勾三股四弦五你会证吗?
全世界有400多种证法你知道吗?

挑战思维极限

勾股定理的365种证明

李迈新◎编著

最全最具代表性的证法都在这里

把思维挂到最大挡，起飞~

清华大学出版社

挑战思维极限

勾股定理的365种证明

李迈新◎编著

清華大学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要介绍了勾股定理的365种证明方法，并按证法的类型进行归纳、整理和总结，让读者有一个全面而系统的了解.

书中大多数证法用到的知识不超过初中几何的教学范围，许多证法思路巧妙，别具一格，对提高读者的几何素养大有裨益. 本书可以作为广大中学师生和数学爱好者的参考读物.

图书在版编目(CIP)数据

挑战思维极限：勾股定理的365种证明/李迈新编著.—北京：清华大学出版社，2016
ISBN 978-7-302-45879-1

Ⅰ. ①挑…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①勾股定理–定理证明　Ⅳ. ①O123.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第294593号

责任编辑：汪　操　刘远星
封面设计：蔡小波
责任校对：王淑云
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　邮　　编：100084
　社 总 机：010-62770175　　邮　　购：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：三河市金元印装有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170mm×230mm　　印　张：16　　字　数：296千字
版　　次：2016年12月第1版　　印　次：2016年12月第1次印刷
定　　价：39.80元

产品编号：061064-01

前言

勾股定理是初等几何的著名定理之一. 它的内容为“直角三角形两直角边上正方形面积之和等于斜边上正方形的面积”. 即“如果直角三角形两直角边长度分别为 a 和 b, 斜边长度为 c, 那么 $a^2 + b^2 = c^2$”.

这个定理的内容简洁优美, 证明方法也是五花八门, 各式各样. 从古到今, 无数数学家和数学爱好者都研究过这个定理的证明, 得到了很多有趣的证法. 于是就有了一个问题: 勾股定理到底有多少种不同的证明方法? 这个问题的答案在作者看来是无穷多种, 比如从本书中介绍的十字分块法就可以得到任意数目的分块方案, 每个分块方案都可以产生一个证法. 所以这个问题可以转化成: 勾股定理到底有多少种不同的有代表性的证明方法? 下面是笔者在撰写本书前查找到的一些资料, 它们的回答如下:

1. 美国数学月刊杂志于 1896—1899 年连载了一篇名为 *New and Old Proofs of the Pythagorean Theorem* 的论文, 作者为 B. F. Yanney 和 J. A. Calderhead, 里面介绍了 104 种勾股定理的不同证法.

2. E. S. Loomis 撰写的 *Pythagorean Proposition* 一书中共提到 367 种证明方法. 不过据笔者仔细阅读和研究, 该书的一些证法其本质上是相同的, 个别证法甚至存在错误, 有些证法仅是证明了等腰直角三角形的情形, 因此不算完整的证明. 即便如此, 该书中有效的证明方法也接近 300 个.

3. 由王岳庭、程其坚编著, 内蒙古人民出版社于 1985 年出版的《定理的多种证明公式的多种推导》一书中介绍了勾股定理的 48 种证法.

4. 进入 21 世纪以后, 国外的数学爱好者建立了一个和勾股定理证法相关的网站 (参见文献 [3]). 到本书定稿时, 该网站已收录了 118 种不同的证法.

本书在前人工作的基础上, 对已有的勾股定理的证法进行整理和改编, 去粗取精, 并加入了 56 种作者自己发现的证法. 最终本书给出了 365 种不同证法.

考虑到不同层次读者的知识水平，本书的内容编排尽量遵循从易到难、从特殊到一般的原则. 以分块法开头，目的是从一些简单易懂的例子出发，让小学生都能动手进行图形的裁剪和拼接，加深对这个定理的直观印象，由此再演变出割补法和面积法. 对初中生而言，面积法和相似法都是可以接受的内容，所以一个初中学生经过努力和思考，应该可以看懂书中 2/3 的内容. 最后以泛化法结尾，把勾股定理的结论一般化，符合一般读者的认知规律. 读者在阅读和思考的过程中可以不断地提升自己的数学修养，体会数学的抽象之美. 总之一句话，不论您是几何初学者还是数学大家，在这 365 种证法中，总有一“款”适合您!

