学府考研

中国最严格考研辅导品牌

理工社®

2017考研数学

高等数学一本全

西安交通大学 刘 贤◎主编

考研数学命题研究组◎策划

专为基础薄弱考生打造的数学复习指导全书

考研第一轮复习必备 · 取代同济六七版教材

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

学府考研

中国最严格考研辅导品牌

理工社®

2017考研数学

高等数学一本全

西安交通大学 刘贤◎主 编

考研数学命题研究组◎策 划

王桃正 屈海亮 李娜◎副主编

RFID

北京理工大学出版社

BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学高等数学一本全 / 刘贤主编. —北京 ：北京理工大学出版社，2016.5

ISBN 978-7-5682-2342-3

Ⅰ.①考… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 118368 号

出版发行 /北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 /100081

电 话 /(010)68914775(总编室)

(010)82562903(教材售后服务热线)

(010)68948351(其他图书服务热线)

网 址 /http://www.bitpress.com.cn

经 销 /全国各地新华书店

印 刷 /北京市通县华龙印刷厂

开 本 /787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 /28

字 数 /677 千字

版 次 /2016 年 5 月第 1 版 2016 年 5 月第 1 次印刷

定 价 /49.00 元

责任编辑 /梁铜华

文案编辑 /多海鹏

责任校对 /周瑞红

责任印制 /边心超

总 序

当您拿起这本书时，您一定是有意向考研或者正在备战考研的学子，并且考研数学这门"该死"的学科给您带来了一定的困惑.本书是根据作者多年的考研教学经验，并结合历年考研真题命题趋势而产生的，相信本书一定会给您带来意想不到的惊喜！

随着社会对学历的要求越来越高，为了提升自己的竞争优势，国内越来越多的大学生将考研作为了必选之路，考研竞争之激烈，日趋白热化.现如今，国内的很多高校(特别是二、三流院校)中的学子为了在考研的道路上杀出一条血路，夜以继日地在各大图书馆、阅览室里挑灯夜读，甚至很多高校中出现了专门为考研而生的考研自习室.选择考研的人，往往在备考的过程中过着"柴门闻犬吠，风雨夜归人"的煎熬生活，其中的"幸福"滋味只有经历过考研的人才能体会.考研不仅仅是对知识方面的考察，更是对一个人全方面综合能力的考察，正是走过了这条拼搏之路，考上理想的院校才显得更有意义，对生活的理解才会更加深刻.所谓：世无巨艰，何来人杰！当我们走过这段艰辛的道路，回过头来，能够为曾经走过的这段风雨考研路而骄傲、而泪流满面，我想这本身就代表着一种成功！

一直有人用"得某门学科者得天下"来强调某一门学科在考研中的重要性，比如：政治老师会说：得政治者得天下；英语老师会说：得英语者得天下.时间能够检验一切，现如今，学子们一致认为：得数学者得天下！考研数学在所有考研公共科目中是分值最高、难度最大、区分度最明显的一门学科.更让人头痛的是，不仅考研数学题总是"坑"多而且考生拿到一道题总是没有思路.想要解决这一难题，需要做到两点：其一，夯实基础；其二，掌握"题眼法".本书及随后出版的系列丛书就是为解决这两方面问题而生的！

您的数学基础是否很扎实，在下面这道题的两种解答方法中可以得到检验，您是否能够检查出错误所在呢？

例题 1：求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}$.

解法一： 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$.

解法二： $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^{x^2\cdot\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$.

以上两种解法都是错误的，正确答案是 $e^{\frac{1}{2}}$.像这种有"坑"的题在考研数学试卷中比比皆是，这也是考研命题人对学生基础知识是否掌握牢固的考察方法之一.因此，夯实数学基础是各位考

生在备考之初务必做好的事情.

本书是为考研数学基础薄弱者而专门打造的一本全新类型的考研数学书籍，秉持从易到难、一步一步详细讲解的模式.此外，通过使用本书，各位考生能够对随后出版的系列丛书中“题眼法”的掌握打下坚实的基础，提高解题的速度和正确率.

