

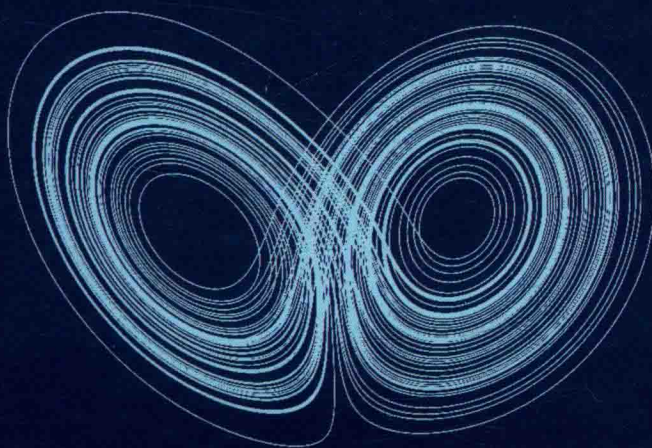


国家科学技术学术著作出版基金资助  
2017年精品出版省级重点出版物

# Lorenz混沌族 中若干数学问题新研究

NEW RESEARCH ON SOME MATHEMATICAL PROBLEMS  
OF LORENZ CHAOTIC FAMILY

廖晓昕 著



华中科技大学出版社

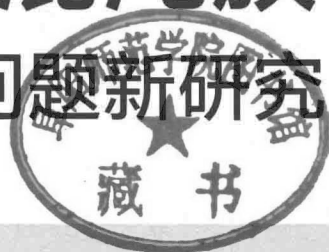
<http://www.hustp.com>



国家科学技术学术著作出版基金资助  
2017年精品出版省级重点出版物

# Lorenz混沌族

## 中若干数学问题新研究



廖晓昕 著



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

## 内 容 简 介

本书以多个广义正定、径向无界的  $V$  函数为纲,综合利用 Lyapunov、Lagrange 稳定性理论和 LaSalle 不变原理,深入地研究了 Lorenz 混沌族中的核心数学问题,构造了全局指数吸引集,得到了平衡态的简洁代数充要条件及参数分支值的显式公式,以最少保守的反馈律应用到混沌控制、跟踪及同步。

全书内容集作者多年来的研究成果,具有一定的特色,使丰富的混沌理论和应用宝库又添异彩。本书还特别讲述了作者的写作初衷、写作动机和写作过程,推心置腹地谈了研究技巧、心得、体会和经验,可以供数学、物理、信息科学的研究者参考,还可供大学本科生和研究生参考。

### 图书在版编目(CIP)数据

Lorenz 混沌族中若干数学问题新研究/廖晓昕著. —武汉:华中科技大学出版社,2017.4  
ISBN 978-7-5680-2621-5

I. ①L… II. ①廖… III. ①混沌-数学方法 IV. ①O415.5 ②O411

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 053185 号

### Lorenz 混沌族中若干数学问题新研究

廖晓昕 著

Lorenz Hundunzu zhong Ruogan Shuxue Wenti Xin Yanjiu

策划编辑:姜新祺 王汉江

责任编辑:王汉江

封面设计:原色设计

责任校对:张琳

责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

电话:(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园

邮编:430223

录排:武汉市洪山区佳年华文印部

印刷:湖北新华印务有限公司

开本:710mm×1000mm 1/16

印张:13 插页:3

字数:260千字

版次:2017年4月第1版第1次印刷

定价:88.00元



华中出版

本书若有印装质量问题,请向出版社营销中心调换  
全国免费服务热线:400-6679-118 竭诚为您服务  
版权所有 侵权必究

**NEW RESEARCH ON SOME MATHEMATICAL PROBLEMS  
OF LORENZ CHAOTIC FAMILY**





# РОССИЙСКАЯ ИНЖЕНЕРНАЯ АКАДЕМИЯ

Российская Федерация, 125009, г. Москва,  
Газетный пер., д. 9, стр. 4

«22» September 2016 г. № 53-3

Тел.: (495) 629-94-31  
Факс: (495) 510-21-60  
E-mail: info-rae@mail.ru

## EXTRACT FROM THE PROTOCOL № 53 OF THE SESSION OF THE PRESIDUM OF THE RUSSIAN ACADEMY OF ENGINEERING

Moscow

September 22, 2016

### DECIDED:

For outstanding achievements in scientific and educational activity, great contribution to the development of the theory of sustainability as well as for special achievements in the implementation of large projects, development of interstate scientific-technical relations

