JINSHI DAISHU JICHU

普通高等教育“十三五”规划教材

近世代数基础

李样明　冯明军　田德路　赵立博　编著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

普通高等教育"十三五"规划教材

近世代数基础

李祥明　冯明军　田德路　赵立博　编著

北京邮电大学出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是为地方师范院校及综合大学数学系本科的重要专业基础课“近世代数”而编写的教材。全书共六章，系统地介绍了群、环、域的基本概念、初步性质以及本学科的计算软件GAP软件。

第一章是基本概念，第二、三、四章介绍了群、环、域的基本结论，第五章介绍了有限群的初步结论，第六章是本学科的计算软件GAP软件的介绍。

本书可以作为高等院校数学专业本科生的教材和参考书。

图书在版编目(CIP)数据

近世代数基础 / 李样明等编著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2016.1

ISBN 978-7-5635-4596-4

Ⅰ. ①近… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①抽象代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O153

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第301141号

书　　名	近世代数基础
编 著 者	李样明　冯明军　田德路　赵立博
责任编辑	张保林
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路10号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	中煤(北京)印务有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	8.5
字　　数	165千字
版　　次	2016年1月第1版　2016年1月第1次印刷

ISBN 978-7-5635-4596-4　　定价：28.50元

前　言

“近世代数”(又名抽象代数)是现代数学的重要基础,也是高等代数的一门后续课程.近世代数不仅在数学中占有极其重要的地位,而且具有丰富的实际应用背景,在相关学科中有着广泛的应用,对其他学科产生了越来越大的影响,如计算机科学、信息科学、近代物理、近代化学等.理解和掌握近世代数的基本内容、方法和理论,对于学生加深理解数学的基本思想和方法,提高抽象思维能力,培养数学修养都有重要意义.近世代数的基本概念、理论和方法,是基础数学和应用数学的重要基础,是每一个数学工作者所必需的基本数学素养之一.

“近世代数”长期以来都是数学专业的专业基础课,它在“数学与应用数学”专业和“信息与计算科学”专业的课程体系中扮演着重要的角色,是主要基础课之一.数学专业课程可分为“分析”、“代数”、“几何”三条线.在“代数”这条线中,“高等代数”课起基础作用,“近世代数”课起承上启下作用.“高等代数”课讲授的大多是17至18世纪的代数学中的成果,“近世代数”课则主要讲授19至20世纪的代数学中的成果,并为进一步学习现代数学打好基础,也为数学学科的后续课程(如“李代数”、“有限群表示”、“代数拓扑”、“代数几何”)以及计算机学科的专业课程(如“计算机科学”、“软件基础”)等打下基础.

新中国成立以来,“近世代数”课程的教材最早的、最流行的版本是1952年张禾瑞先生编著的《近世代数基础》,1978年又出了修订版,现在还有许多高校在使用.20世纪80年代,吴品三先生也编著了一本《近世代数》教材,也有许多高校在使用.然而,近几十年来近世代数的理论和应用有了很大发展,一些旧版教材没有反映当今代数学的发展状况,无法满足当今代数学的教学思想.故10多年来,又有许多该课程的教材问世,但是有的教材过于简单,而有的教材又过于难,完全不能适用于新形势下地方高校数学专业本科生的教学需要.鉴于这样的实际情况,我们编写了本教材.我们在编写本教材的过程中力求体现如下几个特点.

1. 在介绍概念及定理时,力求讲明它们的来龙去脉,这样体现了近代教学

的新理念：讲述要符合认知规律，使学生既学到了知识又培养了能力，又要使学生易于接受，真正学到些东西.

2. 体现代数学与现代计算机科学技术的结合，符合现代的潮流.例如，在第 6 章中，介绍了该学科的最新的计算软件.

3. 由于作者的研究方向为有限群，故在第 5 章介绍了有限群的理论，可以作为对有限群有兴趣的读者的初步读物.

本书的第 1～4 章的内容适合 64 学时左右的教学要求，第 5～6 章可作为 20 学时左右选修课的教学内容.

全书由李样明撰写第 1～5 章，田德路编写第 6 章，冯明军统稿、审核，赵立博配习题.

本书的出版获得了广东第二师范学院教学质量工程项目的资助，我们的本科生杨静、黄思华、朱雪琼、黄丽园、廖秋媚、胡颖婷、唐嘉贤、袁曼思、杨锦婷、孔维洁、潘琦琦、邝素萍、张文婷等为书稿输入做了大量的工作，在此均表示感谢。由于水平有限，时间仓促，错误在所难免，肯请读者批评指正.