做数学题的最高境界——题眼法

在学习数学的过程中，有着各种各样的解题方法，比如，归纳法、数形结合法、逆推倒叙法，等等.在所有的这些数学解题方法中，作者认为题眼法是解决数学题的最好方法，所谓“题眼法”就是将解题思路与题目中的某个条件或字眼联系起来，从而达到快速解题或快速想出解题思路的方法.题目中的这个条件或字眼就称为题眼，它是考生脑海中的基础知识和当前遇到的题目之间的一座桥梁，通过它可以直达彼岸，轻松解题.以下题为例：

例题 2：设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上三阶可导，$f(0)=1$，$f(1)=2$ 且 $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$，证明：$\exists\xi\in(0,1)$，使 $|f'''(\xi)|\geqslant 24$.

您是否拿到这道题就懵了呢，是否有一种无从下手的感觉？其实这就是基础不牢并且不懂题眼法的表现.题眼法告诉我们：当您看到题目中的条件“函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上三阶可导”时，您就应该立刻想到泰勒公式，因为泰勒公式是这样说的：

泰勒公式：设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶连续导数，在 (a,b) 内存在 $n+1$ 阶导数，则对任意给定的 $x,x_0\in[a,b]$，至少存在位于 x 与 x_0 之间的一点 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

成立，其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ 称为拉格朗日余项.

看到了吗？泰勒公式中的条件是“函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在直至 n 阶连续导数”，也就是闭区间高阶可导，而咱们上面例题的条件中恰好出现“闭区间三阶可导”这样的字眼，这就是题眼，因为它很容易让您想到泰勒公式中的条件，而且要求函数高阶可导的只有泰勒公式，别无其他定理，所以你只能想到泰勒公式.结果是：此题一用泰勒公式立刻得结论(请看本书第三章的证明过程).看到题眼法的威力了吗？

鉴于作者能力有限，若有不足之处，恳请读者给予批评指正！在此，感谢所有为本书付出辛勤汗水及提出宝贵意见的人.最后，祝各位考研学子复习顺利，金榜题名！

刘贤

2016 年 3 月

目　录

第一章 函数、极限与连续

§1.1 函数的概念与性质

一、函数的概念

1. 集合的概念

十九世纪下半叶，德国数学家康托尔因创立著名的集合论而获得全世界的高度赞誉.在1900年的国际数学家大会上，法国著名数学家庞加莱就曾兴高采烈地宣称："借助集合论的概念，我们可以建造整个数学大厦.今天，可以说数学的绝对严格性已经达到了".可是，在这一宣称仅仅过了三年，第三次数学危机因一个震惊数学界的消息而引发：集合论是有漏洞的！这就是英国数学家罗素提出的著名的罗素悖论.危机产生后，世界各国的数学家纷纷提出自己的解决方案，经过长达五年之久的研究，策梅罗提出的第一个公理化集合论体系终于圆满地解决了第三次数学危机.而这一次数学危机也促进了数学界的蓬勃发展，集合论与罗素悖论也终将载入历史史册，就让我们从集合开始说起吧！

所谓集合是指把具有某种共同特性的对象集到一块而构成的一个整体.集合用大写的拉丁字母 $A,B,C,\cdots$ 表示，里面的对象称为该集合的元素，用小写的拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 表示.若 a 是集合 A 中的元素，则称 a 属于 A，记为 $a\in A$；否则，称 a 不属于 A，记为 $a\notin A$.集合的表示方法有三种：列举法、描述法与图示法.通常情况下，考研只能用到列举法和描述法.

所谓列举法就是把集合中的全体元素一一列举出来.例如：由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A，可表示为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.而**描述法**是指用语言文字或数学符号描述集合 A 是由具有某种特性 P 的全体元素所组成的，通常可以表示成 $A=\{x\mid x$ 具有特性 $P\}$.例如：集合 A 是方程 $3x^2-5x+2=0$ 的解集，就可以表示成 $A=\{x\mid 3x^2-5x+2=0\}$.

