化设计,为轧机机架的设计、改造和维护等提供一定的参考资料和理论依据。

辽宁科技大学机械学院张德臣、孙艳平、杨铭和东北大学韩二中为本书的出版做了大量的工作,张德臣教授全面指导本书的编写工作。本书编写分工如下:第1章由孙艳平撰写,第2、3章由杨铭撰写,第4~7章由张德臣撰写;东北大学韩二中教授对本书的编写给予指导,为本书的顺利出版奠定了基础。本书主要面向工科研究生及科研人员,故在写作过程中尽量保证基础理论完整性,避免复杂公式的推导,力求简单、精练、易懂。

感谢辽宁科技大学校领导、研究生院领导和机械学院领导的鼓励和支持,感谢辽宁科技大学学术著作出版基金资助。感谢辽宁科技大学硕士研究生李久慧、曹忠祥、罗莹艳、姚兴磊、李鑫、董喜荣、黄振、樊勇、董超文、孙传涛、王艳天、张科丙为本书内容的研究所做的工作。特别感谢硕士研究生王艳天对本书成稿的校对、打印工作所给予的帮助和贡献。

由于作者水平所限,不足之处在所难免,衷心希望读者批评指正。

作 者

2016年5月

目 录

1 机械阻抗的概念	1
1.1 简谐振动的复指数表示	1
1.1.1 旋转矢量表示法	1
1.1.2 复数表示法	2
1.1.3 单位旋转因子	3
1.2 机电相似	4
1.2.1 串联谐振电路	4
1.2.2 力—电压相似	5
1.3 简谐激励作用下机械阻抗的定义	7
1.3.1 机械阻抗	7
1.3.2 机械导纳 (Mechanical Mobility)	9
1.3.3 原点阻抗 (导纳) 和传递阻抗 (导纳)	10
1.4 力—电流相似	11
1.4.1 问题的提出	11
1.4.2 机械系统中元件的阻抗和导纳	13
1.4.3 根据力—电流相似画机械网络	15
2 单自由度振动系统导纳分析	21
2.1 位移导纳特性分析	21
2.1.1 幅频和相频特性	21
2.1.2 实频和虚频特性	24
2.1.3 矢端图	25
2.2 从导纳 (阻抗) 曲线识别系统的固有动态特性	26
2.2.1 识别固有频率 ω_n 和共振频率 ω_R	27

2.2.2 识别阻尼比 ξ (阻尼系数 c)	29
2.3 近似勾画导纳曲线	32
2.3.1 元件的导纳特性曲线	32
2.3.2 骨架线法 (Skeleton)	36
3 多自由度振动系统导纳分析	41
3.1 阻抗矩阵和导纳矩阵	41
3.1.1 阻抗矩阵和导纳矩阵	41
3.1.2 阻抗矩阵、导纳矩阵中元素的物理解释	43
3.1.3 跨点导纳 (阻抗) 的互易定理	44
3.2 接地约束系统的原点、跨点导纳特性	44
3.2.1 共振频率及反共振频率	45
3.2.2 共振、反共振频率出现的次序	46
3.2.3 接地约束系统原点导纳特征的骨架线	47
3.2.4 速度导纳的骨架线	49
3.2.5 跨点导纳特性及其骨架线	49
3.3 自由—自由系统的导纳特性	51
3.3.1 原点导纳特性	51
3.3.2 骨架线	52
3.3.3 骨架线的用途	53
3.3.4 骨架线法的推广	55
3.4 导纳函数的实模态展开式	56
3.4.1 无阻尼振动系统的固有频率及振型	56
3.4.2 主振型的正交性	57
3.4.3 有阻尼系统导纳函数的实模态展开式	58
4 复模态理论	61
4.1 单自由度系统传递函数的复模态展开式	61
4.1.1 特征方程有共轭复根	61
4.1.2 传递函数 $H(s)$ 的有理部分分式展开式	62