需要指出的是，虽然本书的内容为勾股定理的各种证明，但本书的主要目的是挑战思维极限，这个极限并不是说去刻意追求证法的数量，而是要挑战读者的思考极限，能够将平面几何中的常见证明思路结合起来，学以致用，理解不同定理间的横向联系，达到融会贯通的目的. 如果读者在读完本书之后，开拓了自己的视野，体会到了思考的乐趣，甚至能在本书的启发之下得到新的证法，这将对读者和作者都是一件很有成就感的事. 这才是挑战自己思维极限的真正体现.

本书定稿之前，由山西临县一中李有贵老师和哈尔滨师范大学数学科学学院 2014 级黄小娟同学进行了仔细阅读和校对，修正了很多细节性错误，使本书得到了进一步完善，在这里向他们表示感谢. 由于笔者水平和精力有限，书中的疏漏、错误之处难免，敬请广大中学师生和数学爱好者提出宝贵意见.

另外由于篇幅所限，有些证法只提供了证明的思路，省略了部分辅助线的作法及详细证明过程，给广大读者留下了无限的思考空间. 欢迎感兴趣的读者就阅读过程中的疑惑、想法、建议及书中的一些不完善之处与作者联系探讨. 作者的邮箱为: lmxin@tom.com，或加入 QQ 群:284462481.

李迈新
2016 年 9 月

本书约定

为方便阅读, 这里将本书的常见约定简介如下, 以后不再赘述.

1. 除另有说明外, 本书中的 $\triangle ABC$ 均为直角三角形, 记为 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$, 其中 C 为直角. 三边长度关系满足 $a \leqslant b < c$.

2. 书中经常会遇到以某条边向三角形外侧或者内侧做正方形的情况, 如一一注明, 则篇幅太长. 故本书约定: 当证法里未对辅助线做法做详细说明时,“$BCDE$”“$ACFG$”“$ABHK$”分别代表边长为 a、b、c 的三个正方形, 分别叫做正方形 a、b、c, 有时也分别称为小正方形、大正方形和斜正方形. 比如证法 152、证法 193 等.

3. 本书中的大部分辅助线做法可以归纳为以下几种情形:

(1) 延长两条已作出直线, 求它们的交点;

(2) 过一点作某条已知直线的垂线;

(3) 过一点作某条已知直线的平行线;

(4) 以三角形的一条边向外或者向内作正方形;

(5) 作三角形的外接圆或者内切圆;

(6) 以某点为圆心，作一圆过另一已知点;

(7) 求直线和圆的交点;

(8) 作三角形的中位线;

(9) 作某个角的平分线.

由于很多相邻证法的辅助线做法类似, 如只写出一个，不免挂一漏万, 但又如各证法都写出详细的辅助线做法, 又有重复之嫌. 故作者的解决方案为: 对前述的情形 (1)~(7), 由于可以直接观察得出, 故一般不在证法中另外说明, 角分线和中位线则会明确指出.

4. 当以某条边为边长向外做正方形时, 为醒目起见, 该正方形的 4 条边均用实线画出, 其他辅助线仍然用虚线.

5. 对使用面积法的某些证法，会用实线将整个图形的边界标出，使读者能够直接看出要计算面积的区域.

6. 对比较明显又经常出现的三点共线和三线共点的情形，一般不做证明，直接使用该结论. 比如图 9.14 中做出正方形 $ACFG$ 和 $ABHK$ 之后，则易证 K、F、G 三点共线.

7. 每种证法以符号“□”作为证法的结束.

目录

第 1 章 分块法

分块法的主要思想是为了证明两个图形的面积相等, 先将两个图形分割成一些数目相同的图块, 然后证明每组对应的图块面积相等, 即可证明两个图形的总面积相等.