数集：由数所组成的集合称为数集.常见数集有：(1)全体实数所组成的集合称为实数集，记为 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$；(2)全体正实数所组成的集合称为正实数集，记为 $\mathbf{R}^+=(0,+\infty)$；(3)全体有理数所组成的集合称为有理数集，记为 $\mathbf{Q}$；(4)全体整数所组成的集合称为整数集，记为 $\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-1,0,1,\cdots,n,\cdots\}$；(5)全体正整数所组成的集合称为正整数集，记为 $\mathbf{N}^+=\{1,2,3,\cdots\}$；(6)全体非负整数所组成的集合称为自然数集，记为 $\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

除了以上常见数集外，下面需要介绍高数中最为常见的两种数集：

2. 区间与邻域

定义 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即有

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

a 和 b 分别称为开区间 (a,b) 的左、右端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.类似的可以依次定义左开右闭区间 $(a,b]$、左闭右开区间 $[a,b)$ 和闭区间 $[a,b]$ 如下：

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\};\quad [a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\};\quad [a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

注意

以上定义的区间都是长度为 $b-a$ 的有限区间，也可以定义如下的长度为无限的无限区间：

$(a,+\infty)=\{x\mid a<x<+\infty\}$； $[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x<+\infty\}$；

$(-\infty,b)=\{x\mid -\infty<x<b\}$； $(-\infty,b]=\{x\mid -\infty<x\leqslant b\}$；

$(-\infty,+\infty)=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

定义 设 $\delta>0$，以 x_0 点为中心、δ 为半径的开区间称为以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域，记为 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$，其中 x_0 为该邻域的中心，δ 为该邻域的半径.事实上有

$$U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

定义 把邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心 x_0 去掉后的邻域称为以 x_0 为中心、δ 为半径的去心邻域，记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$，即有 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

注意

(1)为了方便，把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为 x_0 的左 δ 邻域，记为 $\mathring{U}_-(x_0,\delta)$.把开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为 x_0 的右 δ 邻域，记为 $\mathring{U}_+(x_0,\delta)$；

(2)有时候在 δ 未知或不关心的情况下，可以把以 x_0 为中心、δ 为半径的邻域简记为 $U(x_0)$.而把以 x_0 为中心、δ 为半径的去心邻域简记为 $\mathring{U}(x_0)$.

3. 映射

定义 设 f 是一个从非空集合 A 到非空集合 B 上的对应法则，若对 A 中**任意**元素 $x\in A$，都**存在** B 中**唯一**的元素 y 通过对应法则 f 与 x 对应，则称对应法则 f 为定义在 A 到 B 的**映射**，记为 $f:A\to B$ 或 $f:x\to y$.

注意

(1)设 f 为定义在 A 到 B 的映射，若对集合 A 中任意不同元素 $x_1\neq x_2$，有 $f(x_1)\neq f(x_2)$ 成立，则称 f 为定义在 A 到 B 的**单射**；

(2)设 f 为定义在 A 到 B 的映射，若对集合 B 中任一元素 y，都存在集合 A 中某元素 x，使得 $y=f(x)$，则称 f 为定义在 A 到 B 的**满射**(即任意像集 B 中的像都有原像的映射称为满射)；

(3)若映射 f 既是单射又是满射，则称映射 f 为**双射**(或一一映射)；

(4)下面定义的函数是特殊的映射，特殊之处在于：**函数是从数集到数集的映射**.

4. 函数的概念

无论在现实生活中，还是在整个数学中，函数都是无处不在的.函数的英文单词是

function，意思是“功能，作用”.函数这个中文名词最早是由清朝曾国藩幕府中的数学家李善兰先生在他的著作《代数学》中提出的，他给出的原因是“凡**此变数**中**函彼变数**者，则此为**彼之函数**”，即函数是一个变量，它会随着另一个变量的变化而变化，或者说函数是一个变量，它包含的另外一个变量.今天，人们把函数这个变量称为因变量，它包含的另外的这个变量称为自变量.顾名思义，自变量是自个儿会变化的量，因变量是因为自变量的变化而变化的量.下面是函数的正式定义：