4.1.3 留数的意义	63
4.2 多自由度系统传递函数的复模态展开式	63
4.2.1 传递函数按极点展开式	63
4.2.2 留数与复振型的关系	65
4.3 复模态分析及其应用	69
4.3.1 复特征值问题	69
4.3.2 关于复模态与实模态的讨论	72
4.4 状态向量法求解黏性阻尼系统	73
4.4.1 状态向量的微分方程及阻尼衰减振动	73
4.4.2 复振型对系数矩阵 $[A]$ 、 $[B]$ 的正交性	74
4.4.3 阻尼系统的强迫振动响应	75
5 2130mm 轧机振动分析	77
5.1 有限元法简介	77
5.2 振动分析的有限元理论	78
5.2.1 结构离散化	79
5.2.2 单元分析	79
5.2.3 整体分析	80
5.2.4 引入边界条件、求解方程	80
5.3 ANSYS 10.0 简介	81
5.3.1 简介	81
5.3.2 ANSYS 软件的功能	82
5.3.3 ANSYS 有限元分析的三个阶段	82
5.4 机架的模态分析	83
5.4.1 2130mm 冷连轧机介绍	83
5.4.2 建立模型	84
5.4.3 网格划分、施加边界条件及求解	85
5.4.4 扩展模态及观察结果	85
5.4.5 机架各阶典型模态结果分析	87
5.5 利用解析法对机架进行动力学分析	88

5.5.1	等效质量法求解机架固有频率	89
5.5.2	能量法求解机架（反对称振型）固有频率	90
5.5.3	能量法求解机架（对称振型）固有频率	93
5.5.4	能量法求解机架第4阶模态固有频率	96
5.5.5	等效质量法求解机架（垂振）固有频率	97
5.6	结构尺寸对垂直振动固有频率的影响	99
5.6.1	上横梁高度对垂振固有频率的影响	99
5.6.2	立柱断面尺寸对垂振固有频率的影响	99
5.6.3	机架垂振频率及重量曲线分析	100
6	1450mm 轧机振动分析	102
6.1	轧机机架的动力学分析	102
6.1.1	机架有限元模态分析	102
6.1.2	利用解析法求解典型振型固有频率	104
6.1.3	结构参数对垂直振动的影响分析	108
6.2	轧辊的动力学分析	110
6.2.1	轧辊的有限元分析	110
6.2.2	轧辊结构参数对固有频率的影响	117
6.3	轧机机组系统的有限元分析	119
7	5500mm 轧机振动分析	123
7.1	机架强度和刚度的有限元分析	123
7.1.1	机架有限元模型的建立及网格划分	123
7.1.2	机架的约束情况和载荷施加	124
7.1.3	机架的应力分析	127
7.1.4	机架的刚度分析	129
7.1.5	小结	132
7.2	5500mm 轧机机架的优化设计	132
7.2.1	优化设计基本原理	132
7.2.2	优化设计步骤	133

7.2.3 优化变量的确定	134
7.2.4 机架简化模型的分析及边界约束	135
7.2.5 优化结果	136
7.2.6 优化结果分析	137
7.2.7 小结	140
7.3 5500mm 轧机机架的模态分析	141
7.3.1 结构动力学分析简介	141
7.3.2 模态分析的基本概念	142
7.3.3 使用 ANSYS 模态分析的过程	142
7.3.4 机架有限元模型	143
7.3.5 机架各阶模态分析结果	143
参考文献	155

1 机械阻抗的概念

机械阻抗方法是根据机械振动系统和正弦交流电路之间具有相似关系,把研究电路的一些方法移置到机械振动系统中而逐渐形成的。它们的运动用类似的常微分方程描述。随着自动控制理论的发展,机械振动系统中的机械阻抗概念又扩大而成为传递函数,更加抽象。为了使读者了解机械阻抗概念的物理意义以及方法的发展过程,专门设置本章。同时,本章还介绍一些机—电相似的知识,对于研究机电相互转换理论,对设计研究这种系统也是有重要作用的。

线性机械振动系统,在简谐激振作用下,其振动响应是简谐的,响应的频率和激振的频率相同,响应的振幅和相位和系统的参数有关。在机械阻抗方法中,简谐函数用复数、复指数的形式表示,使公式推导简捷,概念清楚。