李样明　冯明军　田德路　赵立博

2015 年秋于广州

目　录

第一章　预备知识

我们从中学就开始学习代数学这门课程，初等代数以数（整数、有理数、实数、复数等）及其运算作为基本的研究对象，数集上的运算有加，减，乘，除等. 在高等代数的课程中，我们研究了向量、矩阵及其相应的运算. 现在在这门近世代数（抽象代数）课程中，我们研究的主要内容是一般集合及其上的运算，即所谓的代数系统. 近世代数在数学的其他分支和自然科学的许多领域，特别是一些新兴领域，如近代物理、近代化学、计算机科学、数字通信、系统工程等中都有重要的应用，因而它既是数学系的主干课程之一，也是现代科学技术的数学基础之一.

为了更好地理解近世代数的内容，有必要先介绍一下集合论的一些基本概念.

§1　集　　合

读者已经在中学里学习过集合的概念. 所谓一个集合，我们把它理解为“在一定范围内的讨论对象组成的整体”.“组成”一个集合的各个个体，叫作这个集合的元素.

一般我们用大写拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合中的元素. 当 a 是集合 A 的元素时，就说“a 属于 A”，记为“$a\in A$”，也说“A 含有 a”，记为“$A\ni a$”；当 a 不是集合 A 的元素时，用符号“$a\notin A$”表示，读作“a 不属于 A”.

不含有任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示.

一个集合 A 的元素个数用 $|A|$ 表示. 当 A 中有有限个元素时，集合 A 称为有限集；否则称为无限集. $|A|=\infty$ 表示 A 是无限集，$|A|<\infty$ 表示 A 是有限集.

集合的表示方法通常有两种：一种是列举法，就是直接列出所有的元素；另一种是描述法，就是规定元素所具有的性质，即 $S=\{x\,|\,p(x)\}$，这里 $p(x)$ 表示 x 具有的性质. 例如：

$$A=\{-1,1\}\text{或 }A=\{x\,|\,x^2=1,x\text{ 为实数}\}.$$

为方便起见，我们在本书中采用如下固定的记号：

$\mathbb{Z}$ 表示整数集 $\{0,\pm1,\pm2,\cdots\}$；$\mathbb{Z}^+$ 表示正整数集 $\{1,2,3,\cdots\}$；

$\mathbb{N}$ 表示自然数集 $\{0,1,2,3,\cdots\}$；$\mathbb{Q}$ 表示有理数集；

$\mathbb{R}$ 表示实数集；$\mathbb{C}$ 表示复数集.

设有两个集合 A,B，若对于 A 中一切元素 a，均有 $a\in B$，这时就说 A 是 B 的子集（也说 B 是 A 的扩集），用“$A\subseteq B$”表示（或用符号“$B\supseteq A$”表示），读作“A 包含于 B”（或读作“B 包含 A”）.

约定：空集 $\varnothing$ 是任何集合的子集，即对任意集合 A 都有 $\varnothing\subseteq A$.

如果集合 A 和集合 B 含有相同的元素，则称 A 和 B 相等，记为“$A=B$”. 换句话说，若 $A\subseteq B$，又 $B\supseteq A$，则 $A=B$.

若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的真子集，记为 $A\subsetneqq B$.

集合的运算有多个，下面仅介绍我们常用的几个运算.

定义 1-1 设 A,B 是两个集合，记 $A\cup B$ 为 A 与 B 的所有元素组成的集合，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

称 $A\cup B$ 为集合 A 与集合 B 的并集.

例 1-1 若 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$.

定义 1-2 设 A,B 是两个集合，记 $A\cap B$ 为既属于集合 A 又属于集合 B 的元素组成的集合，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

称 $A\cap B$ 为集合 A 与集合 B 的交集.

例 1-2 记 A,B 同例 1-1 所示，则 $A\cap B=\{b,c\}$.

上述两种运算适合以下运算律：

(1) $A\cap A=A$，$A\cup A=A$；（幂等律）

(2) $A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$；（交换律）

(3) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$，$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$；（结合律）

(4) $A\cap(A\cup B)=A\cup(A\cap B)=A$；（吸收律）

(5) 若 $A\subseteq C$，则 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap C$；（模律）

(6) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；（分配律）

(7) $A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cup\varnothing=A$.（泛界）

以上运算律由定义易得，请读者自行补上证明过程.