### REWARD:

**Gold medal of the Russian Academy of Engineering**

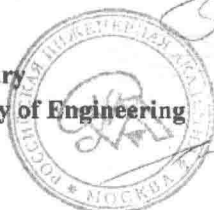
**Liao Xiaoxin**

**President  
of the Russian Academy of Engineering**

**B.V. Gusev**

**Chief Scientific Secretary  
of the Russian Academy of Engineering**

**L.A. Ivanov**



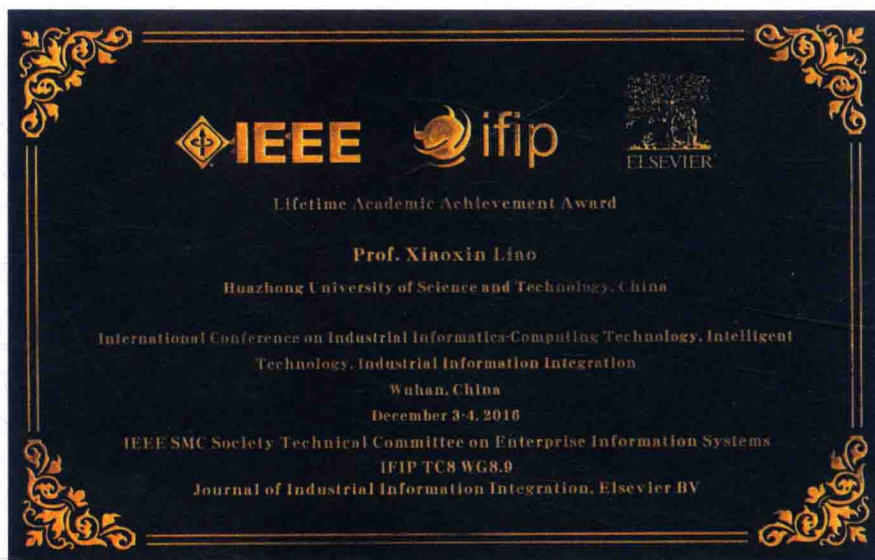
2016年9月, 俄罗斯工程院授予廖晓昕教授金质奖章和荣誉证书的信函



金质奖章正面



金质奖章背面



在ICIICII 2016大会上, IEEE、IFIP、Elsevier三大学术或出版组织的下属机构授予廖晓昕教授终身成就奖



# 作者简介

廖晓昕,1938年出生于湖南省新化县,1963年毕业于武汉大学数学系.20世纪80年代分别在复旦大学进修一年、南京大学中美高级研讨班进修三个月;受中国科学院数学研究所的邀请访问中国科学院三个月,并先后在数学所、力学所、自动化所、系统所和北京大学作学术报告.1993—1994年在美国南加州大学从事高访研究,后受英国皇家学会邀请,进行了为期半年的合作研究,其首创成果“随机神经网络”受日本资助邀请在IFAC大会上作学术报告.先后在华中师范大学、华中理工大学(现华中科技大学)数学系任教,20世纪90年代以来在华中科技大学控制科学与工程系(现自动化学院)任教授、博导,共培养硕士22名、博士18名、博士后7名.

长期从事动力系统的稳定性、非线性控制、神经网络和混沌理论的研究,共发表论文近300篇,其中在美国、英国、德国、法国、日本、俄罗斯和加拿大等国外权威期刊上发表论文50多篇,在《中国科学》(中、英文版)期刊上发表论文27篇,重要成果被SCI原文收录100多篇,他引SCI收录近5000次,其他著作、论文被国内外引用上万次.两次受到王宽诚教育基金会资助,受首届非线性世界大会(1992年,美国)和第三届非线性世界大会(2000年,意大利)特邀就“神经网络动力行为”分别作了45分钟和60分钟的学术报告.