1.1 简谐振动的复指数表示

1.1.1 旋转矢量表示法

$$y = A \sin(\omega t + \alpha) \quad (1-1)$$

式(1-1)表示沿 y 轴方向在 origin 附近的 m 点的运动。式中, A 为振幅; ω 为圆频率(rad/s); α 为初相位弧度数; $\omega t + \alpha$ 为对应任意时刻 t 的相位弧度数。利用半径为 A 、初相位为 α 、角速度为 ω 做匀速圆周运动的 P 点的运动,可以说明 m 点做简谐运动时的概念。显然 P 点在 y 轴上投影点的运动,就是 m 沿 y 轴的运动,如图1-1(a)所示。这时 ω 相当于匀角速度。

$$\text{每秒振动(匀速转动)的次数: } f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{Hz})$$

$$\text{振动周期: } T = \frac{1}{f} \quad (\text{s})$$

简谐运动的速度和加速度,通过对式(1-1)求时间 t 的导数,得

$$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) = A\omega \sin(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}) \quad (1-2)$$

$$\ddot{y} = \frac{d^2y}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) = A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha + \pi) \quad (1-3)$$

P 点的运动也可用幅值为 A 、初始相位为 α 、任意相位角为 $\omega t + \alpha$ 的旋转矢量端点 P 的运动表示。同样, P 点的速度和加速度可以用旋转矢量 $A\omega$ 、 $A\omega^2$ 表

示, 它们与矢量 A 的固有相位差为 $\pi/2$ 和 π 。于是式 (1-1) ~ 式 (1-3) 表示的 m 点的位移、速度和加速度可以看成三个以 ω 逆时针旋转的矢量在 y 轴的投影, 如图 1-1 (b) 所示。

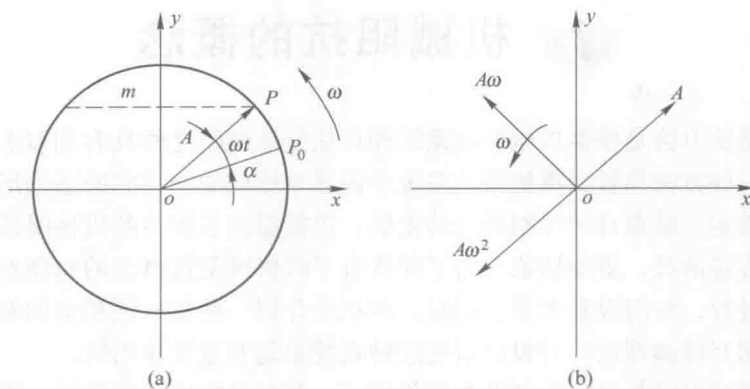


图 1-1 旋转矢量示意图

1.1.2 复数表示法

平面上的矢量可以用复数表示 (图 1-2)。取水平轴为实数轴, 取铅垂轴为虚数轴, 则复数:

$$z = x + iy \quad (1-4)$$

代表复数平面上一个点 A 的位置。 $i = \sqrt{-1}$ 是虚数单位, 有时也用 j 表示。 x 与 y 分别为实部、虚部, 且均为实数, iy 是纯虚数。

平面上点 A 的位置, 用矢量 OA 表示, 矢量 OA 的模, 等于复数的模 $|z|$, 矢量的位置用幅角 φ 表示, 取逆时针为正。复数的模及幅角与复数的实部 x 和虚部 y 之间的关系为:

$$|OA| = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$x = |z| \cos \varphi, \quad y = |z| \sin \varphi \quad (1-5)$$

复数也可以用模及幅角来表示, 即

$$z = |z| \angle \varphi \quad (1-6)$$

由欧拉公式

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (1-7)$$

$$\text{则} \quad z = |z| e^{i\varphi} = |z| \cos \varphi + i |z| \sin \varphi \quad (1-8)$$

用复指数表示简谐振动:

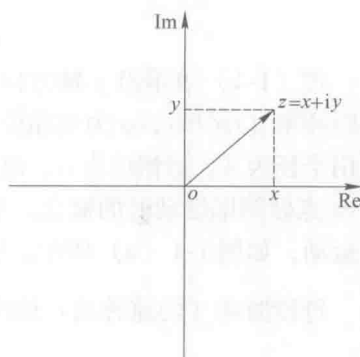


图 1-2 复数矢量示意图

复数的幅值等于振幅, 复数的幅角等于相角, 则有

$$|z| = A, \quad \varphi = \omega t + \alpha \quad (1-9)$$

于是 $z = x + iy = A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha)$

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = A\sin(\omega t + \alpha) = \operatorname{Im}(z) \quad (1-10)$$