并与交的概念可以推广到任意多个集合上. 为此，我们先引进所谓的“指标集”的概念.

设有集合 I 及一族集合 $F=\{A_\alpha,A_\beta,\cdots\}$，其中 $\alpha,\beta,\cdots$ 为 I 中的元素. 对每个 $\alpha\in I$，均可在 F 中找到唯一的一个集合 A_α 与之对应，反之 F 中任一集合也可在 I

中找到唯一的一个元素与之对应. 粗略地说, F 中的集合可以用 I 来标记. 这样的集合 I 被称为集族 F 的指标集.

例如,设数学系二年级有四个班,称为甲班、乙班、丙班、丁班,若设 $F=$ {甲班,乙班,丙班,丁班},则集合 $I=$ {甲,乙,丙,丁}就是 F 的指标集. 指标集 I 可以是无穷集,例如,若 $I=\mathbb{N}$(自然数集),则 $F=\{A_i \mid i\in I\}$ 表示 $F=\{A_0,A_1,A_2,\cdots\}$.

现令 $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid x$ 属于某个 $A_\alpha\}$,称 $\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ 为 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 的并. 类似地令 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ 表示所有 $A_\alpha(\alpha\in I)$ 的公共元素组成的集合,即

$$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha=\{x \mid x \text{ 属于每个 } A_\alpha\},$$

称 $\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$ 为 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$ 的交.

定义 1-3 设 A,B 为两个集合, A 中不属于 B 的元素构成的集合,称为 A 与 B 的差,记为 $A-B$ 或 $A\backslash B$,即

$$A\backslash B=\{x\in A \mid x\notin B\}.$$

在例 1-1 中, $A\backslash B=\{a\}$.

最后我们介绍集合的加当积(Cartesian 积,加氏积),简称积.

定义 1-4 设 A,B 为集合, $a\in A,b\in B$,所有有序对 (a,b) 组成的集合称为 A 与 B 的加氏积,记为 $A\times B$,即:

$$A\times B=\{(a,b) \mid a\in A,b\in B\}.$$

注意, $A\times B$ 中元素 (a,b) 与 (c,d) 相等当且仅当 $a=c,b=d$.

例 1-3 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$,则

$$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\},$$

$$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}.$$

例 1-4 若 $A=B=\mathbb{R}$(实数集),则 $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$,即是笛卡儿(Descartes)平面.

加氏积的概念也可以推广到 n 个甚至无穷多个集合的情形. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合,令

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n) \mid a_i\in A_i, i=1,2,\cdots,n\}$$

即 n 元有序序列全体的集合,称之为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的加氏积.

对于一族集合 $\{A_\alpha \mid \alpha\in I\}$,它的加氏积,记为 $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$,定义如下:

$$\prod_{\alpha\in I}A_\alpha=\{f \mid f:I\to\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha, f(\alpha)\in A_\alpha, \forall\alpha\in I\}$$

这个定义适合于一般的指标集 I,无论 I 为有限或无限. 比如: $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的加氏积,这时 $I=\{1,2,\cdots,n\}$,对 $i\in I$, $f(i)=a_i\in A_i$. 这样得到的 $\prod_{\alpha\in I}A_\alpha$ 与上面定义的 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 完全一致.

利用加氏积的概念,我们不仅可以从已知集合构造出新的集合,还可以定义在

数学中起着极其重要作用的等价关系、映射等基本概念.

习　题　1

1-1　设 $A\subseteq B$，证明：$A\cap B=A$，$A\cup B=B$.

1-2　设 $A_i(i\in I)$，B 均为集合 Ω 的子集，试证：

(1) $B\cap(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}(B\cap A_i)$；

(2) $B\cup(\bigcap_{i\in I}A_i)=\bigcap_{i\in I}(B\cup A_i)$.

§2　等价关系与商集

我们将引入一个重要的概念——等价关系，但是先从关系的一般概念开始.

定义 2-1　设 A，B 是两个集合，积集合 $A\times B$ 的一个子集 R 称为 A 到 B 的一个关系. 特别的，若 $A=B$，则说 R 是 A 上的一个关系.

若 $(a,b)\in R\subseteq A\times B$，则称 a 与 b 具有关系 R 或称 a 与 b 为 R 相关，通常写成 aRb.