在证明两个不规则的子图块全等时, 往往需要用到下面的多边形全等判定条件. 它可以看作是判断两个三角形是否全等的角边角定理在多边形中的推广.

定理 1.1 如图 1.1 所示, 设两个多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 同时满足如下条件, 则它们全等.

(1) 两个多边形的边数都为 n.

(2) 各内角对应相等, 即 $\angle A_1=\angle B_1,\angle A_2=\angle B_2,\cdots,\angle A_n=\angle B_n$.

(3) 有 $n-2$ 条连续边对应相等, 即 $a_1=b_1,a_2=b_2,\cdots,a_{n-2}=b_{n-2}$.

证 如图 1.1 所示, 由 $a_1=b_1,a_2=b_2,\angle A_2=\angle B_2$ 可知 $\triangle A_3A_2A_1\cong\triangle B_3B_2B_1$, 故 $\angle 1=\angle 1',A_1A_3=B_1B_3$, 又已知 $\angle A_4A_3A_2=\angle B_4B_3B_2$, 所以 $\angle 2=\angle 2'$, 于是由边角边定理知 $\triangle A_1A_3A_4\cong\triangle B_1B_3B_4$, 同理可证 $\triangle A_1A_4A_5\cong\triangle B_1B_4B_5$, 依次类推直到 $A_1A_{n-2}A_{n-1}\cong\triangle B_1B_{n-2}B_{n-1}$.于是可知 $A_1A_{n-1}=B_1B_{n-1},\angle\alpha=\angle\alpha'$, $\angle A_{n-2}A_{n-1}A_n=\angle B_{n-2}B_{n-1}B_n$.

再由 $\angle 3=\angle 3',\angle 4=\angle 4',\cdots,\angle\alpha=\angle\alpha'$ 可知 $\angle A_2A_1A_{n-1}=\angle B_2B_1B_{n-1}$, 再从 $\angle A_2A_1A_n=\angle B_2B_1B_n$ 可知 $\angle\beta=\angle\beta'$. 然后根据角边角定理知 $\triangle A_1A_{n-1}A_n\cong\triangle B_1B_{n-1}B_n$. 故 $A_{n-1}A_n=B_{n-1}B_n,A_nA_1=B_nB_1$. 从而 $A_1A_2\cdots A_n$ 和 $B_1B_2\cdots B_n$ 对应角相等, 对应边也相等, 因此它们全等.

在应用定理 1.1 时, 条件 (1) 和条件 (2) 往往是容易验证的. 所以本书中在判定两个图块全等时, 一般只需证明它们满足条件 (3) 即可. 参见后面的证法 1 和证法 4.