复数的实部和虚部均为简谐振动。式 (1-1) 表示的简谐振动是复数的虚部。
由欧拉公式

$$\begin{aligned} z &= Ae^{i(\omega t + \alpha)} \\ &= Ae^{i\omega t} \cdot e^{i\alpha} \\ &= (Ae^{i\alpha}) \cdot e^{i\omega t} \\ &= \tilde{A}e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (1-11)$$

其中 $\tilde{A} = Ae^{i\alpha}$, $\tilde{A}$ 既表示旋转矢量的幅值, 又表示它的相位差, 称为复数振幅。这种表示法在研究若干个同频率振动的旋转矢量间的关系时, 比较方便。

1.1.3 单位旋转因子

根据复数乘法定理, 矢量在复平面内的转动, 可以看成与单位旋转因子的乘积。

定义: 模等于单位 1, 幅角等于 φ 的复数, 称为单位旋转因子。记为 $e^{i\varphi} = 1 \angle \varphi$ 。

任意复数与单位旋转因子的乘积, 等于将原来的复数逆时针旋转 φ 角度。如 $A = |a|e^{i\varphi_a}$ 与单位旋转因子 $e^{i\varphi}$ 之积:

$$A \cdot e^{i\varphi} = |a|e^{i\varphi_a} \cdot e^{i\varphi} = |a|e^{i(\varphi_a + \varphi)}$$

当 φ 为特殊角度 $\varphi = \pi/2$ 、 $-\pi/2$ 、 π 时, 由欧拉公式 (1-7) 得

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$e^{i(-\frac{\pi}{2})} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 \quad (1-12)$$

式中, i 为逆时针旋转 $\pi/2$ 的旋转因子; $-i$ 为顺时针旋转 $\pi/2$ 的旋转因子; -1 为逆 (顺) 时针旋转 π 的旋转因子。

又 $\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = -i$, 相当于顺时针转 $\pi/2$ 的旋转因子。

简谐振动的位移、速度和加速度旋转矢量之间的关系为：

$$z = Ae^{i(\omega t + \alpha)} \quad (1-13)$$

$$\dot{z} = iA\omega e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (1-14)$$

$$\ddot{z} = -A\omega^2 e^{i(\omega t + \alpha)} \quad (1-15)$$

$\dot{z}$ 比 z 超前 $\pi/2$, $\ddot{z}$ 比 z 超前 π 。

位移、速度和加速度旋转矢量之间的关系, 如图 1-3 所示。

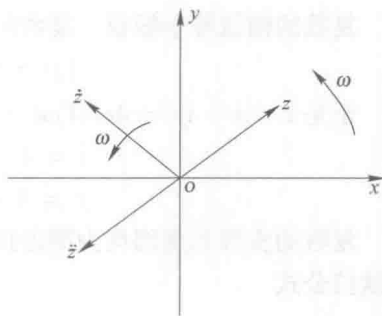


图 1-3 用旋转矢量表示的位移、速度、加速度示意图

1.2 机电相似

1.2.1 串联谐振电路

串联谐振电路由已知的电阻 R 、电感 L 和电容 C 组成, 如图 1-4 所示。两端有简谐激励电压 $u = |u_m| \sin(\omega t + \varphi_u)$ 的作用, 试求回路中的稳态回路电流和回路阻抗。

由于线性系统稳态响应的频率和激励频率相同, 回路稳态电流为

$$i = |I_m| \sin(\omega t + \varphi_i) \quad (1-16)$$

根据基尔霍夫电压定律: 电路的任一闭合回路中, 在每一瞬时各元件上电压差的代数和为零, 即

$$\sum u_i = 0 \quad (1-17)$$

$$u = u_R + u_L + u_C$$

式中, u_R , u_L , u_C 分别为电阻、电感和电容两端的电位差, 下面分别求出这些值。把电压、电流及其导数和积分的简缩量用复指数表示:

$$u = |u_m| e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} \quad (1-18)$$

$$i = |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-19)$$

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= |I_m| \omega \sin\left(\omega t + \varphi_i + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= |I_m| \omega e^{j(\varphi_i + \frac{\pi}{2})} e^{j\omega t} \\ &= j |I_m| \omega e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1-20)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t i dt &= \int_0^t |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{j\omega} |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \end{aligned} \quad (1-21)$$