若 $(a,b)\notin R$，则称 a 与 b 不具有关系 R 或称 a 与 b 为 R 不相关，记为 $aR'b$.

以下是一些具体的例子.

例 2-1　在实数集 $\mathbb{R}$ 中，当然 $\leqslant$ 是 $\mathbb{R}$ 上的一个关系，为看出这一点，定义关系 $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\mid$ 点 (x,y) 在直线 $y=x$ 上或者上方$\}$.

读者应当验证，$x\leqslant y$ 当且仅当 $(x,y)\in R$.

例 2-2　设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，定义关系

$$R=\{(x,y)\in A\times A\mid x+y=6\},$$

易见 $1R5$，$2R4$，$3R'2$.

例 2-3　设 $\mathbb{Q}^*$ 为非零的有理数集，定义关系

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}^*\mid x\text{ 为 }y\text{ 的因子}\},$$

易见 xRy 当且仅当 $x\mid y$，即 x 整除 y.

定义 2-2　设 R 是集合 A 上的一个关系，

(1) 若对任意 $a\in A$ 都有 aRa，则称 R 在 A 上具有自反性；

(2) 若当 aRb 时有 bRa，则称 R 在 A 上具有对称性；

(3) 若当 aRb，bRc 时有 aRc，则称 R 在 A 上具有传递性；

(4) 若当 aRb，bRa 时有 $a=b$，则称 R 在 A 上具有反对称性.

例 2-1 中的关系 R 具有自反性、反对称性、传递性，但不具有对称性.

例 2-2 中的关系 R 具有对称性，但不具有自反性、传递性和反对称性.

例 2-3 中的关系 R 具有自反性、传递性，但不具有对称性及反对称性.

定义 2-3 设 R 是 A 上的一个关系，若 R 具备自反性、对称性及传递性，则 R 称为 A 上的一个等价关系.

等价关系常用～表示，即 $a \sim b$ 表示 $(a,b) \in R$.

易见，例 2-1，例 2-2，例 2-3 中定义的关系均不是等价关系. 下面给出一些等价关系的例子.

例 2-4 设 S 是任意集合，定义

$$R = \{(a,a) \mid a \in S\},$$

则 aRb 当且仅当 $(a,b) \in R$，当且仅当 $a=b$，即普通的相等关系. 易见相等关系是任意集合上的一个等价关系.

例 2-5 设 $\mathbb{Z}$ 为整数集，定义：$a \sim b$ 当且仅当 $a-b$ 为偶数，即

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a-b \text{ 为偶数}\}.$$

不难验证这是一个等价关系.

例 2-6 设 $X = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid b \neq 0\}$. 在 X 中定义一个关系～为交叉相乘相等：$(a,b) \sim (c,d)$ 当且仅当 $ad=bc$.

我们断言～为 X 上的一个等价关系. 自反性和对称性很容易验证. 对于传递性，假设 $(a,b) \sim (c,d)$，$(c,d) \sim (e,f)$，由 $ad=bc$ 得 $adf=bcf$，由 $cf=de$ 得 $bcf=bde$，从而 $adf=bde$. 消去非零整数 d，即得 $af=be$，即有 $(c,d) \sim (e,f)$.

例 2-7 设 $\mathbb{Z}$ 是整数集，n 是一个给定的正整数. 对任意整数 a、b，定义：$a \sim b$ 当且仅当 $n \mid a-b$，则～是 $\mathbb{Z}$ 上的一个等价关系（证明留给读者）. 通常称～为模 n 的同余关系，$a \sim b$ 记为 $a \equiv b \pmod n$，读成 a，b 模 n 同余.

事实上，设 a 被 n 除后余数为 r_1，b 被 n 除后余数为 r_2，记

$$a = q_1 n + r_1,\ b = q_2 n + r_2,\ 0 \leqslant r_1, r_2 < n,$$

则 $a \sim b \Leftrightarrow a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow n \mid a-b \Leftrightarrow n \mid r_1 - r_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$. 即 $a \sim b$ 相当于 a，b 被 n 除后余数相同.

定义 2-4 一个集合如果能表示为一些互不相交的子集之并，则这些子集称为该集合的一个分类（或者划分），即，$\{A_i \mid i \in I\}$ 是集合 A 的一个分类，当且仅当 $A_i \cap A_j = \varnothing\ (i \neq j)$，且 $A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

易见，若 $\{A_i \mid i \in I\}$ 是 A 的一个分类，则 A 中每个元素属于且仅属于一个子集 A_i. 通常 A_i 称为 A 中元素的一个类.