定义 设 D 是一个**非空数集**，f 是一个从 D 到实数集 $\mathbf{R}$ 上的对应法则，若对 D 中**任意**实数 $x\in D$，都**存在** $\mathbf{R}$ 中**唯一**的实数 y 通过对应法则 f 与 x 对应，则称对应法则 f 为定义在 D 上的**函数**，记为 $y=f(x),x\in D$.称 x 为函数的自变量，y 为因变量（即 y 或者 $f(x)$ 就是自变量 x 的函数），D 称为函数 $f(x)$ 的定义域，并把实数集 $\mathbf{R}$ 的子集 $E=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

注意

(1)一般情况下对应法则是没有任何要求的，元素之间也是随意对应的.但函数中的对应法则 f 是有要求的，它的唯一一个要求是：定义域 D 中任意实数 $x\in D$，都对应值域 E 中唯一实数 y.只要对应法则满足这个要求就是函数.

(2)函数有三大要素：定义域 D、值域 E、对应法则 f.若定义域 D 和对应法则 f 相同，则值域 E 必定相同，故要讨论任给的两个函数是否为同一个函数，只要考虑定义域和对应法则是否相同即可.而对应法则是否相等，取决于对定义域 D 中的任意 x 是否对应于同一个 y.

(3)若一个函数未给出定义域，则默认其定义域为取自一切函数表达式有意义的值.

例 1 求函数 $f(x)=\ln\ln\ln x+\sqrt{100-x^2}$ 的定义域.

【分析】 本题求解函数的定义域，一般要从使函数有意义并且联系初等函数的定义域的角度出发.

【解析】 由题意可得：$\begin{cases}\ln\ln x>0,\\ \ln x>0,\\ x>0,\\ 100-x^2\geqslant 0,\end{cases}$ 求解可得函数 $f(x)$ 的定义域为 $(\mathrm{e},10)$.

例 2 求 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\ln|x-5|}$ 的定义域.

【解析】 由题意可得：$\begin{cases}x-\sqrt{x}\geqslant 0,\\ x\geqslant 0,\\ \ln|x-5|\neq 0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\geqslant 0,\\ x\neq 4 \text{ 或 } x\neq 6.\end{cases}$

因此，函数 $y=\sqrt{x-\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\ln|x-5|}$ 的定义域为 $\{x\mid x\geqslant 1,\text{且 } x\neq 4 \text{ 或 } x\neq 6\}$.

例 3 求 $y=e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域.

【分析】 求函数的值域,必须先确定函数的定义域,然后根据函数的特性求解出函数的值域.

【解析】 由题意可得:$\sqrt[3]{x^3-1}\neq 0$,则 $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.因此$\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$的值域为:$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,由此可知 $y=e^{\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}}$ 的值域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$.

注意

在中学阶段,求函数的值域是重点,也是难点.而在考研当中只要会求一般简单函数的值域即可,没必要追求太复杂的值域求法.

例 4 下列为同一函数的是(　　).

(A) $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$.

(B) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$.

(C) $f(x)=\ln(1-x^2)$ 与 $g(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$.

(D) $f(x)=\ln(x^2-1)$ 与 $g(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$.

【解析】 应选(C).

(A) 因为 $f(x)=\ln x^2$ 的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)=2\ln x$ 的定义域为$(0,+\infty)$,所以 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 不是同一函数;

(B) 因为$\sqrt{x^2}\neq x$,所以 $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$ 不是同一函数;

(C) 因为 $f(x)=\ln(1-x^2)$ 与 $g(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$ 的定义域都是$(-1,1)$,且$\ln(1-x^2)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$,所以 $f(x)=\ln(1-x^2)$ 与 $g(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$ 是同一函数;

(D) 因为 $f(x)=\ln(x^2-1)$ 的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$,而 $g(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$ 的定义域为$(1,+\infty)$,所以 $f(x)=\ln(x^2-1)$ 与 $g(x)=\ln(x+1)+\ln(x-1)$ 不是同一函数.