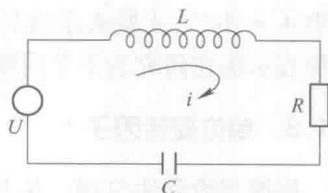


图 1-4 串联谐振电路图

在电阻、电感和电容两端的电位差分别为：

$$u_R = R \cdot i = R |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-22)$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} = j\omega L |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-23)$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{j\omega C} |I_m| e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} \quad (1-24)$$

u_R 与电流同相位, u_L 超前电流 90° , u_C 则落后电流 90° 。代入式 (1-17) 中, 两端消去 $e^{j\omega t}$ 得:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u \quad (1-25)$$

$$\left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] |I_m| e^{j\varphi_i} = |u_m| e^{j\varphi_u} \quad (1-26)$$

$$Z(\omega) = \left[R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \right] = \frac{|u_m| e^{j\varphi_u}}{|I_m| e^{j\varphi_i}} = \frac{\tilde{u}}{\tilde{i}} \quad (1-27)$$

称 $Z(\omega)$ 为复阻抗。当回路参数已知时, 是 ω 的函数。 $\tilde{u} = u_m < \varphi_u$, $\tilde{i} = I_m < \varphi_i$ 为激励电压及响应电流的复振幅。即复阻抗 Z 为电路端电压的复振幅与电路中电流复振幅之比。简言之, 为输入电压 (复量) 与输出电流 (复量) 之比。电流可表示为

$$|I_m| \angle \varphi_i = \frac{|u_m| \angle \varphi_u}{|Z_m| \angle \varphi_z} \quad (1-28)$$

复阻抗可以写成模及幅角的形式:

$$|Z_m| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (1-29)$$

$$\varphi_z = \tan^{-1} \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad (1-30)$$

用矢量图表示这些量之间的关系, 如图 1-5 所示, 图中表示元件的阻抗:

Z_R ——电阻的阻抗与电流同相, 数值等于 R ;

X_L ——电感的阻抗比电流超前 90° , 数值等于 ωL , 记为 $j\omega L$;

X_C ——电容的阻抗比电流落后 90° , 其数值等于 $1/(\omega C)$, 记为 $1/(j\omega C)$ 或 $-j/(\omega C)$ 。

1.2.2 力—电压相似

力—电压相似是机—电间的第一类相似, 是直接相似, 是以机械阻抗与电路阻抗间的模拟建立起的相似关系。

两个本质不同的物理系统, 能用同一个方程描述时, 表明这两个系统是相似

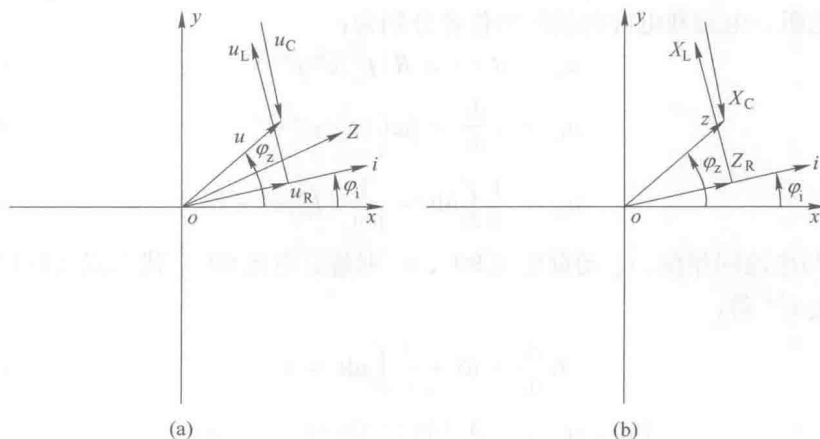


图 1-5 回路中各元件中的电压降 (a) 和阻抗 (b) 的矢量关系图

系统。利用相似关系，非电系统可以化为相似的电路系统研究，这样有不少优点：将复杂的系统化为便于分析的电路图，用电路中已有的理论，如网络理论、阻抗理论等，来分析这个实际系统，从而预知某个系统的特性。同时，还可以用实际电路模拟原有物理系统，通过实验掌握电路的特性，从而预知原物理系统的特性。这种模拟电路更换元件方便，经常用来研究参数变化对系统的影响。