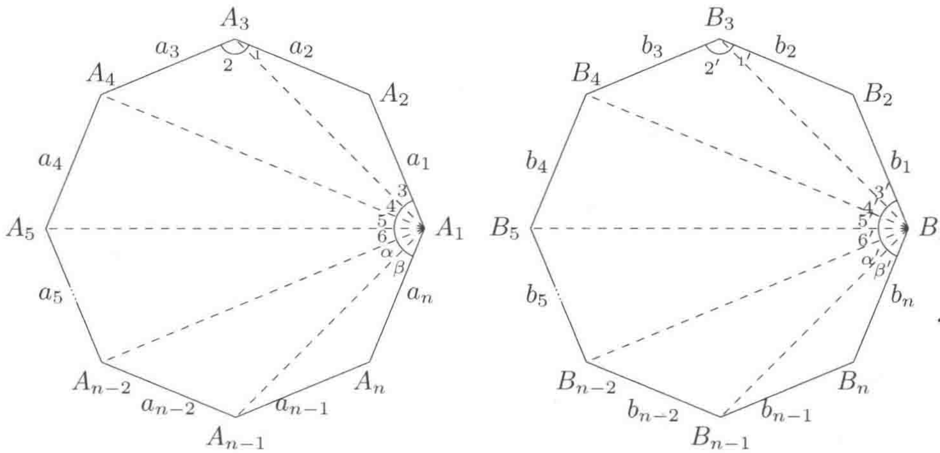


图 1.1

1.1 分块对应法

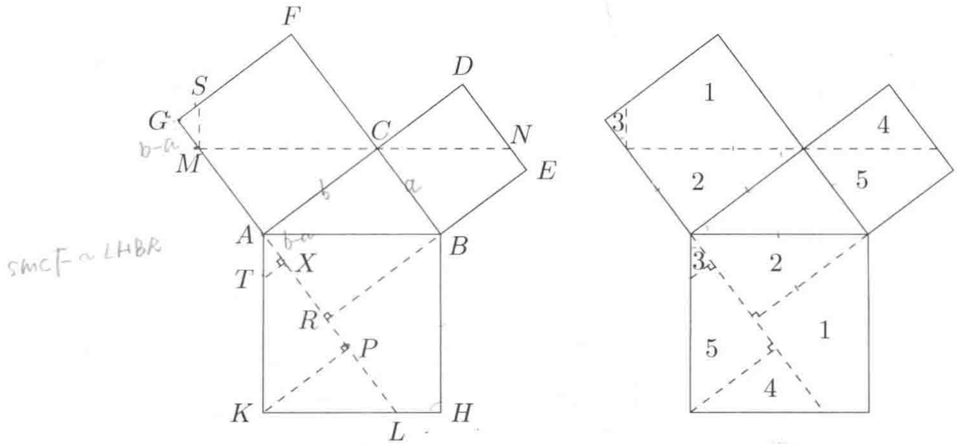
分块对应法是最直观的分块法, 它的要点是将两个图形分解成对应全等的子图块, 并为每组对应的图块进行相同的编号, 从而得到两个图形面积相等的结论. 在参考文献 [2] 中有很多用分块对应法证明勾股定理的例子, 比如下面的证法 1～证法 7, 它们都非常有代表性, 都可以看成弦图 (见第 6 章“拼摆法”中的图 6.1) 的变种. 请读者自行体会其中的演变.

证法 1 如图 1.2(a) 所示. 显然四边形 $SMCF$ 和 $LHBR$ 的四个角对应相等, 以及 $BH=AB=MC$, $BR=AC=FC$, 由定理 1.1 知这两个四边形全等. 再截取 $AX=GM=b-a(AM=BC=a)$, 易证 $\mathrm{Rt}\triangle AXT\cong\mathrm{Rt}\triangle MGS$. 故 $XP=b-(b-a)=a=BE(AP=BR=AC=b)$, 再由 $KP=BC$ 和定理 1.1 可知两个直角梯形 $TXPK$ 和 $NEBC$ 全等.

综上所述, 可知子图 (b) 中编号相同的图块各自对应全等, 即大正方形面积为两个小正方形面积之和, 于是立得 $c^2=a^2+b^2$. □

证法 2 如图 1.3 所示, 仿照证法 1 易证各同编号的图块对应全等, 于是立得 $c^2=a^2+b^2$. □

证法 3 如图 1.4 所示, 其中图块 4 为直角梯形, 高和下底均为 a. 仿照证



(a) (b)