在国际权威出版机构Springer、Elsevier、Kluwer出版英文专著三本.在国内出版中文专著三本,其中,《稳定性的数学理论及应用》获第十三届中国图书奖和第十四届中国专项图书奖,《动力系统的稳定性理论和应用》获解放军第四届全军优秀图书奖,这两本书被列为2016年控制科学与自动化学科研究生推荐教材.作为特约撰稿人完成了《世界数学家思想方法》一书中关于当代数学家廖山涛的写作.

独自获湖北省自然科学一等奖一次、国家教委科技进步二等奖两次,作为导师带领的博士生团队获省部级自然科学一等奖三项.

1988年获国家级有突出贡献的中青年专家称号,1989年获全国优秀教师奖,1998年获宝钢优秀教师奖、全国100篇优秀博士论文提名奖和湖北省优秀博士论文指导教师奖、华中理工大学优秀研究生导师奖.1993年起享受国务院政府特殊津贴.

鉴于他在动力系统稳定性理论及应用方面的杰出成就,2016年9月俄罗斯工程院授予他金质奖章和荣誉证书.在ICHIH 2016大会上,IEEE、IFIP、Elsevier三大学术或出版组织的下属机构授予他终身成就奖.

多次应香港大学、香港中文大学、香港城市大学、加拿大西安大略大学邀请,参与合作研究,目前仍活跃在学术前沿,不断有成果问世.

# 序 一

承蒙作者信赖,诚邀我为本书写“序”,但我既非混沌研究方面的专家,也谈不上对混沌学有多深的了解,写“序”确有难处.幸喜混沌学专家陈关荣院士对本书内容有详尽的评论,这样可不必对书中具体内容进行评述.我与作者既是老同事、老朋友,又有过长期的科研合作,对作者的学术风格、思维方式、治学精神比较了解,故欣然同意作此“序”,以兹补充.

早年,当 *Nature* 和 *Science* 尚未在中国有巨大的影响力时,我就在《中国科学》上读过作者的多篇论文,深知作为中国普通高校的一名普通教师,能登上如此神圣的科学殿堂,绝非易事.故我在华中理工大学任校长时,不拘一格,把他从华中师范大学引进到我校,同时为他营造了一个良好的学术研究平台,以为国家做出更大的贡献.后来其成绩果然不负众望.

20 世纪 80 年代末,《人民日报》、中央电视台就报道了他解决了苏联科学家从飞机自动驾驶仪中提出的一个半世纪悬而未决的著名的 Lurie 问题,苏、美、德等国的数学评论杂志都给予了好评,国内权威的《中国科学》《数学学报》《数学年刊》也相继发表了其成果.他的两本中文专著分别获得中国图书奖和全军优秀图书奖,特别是最近,俄罗斯工程院为奖励他对推进、发展苏联首创的 Lyapunov 稳定性的贡献,尤其是在解决著名的 Lurie 问题方面的突出贡献,特颁发给他一枚金质奖章及获奖证书.在 ICHCI 2016 大会上,IEEE、IFIP、Elsevier 三大学术或出版组织的下属机构授予他终身成就奖.更难能可贵的是,即将进入耄耋之年的他,仍然位居中国高被引学者榜单前列.

本书是作者退休之后十多年来对 Lorenz 系统中核心数学问题研究成果的结晶.作者在前言中开门见山地谈到,其研究的缘起是偶然听过我的一次人文报告,其中提到了“蝴蝶效应”,引发了作者对“蝴蝶效应”的好奇心.当猛然发现世界数学大师 Smale 居然把 Lorenz 蝴蝶吸引子存在性的数学证明,列为 21 世纪第 14 大数学难题向全球征解时,他坚定了深入研究“蝴蝶效应”中的数学问题的信念.“板凳要坐十年冷,文章不写半句空.”经过十多年的努力,作者获得了今天的成果.