二、几类常见的函数

由于函数是一种对应法则,所以现实生活中,类似这样的对应法则几乎无处不见,一张电影票对应一个座位,一把钥匙对应一把锁,等等,函数实在太多了,导致人们没办法把所有的函数都研究清楚,当然也没这个必要.试想一下,当无法把百万敌军全部消灭时,人们经常采取的最好的办法应该是把某些容易干掉或具有代表性的人物干掉,实在不行也可以分块消灭,所谓“挑软柿子捏”“擒贼先擒王”“各个击破”就是这个道理.研究函数的思路也类似,当无法把所有函数研究清楚时,就试着把一些很典型的或很容易研究的函数先“干掉”,然后再研究一些具有共同特性的函数(也就是一类一类地进行研究),比如:函数的单调性、周期性、奇偶性、有界性,等等.

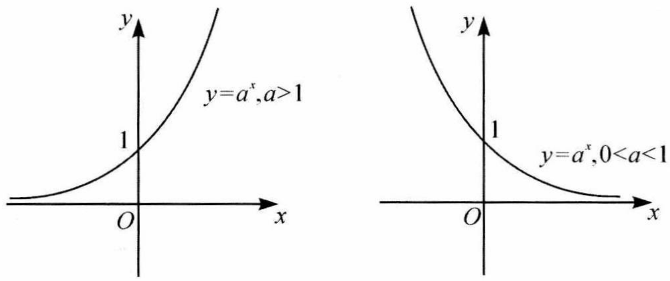
1. 基本初等函数

(1)**常函数**：$y=C$(C 为常数)；

(2)**幂函数**：$y=x^{\alpha}$(α 为常数)；

(3)**指数函数**：$y=a^{x}$，$x\in(-\infty,+\infty)$，其中 a 为大于 0 且不等于 1 的常数.

特别地，常用的指数函数为：$y=\mathrm{e}^{x}$($\mathrm{e}=2.7182\cdots$，无理数).指数函数的图像如图 1—1 所示.



(1) (2)

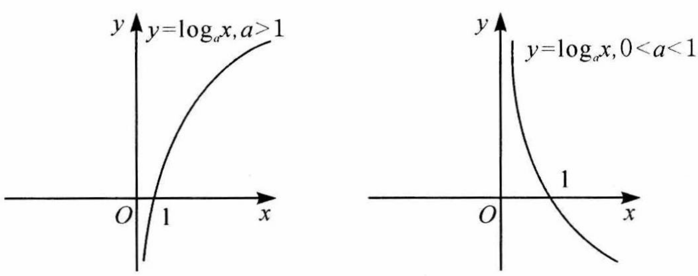
图 1—1

注 意

指数函数的基本运算法则：

①$a^{x_1}a^{x_2}=a^{x_1+x_2}$； ②$\dfrac{a^{x_1}}{a^{x_2}}=a^{x_1-x_2}$； ③$(a^{x_1})^{x_2}=a^{x_1x_2}$；④$a^{x_1^{x_2}}\neq(a^{x_1})^{x_2}$.

(4)**对数函数**：$y=\log_a x$，$x\in(0,+\infty)$，其中 a 为大于 0 且不等于 1 的常数.特别地，常用的对数函数有：$y=\log_{10}x=\lg x$，自然对数：$y=\log_{\mathrm{e}}x=\ln x$.对数函数的图像如图 1—2 所示.



(1) (2)

图 1—2

注 意

对数函数的基本运算法则：

①$\log_a x_1+\log_a x_2=\log_a x_1x_2$； ②$\log_a x_1-\log_a x_2=\log_a\dfrac{x_1}{x_2}$；

③$\log_a x_1^{x_2}=x_2\log_a x_1$； ④ $a^{\log_a^x}=x$，特别地有：$\mathrm{e}^{\ln x}=x$.

(5)三角函数：

①**正弦函数**：$y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，图像如图 1－3 所示.

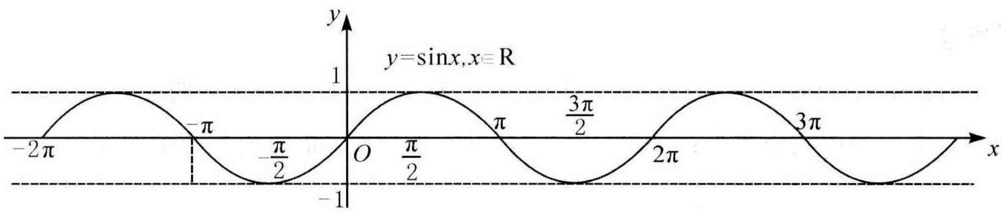


图 1－3

②**余弦函数**：$y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，图像如图 1－4 所示.