集合的等价关系与集合的分类有密切关系.

设～是集合 A 的一个等价关系，$a \in A$，令 $[a] = \{x \in A \mid x \sim a\}$，称 $[a]$ 为 a 所在的等价类，a 称为 $[a]$ 的一个代表元.

引理 2-1 a 所在的等价类$[a]$具有以下性质：

(1) $a\in[a]$；

(2) $a\sim b\Leftrightarrow[a]=[b]$.

注：(1)表明等价类$[a]$是 A 的一个非空子集；(2) 表明等价类可由其任一元素作为代表，也就是说，等价类与代表元的选择无关.

证明：(1) 由于 $a\sim a$，故 $a\in[a]$.

(2) 设 $a\sim b$. 对 $\forall x\in[b]$，则 $x\sim b$，又因为 $b\sim a$，所以 $x\sim a$，于是 $x\in[a]$，从而$[b]\subseteq[a]$；反之，对 $\forall y\in[a]$，则 $y\sim a$，因为 $a\sim b$，所以 $y\sim b$，于是 $y\in[b]$，从而$[a]\subseteq[b]$，故$[a]=[b]$.

反之，若$[a]=[b]$，则 $a\in[a]=[b]$，即 $a\sim b$，证毕.

定理 2-1 设$\sim$是集合 A 上的一个等价关系，则$\sim$决定集合 A 的一个分类$\{[a]\mid a\in A\}$. 反之，A 的一个分类$\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$决定 A 的一个等价关系.

证明：设$\sim$是集合 A 上的一个等价关系. 由引理 2-1 知 A 的一个元 a 属于某一个类$[a]$. 进一步，假定 $a\in[b]$，$a\in[c]$，由引理 2-1 知$[a]=[b]$，$[a]=[c]$，这样$[b]=[c]$，故 A 中的每个元 a 只属于一个类. 故$\{[a]\mid a\in A\}$为 A 的一个分类.

反之，设$\{A_\alpha\mid\alpha\in I\}$是 A 的一个分类，我们规定：$a\sim b\Leftrightarrow a,b$ 属于同一个类. 下证$\sim$为 A 上的一个等价关系.

对 $\forall a\in A$，由于 $A=\bigcup\limits_{\alpha\in I}A_\alpha$，故 a 属于某个 A_α，从而 $a\sim a$，$\sim$满足自反性.

设 $a\sim b$，由定义知 $a,b\in A_\alpha$，显然 $b,a\in A_\alpha$，从而 $b\sim a$，即$\sim$满足对称性.

设 $a\sim b$，$b\sim c$，则存在 $\alpha,\beta\in I$ 使 $a,b\in A_\alpha$，$b,c\in A_\beta$. 因为 $b\in A_\alpha\cap A_\beta$，所以 $A_\alpha=A_\beta$，从而 a,c 在同一类中，从而 $a\sim c$. 所以$\sim$满足传递性，证毕.

定义 2-5 设$\sim$是集合 A 上的一个等价关系，集合 A 上的所有等价类的集合$\{[a]\mid a\in A\}$称为 A 关于等价关系$\sim$的商集，记之为$\overline{A}$或 $A/\sim$.

注意$\overline{A}$实际上是指 A 的某些子集(全体等价类)的集合，$\overline{A}$中的元素是 A 中元素 a 所在的等价类$[a]$. 若 $a\in A$，a 所在的等价类作为$\overline{A}$的元素有时记为$\overline{a}$.

例 2-5 中的商集只含两个元素，即奇数集与偶数集.

例 2-6 中的商集就是分数的形式化定义.

$\forall(a,b)\in X$，(a,b)所在的等价类$[(a,b)]$记为$\dfrac{a}{b}$，这就是形式化的分数. 因为$(1,2)\sim(2,4)\sim(3,6)\sim\cdots$，所以$\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{3}{6}=\cdots$.