图 1.2

法 1 易证各同编号的图块对应全等, 于是立得

$$S_{ABHK}=\sum_{i=1}^{8}S_i=a^2+b^2=S_{BCDE}+S_{ACFG}. \qquad \square$$

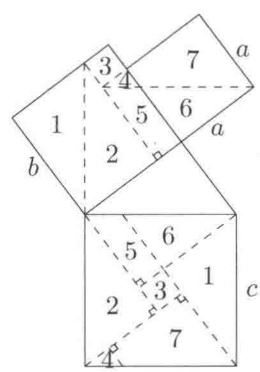


图 1.3

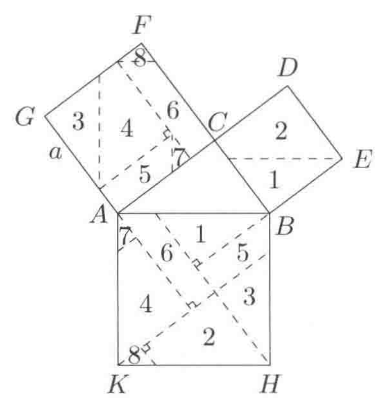
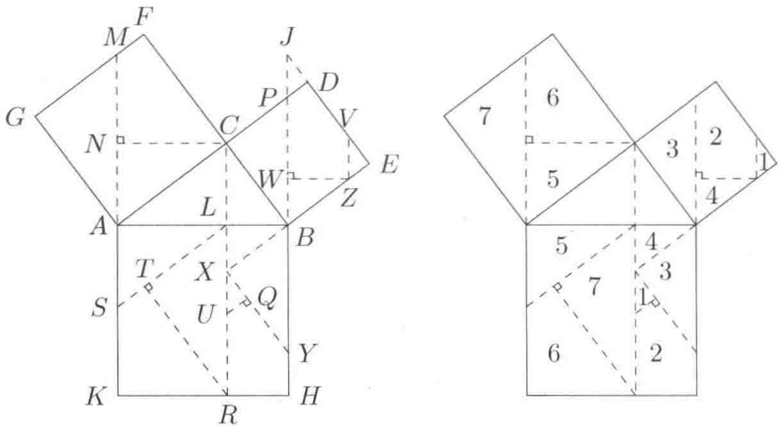


图 1.4

证法 4 如图 1.5(a) 所示, 截取 $PW=CL$, 则有 $BW=XL \implies \text{Rt}\triangle BZW\cong \text{Rt}\triangle XBL$, 故 $WZ=BL=RH$. 再截取 $XU=VZ$. 作 $UQ\perp XY$, 则 $\text{Rt}\triangle XUQ\cong \text{Rt}\triangle VZE$. 于是有 $UQ=ZE.XQ=VE \implies$

$QY = VD$. 又易知 $BZ = BX = CP$, 故 $BE - BZ = CD - CP$, 得 $ZE = PD \implies \mathrm{Rt}\triangle ZEV \cong \mathrm{Rt}\triangle PDJ \implies PJ = VZ = XU$. 再考虑到 $BJ = AB = LR$, 于是可得 $LR - LX - XU = BJ - BW - PJ \implies UR = PW$.



(a) (b)

图 1.5

现在可知两五边形 $PDVZW$ 和 $UQYHR$ 有三组连续边对应相等: $RU = WP, UQ = PD, QY = DV$, 又显然可以看出这两个五边形的对应角相等, 于是根据定理 1.1 知它们全等.

类似可证子图 (b) 中其他编号相同的图块对应全等, 最后可得 $c^2 = a^2 + b^2$.

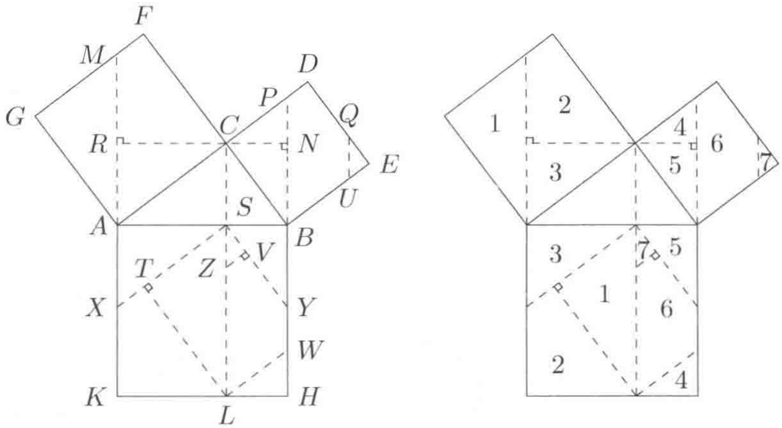
□

证法 5 如图 1.6(a) 所示, 截取 $BU = CP$, $SZ = QU$, 仿照证法 4 可知 $BP + QU = c$, 于是 $LZ = BP$, 再考虑到 $ZV = UE = PD$, $LW = CP = BU$, 便可根据定理 1.1 知五边形 $LZVYW$ 和 $BPDQU$ 全等.