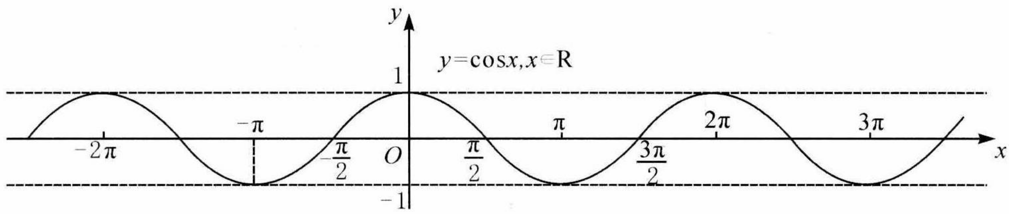


图 1－4

③**正切函数**：$y=\tan x$，$x\neq\pm\dfrac{(2k-1)\pi}{2}$，其中 $k\in\mathbf{N}^{+}$，图像如图 1－5 所示.

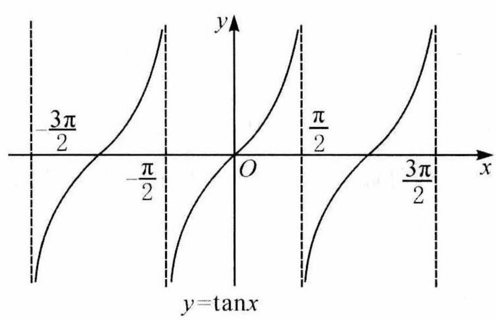


图 1－5

④**余切函数**：$y=\cot x$，$x\neq\pm k\pi$，其中 $k\in\mathbf{N}^{+}$，图像如图 1－6 所示.

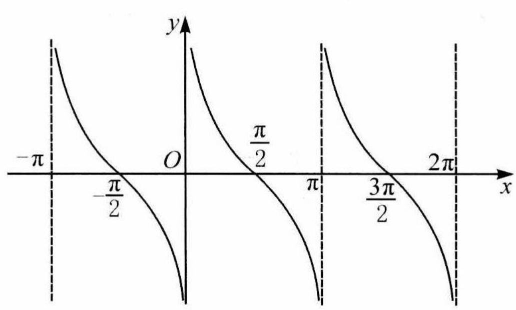


图 1－6

⑤**余切、余割函数**：$y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$；$y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$，这两个函数的图像不需要掌握.

注意

三角函数重要公式：

①$\sin^2 x+\cos^2 x=1$； ②$1+\tan^2 x=\sec^2 x$；

③$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$； ④$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$；

⑤$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$； ⑥$\sin 2x=2\sin x\cos x$；

⑦$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x=\cos^2 x-\sin^2 x$；

⑧万能公式：令 $t=\tan\dfrac{x}{2}$，有 $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

(6)**反三角函数**：

①**反正弦函数**：$y=\arcsin x$，$x\in[-1,1]$，图像如图 1－7 所示.

②**反余弦函数**：$y=\arccos x$，$x\in[-1,1]$，图像如图 1－8 所示.

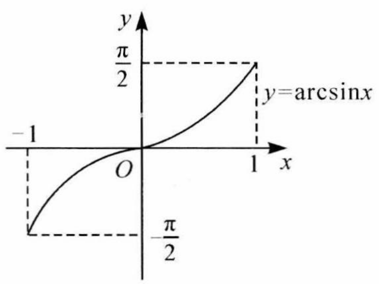


图 1－7

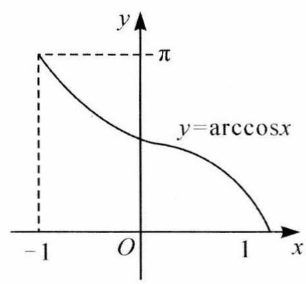


图 1－8

③**反正切函数**：$y=\arctan x$，$x\in\mathbf{R}$，图像如图 1－9 所示.