如图 1-6 所示，建立弹簧质点阻尼振子的运动方程。由达朗贝尔原理：任意时刻虚加于质点上的惯性力与作用于质点上的激励力 f 、弹簧力 f_k 和阻尼力 f_c 满足平衡方程，即

$$\sum f_i = 0$$

$$f_m + f_c + f_k + f = 0 \quad (1-31)$$

式中 f_m ——质点的惯性力， $f_m = -m \frac{d^2 x}{dt^2}$ ；

f_c ——阻尼器对质点的阻尼力， $f_c = -c\dot{x}$ ；

f_k ——作用给质点的弹簧力， $f_k = -kx = -k \int_0^t \dot{x} dt$ ；

f ——作用于质点的简谐激励力， $f = |F|e^{j\omega t}$ 。

将这些力代入式 (1-31) 中，得到：

$$m \frac{d\dot{x}}{dt} + c\dot{x} + K \int_0^t \dot{x} dt = f \quad (1-32)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{c} \int_0^t i dt = u \quad (1-33)$$

因为

$$i = \frac{dq}{dt}, \quad \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad \int_0^t \dot{x} dt = x$$

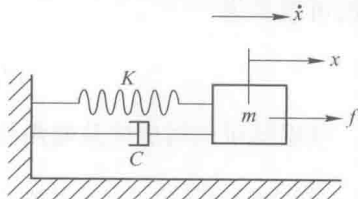


图 1-6 弹簧质点阻尼振子运动示意图

$$\text{所以} \quad \left. \begin{aligned} L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q &= u \\ m\ddot{x} + c\dot{x} + Kx &= f \end{aligned} \right\} \quad (1-34)$$

已知激励力为简谐力，响应的频率也相等，具有相位差，设

$$\dot{x} = |\dot{X}_m| e^{j(\omega t + \varphi_v)} = |\dot{X}_m| e^{j\varphi_v} e^{j\omega t} \quad (1-35)$$

则

$$\dot{X} = j |\dot{X}_m| \omega e^{j(\omega t + \varphi_v)} \quad (1-36)$$

$$X = \int \dot{x} dt = \frac{|\dot{X}_m|}{j\omega} e^{j(\omega t + \varphi_v)} \quad (1-37)$$

分别代入上式中，并消去 $e^{j\omega t}$ ，得

$$\left[C + j\left(\omega m - \frac{K}{\omega}\right) \right] |\dot{X}_m| e^{j\varphi_v} = |F| e^{j0} \quad (1-38)$$

$$ZV(\omega) = \left[C + j\left(\omega m - \frac{K}{\omega}\right) \right] = \frac{F \angle 0}{|\dot{X}_m| \angle \varphi_v} = \frac{\tilde{f}}{\tilde{X}} \quad (1-39)$$

式中， $ZV(\omega)$ 为机械阻抗（速度阻抗）等于简谐激励力的复振幅与速度响应复振幅之比，当参数 m 、 C 、 K 一定时，为激励频率 ω 的函数。

由此可见，由弹簧 K 、阻尼 C 和质量 m 组成机械系统的运动，与 $R-L-C$ 串联谐振系统的运动，可用同样的微分方程（1-34）描述，是相似系统。它们的各种量之间是相似的，见表 1-1。

表 1-1 各量相似对应关系

机械系统		电路系统
力 f	$\longleftrightarrow$	电压 u
速度 $\dot{X}$	$\longleftrightarrow$	电流 i
质量 m	$\longleftrightarrow$	电感 L
阻尼 C	$\longleftrightarrow$	电阻 R
弹簧刚度 K	$\longleftrightarrow$	电容导数 $1/C$
速度阻抗 Z_v	$\longleftrightarrow$	电路阻抗 Z

常把这样一组机—电间的相似关系，简称为力—电压和速度—电流相似。

1.3 简谐激励作用下机械阻抗的定义

1.3.1 机械阻抗

按照电路中阻抗的概念可以建立机械振动系统中机械阻抗的概念。根据简谐激励作用时，稳态输出量可以是位移、速度或加速度，机械阻抗又分为位移阻