易证 $TL = AC = CF$, $KL = RC$, 根据定理 1.1 知四边形 $KLTX$ 和 $RCFM$ 全等. 又易证子图 (b) 中其他同编号的图块对应全等, 故 $c^2 = a^2 + b^2$.

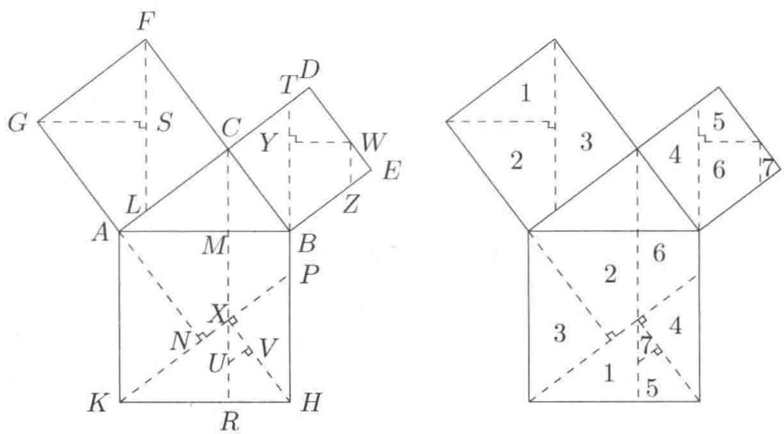
□

证法 6 如图 1.7(a) 所示, 作 $KP \parallel AC$ 交 CR 于 X, 显然 $CX = AK = BH$, 于是 $CXHB$ 是平行四边形, 故 $XH \parallel BC \parallel AN$. 从而 $\angle PXH = \angle CAN = 90^\circ$. 再考虑到 $PX = CT$, 可知 $\mathrm{Rt}\triangle PXH \cong \mathrm{Rt}\triangle TCB$.



(a) (b)

图 1.6



(a) (b)

图 1.7

现在截取 $BZ = CT, XU = WZ$, 再仿照证法 4 可证子图 (b) 中其他同编号的图块对应全等. 于是可得

$$S_{ABHK} = \sum_{i=1}^{7} S_i = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \qquad \square$$

证法 7 如图 1.8(a) 所示, 截取 $KL = CT$, $BP = CN$, 并将两直角边上的正方形按子图 (b) 进行分块和编号. 然后在子图 (c) 中作内正方形 $ABHK$, 截

取 $AX = KM, CI = HN$. 再将正方形 $ABHK$ 按子图 (d) 进行分块和编号.

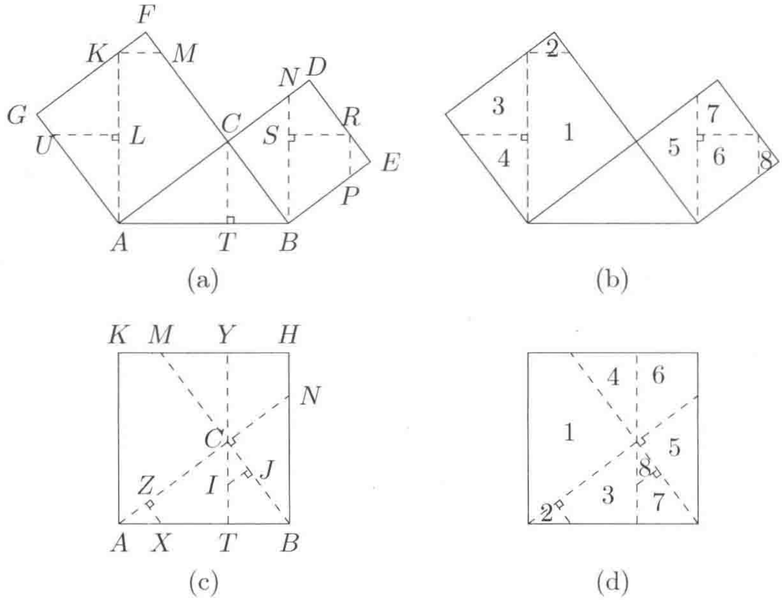


图 1.8

容易验证子图 (b) 和 (d) 中相同编号的图块对应全等, 故

$$S_{ABHK} = \sum_{i=1}^{8} S_i = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \qquad \square$$

下面的证法 8 利用角分线进行分块, 别有一番情趣.