④**反余切函数**：$y=\operatorname{arccot} x$，$x\in\mathbf{R}$，图像如图 1－10 所示.

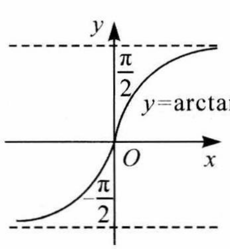


图 1－9

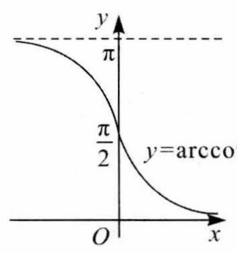


图 1－10

注意

反三角函数公式：

①$\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in[-1,1]$； ②$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

说明：基本初等函数的性质、运算公式及其图像很重要.例如以后经常会用到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x$，$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x$，等等.这就需要对于 $y=\arctan x$，$y=e^x$，$y=\ln x$ 等这

些基本初等函数的图像非常清楚.

2. 复合函数与初等函数

(1)复合函数

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 U，$u=g(x)$ 的定义域为 D，值域为 U^*.若 $U^*\subseteq U$，则称 $y=f[g(x)]$ 是定义在 D 上的复合函数，其中 u 称为中间变量.此外，称 $y=f(u)$ 为外函数，称 $u=g(x)$ 为内函数.

注意

关于复合函数的一般题型有三类：

(1)已知外函数 $y=f(u)$ 和内函数 $u=g(x)$，求复合函数 $y=f[g(x)]$ 及它的相关特性；

(2)已知外函数 $y=f(u)$ 和复合函数 $y=f[g(x)]$，求内函数 $u=g(x)$.可以通过等式 $f(u)=f[g(x)]$，求解出 $u=g(x)$ 的表达式.

(3)已知复合函数 $y=f[g(x)]$ 和内函数 $u=g(x)$，求外函数 $y=f(u)$.

例 1 已知 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，求 $f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]$.

【解析】 因为 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$，所以 $\dfrac{1}{f(x)-1}=\dfrac{1}{\dfrac{x}{x-1}-1}=x-1$，

故有 $f\left[\dfrac{1}{f(x)-1}\right]=f(x-1)=\dfrac{x-1}{x-1-1}=\dfrac{x-1}{x-2}$.

例 2 已知 $f(x)=\ln(1+x)$，$f[g(x)]=x$，求 $g(x)$.

【解析】 因为 $f(x)=\ln(1+x)$ 且 $f[g(x)]=x$，所以 $f[g(x)]=\ln[1+g(x)]=x$.

由此解得
$$g(x)=e^x-1.$$

例 3 设 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x$，求 $f(x)$.

【分析】 已知复合函数和内函数，求外函数的表达式的一般方法是内函数替代.

【解析】 令 $t=e^x+1$，则 $e^x=t-1$.因此
$$f(t)=f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+x=(t-1)^2+(t-1)+\ln(t-1),$$
化简可得：
$$f(t)=t^2-t+\ln(t-1),$$
因此
$$f(x)=x^2-x+\ln(x-1).$$

例 4 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

【解析】 因为 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，所以 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，

故有
$$f(x)=x^2-2.$$

例 5 设 $f\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)=3f(x)-2x$，求 $f(x)$.

【解析】令 $t=\dfrac{x+1}{x-1}$,即有 $x=\dfrac{t+1}{t-1}$,代入原式可得 $f(t)=3f\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)-2\cdot\dfrac{t+1}{t-1}\cdots$,(1)

又令 $x=t$,可得 $f\left(\dfrac{t+1}{t-1}\right)=3f(t)-2t\cdots$.(2)

联立(1)(2)式求解可得:$f(t)=\dfrac{3}{4}t+\dfrac{t+1}{4(t-1)}$,因此 $f(x)=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{x+1}{4(x-1)}$.

例 6 已知 $f(\sin x)=3-\cos^2 x$,求证:$f(\cos x)=2+\cos^2 x$.

【分析】当函数中自变量不一致时,可以用换元法将函数化简.