例 2-7 中的商集含有 n 个元素，分别记为

$$[0]=\bar{0}=\{0,\pm n,\pm 2n,\pm 3n,\cdots\}=\{kn \mid k\in\mathbb{Z}\};$$
$$[1]=\bar{1}=\{kn+1 \mid k\in\mathbb{Z}\};$$
……
$$[n-1]=\overline{n-1}=\{kn+n-1 \mid k\in\mathbb{Z}\}.$$
其中$\bar{i}$表示由所有被 n 除后余数等于 i 的整数全体.这个商集记为$\mathbb{Z}_n$,称为整数模 n 的剩余类集,$\mathbb{Z}_n=\{\bar{0},\bar{1},\cdots,\overline{n-1}\}=\{[0],[1],\cdots,[n-1]\}$.

习 题 2

2-1 设$\mathbb{Z}$为整数集,试问以下各关系 R 是否为$\mathbb{Z}$上的等价关系?

(1) $aRb\Leftrightarrow ab\geqslant 0$; (2) $aRb\Leftrightarrow 4\mid a+b$;

(3) $aRb\Leftrightarrow a=b$; (4) $aRb\Leftrightarrow a^2+b^2\geqslant 0$.

2-2 试指出上题中等价关系所决定的分类.

2-3 找出下列证明中的错误.命题:若集合 S 的一个关系 R 有对称性和传递性,则必有自反性.

证明:对任意的 $a\in S$,由对称性,如果 aRb,则 bRa.再由传递性,得 aRa,所以 R 有自反性.

2-4 在复数集$\mathbb{C}$中,规定关系"$\sim$":$a\sim b\Leftrightarrow |a|=|b|$.(1)证明$\sim$是$\mathbb{C}$的一个等价关系;(2)试确定相应的商集$\mathbb{C}/\sim$,并给出每个等价类的一个代表元.

§3 映 射

映射是函数概念的推广,它描述了两个集合的元素之间的关系.映射可比较两个集合,是数学中最基本的工具之一,我们必须对它非常熟悉.

定义 3-1 设 A,B 为两个非空集合,如果有一个 A 到 B 的对应关系 f,使得对每一个 $x\in A$,都有唯一确定的一个元素 $y\in B$ 与之对应,则称 f 是 A 到 B 的一个映射,记作
$$f:A\to B.$$
集合 A 叫作映射 f 的定义域,集合 B 叫作 f 的值域.y 称为 x 在 f 作用下的像,记作 $y=f(x)$,并用符号
$$f:x\mapsto y$$
表示.x 称为 y 的一个原像.

由以上定义可知,一个映射必须联系两个集合与一个对应关系.对两个映射

$f: A_1 \to B_1$，$g: A_2 \to B_2$，当且仅当 $A_1 = A_2$，$B_1 = B_2$，且对一切 $x \in A_1$，均有 $f(x) = g(x)$时，才有 $f = g$.

我们看以下几个例子.

例 3-1 设 $A \to A$ 有对应关系：

$$a \mapsto a, \forall a \in A,$$

则此对应关系是 A 到 A 的一个映射，叫作 A 上的恒等映射(或者单位映射)，记为 I_A.

例 3-2 设 A, B 是两个非空集合，取 $b_0 \in B$，令 $A \to B$ 的对应关系为

$$f: a \mapsto b_0, \quad \forall a \in A,$$

则 f 为一个映射，称 f 为一个常值映射.

例 3-3 设 $A = B = \mathbb{R}$(实数集)，对应关系 f 定义为：$x \mapsto x^2$，$x \in A$，它是熟知的初等函数，是一个$\mathbb{R}$到$\mathbb{R}$本身的映射.

例 3-4 设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，对应关系 f 定义为

$$a \mapsto 1, \quad b \mapsto 2, \quad c \mapsto 3,$$

则 f 满足定义 3－1 中的条件，故 f 是一个 A 到 B 的映射.

例 3-5 记 $M_n(\mathbb{R}) = \{(a_{ij})_n \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\}$，定义 $M_n(\mathbb{R})$到$\mathbb{R}$的对应关系 φ 为：

$$\varphi: A \mapsto \det(A), \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R}).$$

由于每个矩阵 A 的行列式是唯一确定的，所以 φ 是 $M_n(\mathbb{R})$到$\mathbb{R}$的一个映射.

一个映射 $f: A \to B$ 有两个要素：(1)A 中每个元素在 f 作用下，在 B 中均有像；(2)A 中元素在 f 作用下，在 B 中的像唯一.

下面举几个不是映射的对应关系的例子.

例 3-6 设 $A = \mathbb{Z}$，$B = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 0\}$，定义 $f: n \to |n|$，$\forall n \in A$，则 f 不是 A 到 B 的映射，因为 0 的像 $f(0) \notin B$.