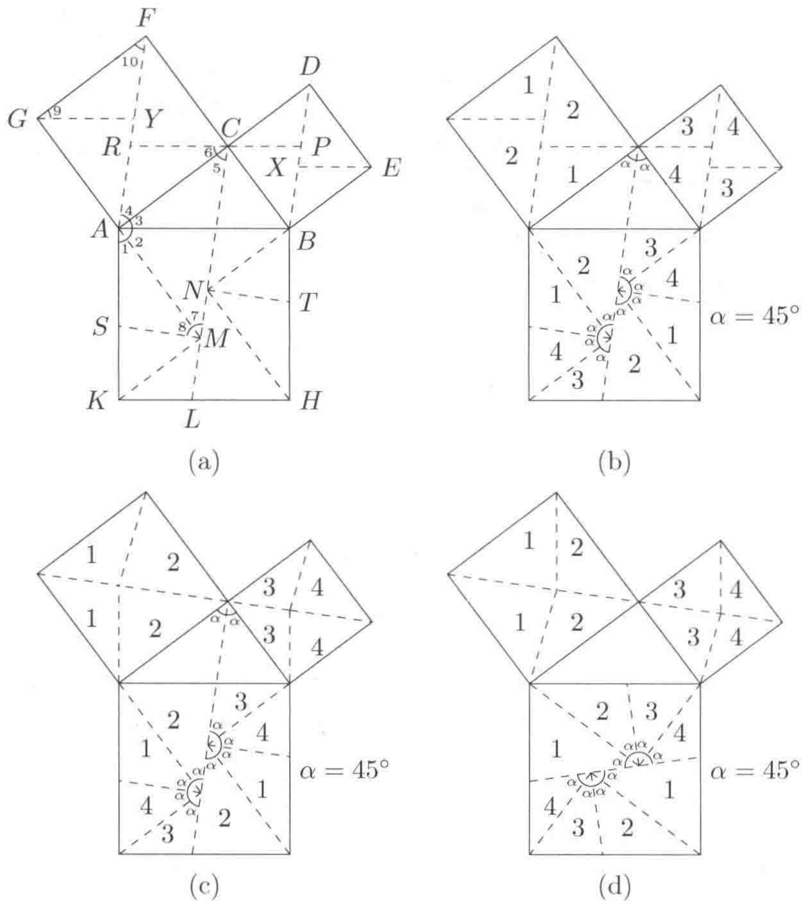
证法 8 如图 1.9(a) 所示, 作 AB 的三条平行线 GY, RP 和 EX. 易知 $\angle 10 = \angle 4, \angle 6 = \angle 9$, 再由 $AC = FG$ 可知 $\triangle GFY \cong \triangle CAR$.

现在作 CL 平分 $\angle ACB$, 则 $CL /\!/ AF /\!/ BD$. 且 $\angle 5 = 45^\circ = \angle 7 \implies CA = AM$, 再考虑到 $\angle 1 = \angle 3, AK = AB$, 可知 $\triangle AKM \cong \triangle ABC$, 于是 $\angle AMK$ 为直角, 同理可证 $NH \perp BN$. 设 SM 和 NT 分别为 $\angle AMK$ 和 $\angle BNH$ 的平分线, 则由 $\angle 8 = 45^\circ = \angle 4$, $\angle 6 = \angle 3 = \angle 1$, $AM = AC$ 可知 $\triangle AMS \cong \triangle CAR$. 同理可证 $\triangle HNT \cong \triangle CAR$.