【解析】令 $t=\sin x$,由 $f(\sin x)=3-\cos^2 x=3-(1-\sin^2 x)=2+\sin^2 x$ 可知:

$$f(t)=2+t^2,$$

因此

$$f(\cos x)=2+\cos^2 x.$$

(2)初等函数

定义 由基本初等函数经过**有限次**加、减、乘、除四则运算及复合运算所得到的可用一个表达式表示的函数称为初等函数.

注意

初等函数在其定义域内都连续.

试想一下,是否随便写一个函数都是初等函数呢?那能否写出一个非初等函数呢?答案是肯定的,下面所讲的分段函数就不一定是初等函数.

3. 分段函数

定义 在定义域 D 内,用两个或两个以上不同表达式来表示的函数称为**分段函数**.

例如 $y=f(x)=\begin{cases}x+1, & x<-1,\\ x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 5x, & x>1\end{cases}$ 是一个分段函数,它有两个分段点 $x=-1$ 和 $x=1$,它们两侧的函数表达式不同.

注意

(1)虽然分段函数至少要用两个或两个以上表达式来表示,但分段函数是一个函数,而不是几个函数,只是在不同的区间用不同的表达式来表示而已.

(2)若分段函数在某个分段点有定义,且在该分段点不连续,则该分段函数不是初等函数,因为初等函数在其定义域内都连续.

(3)一般情况下,分段函数在分段点处求极限,讨论分段点的连续性及分段点的可导性时,必须用定义(即左极限、右极限,左导、右导).这是考研的重点,在后面有具体题目说明.

(4)设 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,若被积函数 $f(x)$ 为分段函数,则变上限积分函数 $F(x)$ 也为分段函数,且 $F(x)$ 与 $f(x)$ 有相同的分段点.在 $f(x)$ 的各分段区间内,分别求出 $F(x)$ 表达式即可.

例如已知 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 3-x, & 1\leqslant x<2,\\ x^2, & 2\leqslant x<3,\end{cases}$ 求 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(5)常见的分段函数有:

①**绝对值函数:**$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 图像如图 1—11 所示.

②**符号函数:**$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 图像如图 1—12 所示.

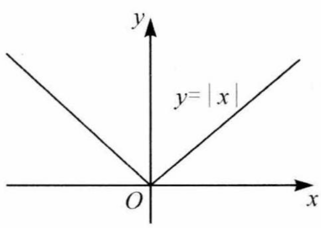


图 1—11

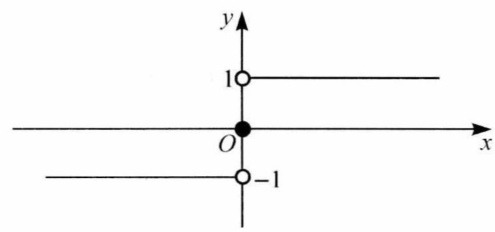


图 1—12

显然由绝对值函数与符号函数的定义,有 $x\operatorname{sgn}x=|x|,x\in(-\infty,+\infty)$ 成立.

③**取下整函数:**$f(x)=[x]$,其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数.一般地,$[x]=n$,当 $n\leqslant x<n+1$ 时,$n=\cdots-2,-1,0,1,2,\cdots$,例如:$[-\pi]=-4,[\mathrm{e}]=2$.

说明:(1)取下整函数有如下重要不等式:$x-1<[x]\leqslant x$,此不等式经常结合夹逼准则求极限.在本书中无特殊说明,中括号并不是取下整意义.

(2)$\forall n\in\mathbf{N}^+$,有$[x+n]=[x]+n$ 成立.

④**狄里克雷函数:**
$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$$

说明:此函数的图像无法在坐标轴上描述.

⑤**最大值函数:**
$$F(x)=\max\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}f(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ g(x), & f(x)<g(x)\end{cases}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|].$$

⑥**最小值函数:**
$$G(x)=\min\{f(x),g(x)\}=\begin{cases}g(x), & f(x)\geqslant g(x)\\ f(x), & f(x)<g(x)\end{cases}=\frac{1}{2}[f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|].$$

说明:以上最大值函数和最小值函数有如下重要性质:

(1)$F(x)+G(x)=f(x)+g(x)$;