例 3-7 设 $A = \{1, 2\}$，$B = \mathbb{Z}$，规定

$$f: 1 \mapsto \text{奇数}, \ 2 \mapsto \text{偶数}.$$

则 f 不是A 到 B 的映射，因为 $f(1)$，$f(2)$不是唯一确定的，$\mathbb{Z}$中奇数与偶数都不止一个.

例 3-8 设 $A = \{a, b, c\}$，$B = \{1, 2, 3, 4\}$，规定

$$f: a \mapsto 1, \quad b \mapsto 2.$$

则 f 不是A 到 B 的映射，因为 c 在 f 下无像.

注意，若定义域中元素的表达形式不唯一时，要判断一个对应关系 f 是否映射时，需要检验下列条件：

$$\text{对} \ \forall a, b \in A, \text{若} \ a = b, \text{则} \ f(a) = f(b).$$

例 3-9 考虑$\mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ 的对应关系：$\varphi: \frac{b}{a} \mapsto b$，$\forall \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$，其中 $a \neq 0$. 因为$\frac{1}{2} =$

$\frac{2}{4}$，而 $\varphi(\frac{1}{2})=1$，$\varphi(\frac{2}{4})=2$，$\varphi(\frac{1}{2})\neq\varphi(\frac{2}{4})$，故 φ 不是映射.

定义 3-2　设 f 是 A 到 B 的一个映射，

(1) 如果对 $\forall a,b\in A$，当 $a\neq b$ 时都有 $f(a)\neq f(b)$，则称映射 f 是一个单射(injection)；

(2) 如果对 $\forall y\in B$，都存在 $x\in A$ 可使 $f(x)=y$，则称映射 f 是一个满射(surjection)；

(3) 如果 f 既是单射又是满射，则称映射 f 是一个双射(bijection)或一一映射.

注：(1) 要证明一个映射 $f:A\to B$ 是单射，只要验证下命题：对 $\forall a,b\in A$，若 $f(a)=f(b)$，就有 $a=b$.

(2) A 到 A 的映射也叫作 A 的变换. 同样的，A 到 A 的满射、单射、一一映射也叫作 A 的满变换、单变换、一一变换.

例 3-1 中的映射 f 是一个双射. 例 3-4 中的映射 f 为单射，但不是满射. 例 3-5中的映射 φ 是满射，但不是单射，因为行列式值相同的矩阵不一定相等.

设 f 是 A 到 B 的映射，$S\subseteq A$，记

$$f(S)=\{f(x)\mid x\in S\},$$

它是 B 的一个子集，称为 S 在 f 作用下的像；$f(A)$ 称为 f 的像，记作 $\mathrm{im}f$.

我们有

$$f:A\to B \text{ 是满射} \Leftrightarrow \mathrm{im}f=f(A)=B.$$

进一步，设 $T\subseteq B$，记 $f^{-1}(T)=\{x\in A\mid f(x)\in T\}$，它是 A 的一个子集，称为 T 在 f 作用下的原像. 特别的，当 T 仅含一个元素时，如 $T=\{b\}$，$f^{-1}(\{b\})$ 也记为 $f^{-1}(b)$. 注意 $f^{-1}(T)$ 有可能是空集.

f 为单射的充分必要条件是：$\forall b\in f(A)$，$|f^{-1}(b)|=1$.

定义 3-3　设 A,B,C 为三个非空集合，有两个映射 $f:A\to B$，$g:B\to C$，则由 f,g 可确定一个 A 到 C 的映射 h：

$$h:a\mapsto g(f(a)),\ \forall a\in A,$$

即 $h(a)=g(f(a))$，$\forall a\in A$，则称 h 是 f 与 g 的合成(或复合)(composite)，记作 $h=g\circ f$，或者简记为 $h=gf$.

关于映射的合成，有以下性质.

定理 3-1　设有映射 $f:A\to B$，$g:B\to C$，$h:C\to D$，则有：

(1) $h(gf)=(hg)f$(结合律)；

(2) $I_B f=fI_A=f$.

证明：(1) $h(gf)$ 与 $(hg)f$ 的定义域均为 A，值域均为 D. 对 $\forall x\in A$，有 $[h(gf)](x)=h[(gf)(x)]=h[g(f(x))]=(hg)[f(x)]=[(hg)f](x)$，由映射相等的定义知 $h(gf)=(hg)f$.