综上所述, 我们就证明了子图 (b) 中所有编号为 1 的三角形彼此全等. 类似可证子图 (b) 中其他同编号的三角形彼此全等, 于是由子图 (a) 和 (b) 立得

$$S_{ABHK} = 2\sum_{i=1}^{4} S_i = S_{ACFG} + S_{BCDE}. \qquad \square$$

历史上还出现过和图 1.9(b) 类似的另外两个分块方案, 即参考文献 [2] 中的第 19 个和第 24 个几何证法, 我们把它们集中到图 1.9 的子图 (c) 和 (d) 中, 使读者有一个更全面的了解.



(a) (b) (c) (d)

图 1.9

下面看一个利用正方形的对角线 (其实也是角分线) 进行分块的例子, 即证法 9.

证法 9 如图 1.10(a) 所示, 截取 $GM = CL = a$. 易证 $ALNM$ 和 $XZYW$ 都是边长为 $b-a$ 的正方形, 所以它们面积相等. 再从 $\angle 2 = \angle 4 = \angle 5$ 和

$\angle 2+\angle 1=90°$, $\angle 5+\angle 6=90°$ 可知 $\angle 1=\angle 6$. 现在截取 $KS=b-a=MN$, 再由 $MF=AB=KH$ 及 $\angle MNF=135°=\angle KSH$ 可知 $\triangle FMN \cong \triangle HKS$. 再截取 $BR=b-a$, 同理可证 $\triangle ABR \cong \triangle FLN$.

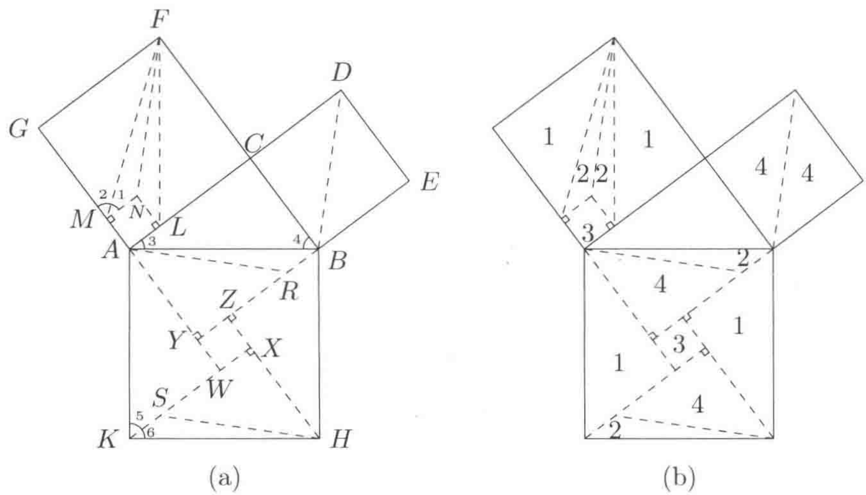


图 1.10

综上所述, 我们证明了子图 (b) 中所有编号为 2 的三角形彼此全等. 类似可证子图 (b) 中其他同编号的图块对应全等, 于是由子图 (a) 和 (b) 立得

$$S_{ABHK}=2(S_1+S_2+S_4)+S_3=S_{ACFG}+S_{BCDE}. \qquad \square$$

1.2 镶嵌法

前一节介绍的分块方案都是历史上比较经典的案例, 体现了数学爱好者的智慧. 到了 21 世纪, 随着计算机技术的发展, 人们又发现了用计算机批量生成勾股定理证明方法的途径.

在参考文献 [6] 中就描述了这样一个新颖的思路: 构造两种不同的正方形瓷砖, 边长分别为 a 和 b. 把它们按图 1.11 所示的方式进行摆放, 显然可以铺满一个无穷平面. 现在再构造一个边长为 c 的瓷砖, 把它随机地放到平面上的任意位置, 那么随着瓷砖 c 每放到任何一个不同的位置, 都可以得到一个不同的分块证法. 这个思路的英文原名是“Tessellation”, 中文可以理解为“镶嵌”, 这即是本节名称的来源.