我对数学工作者的独特的思维方式一向敬佩,很赞同黑格尔对数学家价值观的欣赏:我赞美数学的优美和力量,它有战术上的技巧和灵活,又有战略上的雄才远虑。

善于类比、富于联想正是作者做数学研究的显著特点。他特别善于把生活中司空见惯的事情与他正在研究的数学问题紧密地联系起来,触发灵感,产生新的思想。例如,他曾告诉过我,他对 Lurie 问题的研究,先是通过漫长岁月学习前人对该问题的主要成果、经验和教训,然后研究半个世纪以来进展甚微的原因。他发现研究文章不少,但总是反复地在系统的系数矩阵上做文章,未抓住问题的本质。他说他曾一次又一次地观看杂技演员高空走钢丝的表演,发现表演水平与演员的性别、年龄的关系不大,除了艰苦的训练外,其关键在于演员手中用于反馈纠偏、调节平衡的横杆要绝对灵敏,稍有偏差,反馈不及时,或反馈纠偏过胜,就会坠落。由此他联想到解决 Lurie 问题的关键在于反馈控制机构要绝对灵活、稳定。于是,他先通过拓扑变换把反馈变量变成状态变量,绕过前人屡犯错误的暗礁,然后提出了部分变元、反馈流形绝对稳定新概念、新思想和新方法,开展了全新思维的研究,解决了 Lurie 问题。

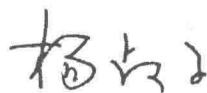
又如,他曾读过我的一篇杂文,其中谈到漫画家抓住人的突出特征几笔就能把一个要描绘的人物画得十分逼真。于是,他马上联想到数学中化常微分方程和差分方程为代数方程,以及方程的特征值、特征向量理论。为何苏联著名控制论专家艾尔曼把非线性系统形式地变为线性系统,套用“特征值”法的猜想失败?为何苏联学派首创而且广传的冻结系数法,将线性定常系统的“特征值”理论推广到时变系统,条件十分苛刻?他认为恐怕还是对“特征值”的本质认识不清造成的,于是他决定要彻底弄清楚“特征值”理论的最原始的由来,从而说明只适合于线性定常系统的“特征值”理论不能用类比、联想法盲目推广到其他系统的理由。

独立思考、决不盲从,愿知其然,更愿知其所以然,则是作者治学的突出风格。全球掀起神经网络研究热潮时,我校也积极开展这个课题的研究,我特邀请他参加我们的团队。在长期的讨论、磋商中,我们发现他对任何新思想、新方法,除了欣赏之外,更喜欢追根溯源,多问几个为什么。例如, Hopfield 神经网络和细胞神经网络共同开创了神经计算的先河,它们用电子电路实现的微分方程的流和吸引子能自动完成优化计算、联想记忆和系统辨识。但他不盲从理论,积极探讨 Hopfield 神经网络稳定性、Lyapunov 稳定性、Lagrange 稳定性之间的种种关系,对 Hopfield 神经网络特别是细胞神经网络的数学理论,大胆提出了质疑、修正和更新,取得了很好的成果,他应邀在首届和第三届非线性分析世界大会报告了关于神经网络的数学理论,《中国科学》连续发表了我们的多篇神经网络方面的论文。

作者一生最大的兴趣就是研究数学。本书的前言和后记比较详细地介绍了本书的写作初衷、动机、目的,以及研究过程中遇到的具体难关,鸿沟如何克服和跨越,如

何学习前人(特别是大师)的技能技巧,同时又不拘泥于现有的思想和方法,敢于大胆提出新概念、新思想和新方法,找到新问题的突破口,选准攻坚的方向及核心目标,然后借鉴前人的经验和知识,综合应用,做出符合逻辑的推理,再顺理成章地展开,等等,从中我们不难感受到作者对于数学研究的兴趣和执着,更能感受到其中蕴含的闪光的治学态度和治学精神.

是为序.



中国科学院院士

2017年3月于武汉喻家山

# 序 二

读者不妨从窗口往外四处环视,看看在自然界里有没有什么线性形状的东西不是人工制造的呢? 云朵、树叶、山脊、动物的各种边缘轮廓……是非线性的,即便是水平面甚至光线,从宏观的视角来看,严格地说都是非线性的,因为哪怕是笔直的光线在重力场里也会产生弯曲.这说明非线性是宇宙和事物的本质,而线性的东西都是人造的,用来近似地描述非线性的万事万物或者表达人类的一种特殊美感.这个简单的观察或许已经能够让读者理解并深信研究非线性科学的必要性和重要性.

非线性的概念可以追溯到远古.人类有理性以来就有“世无坦途”的认知及说法,其实那已经是一种非线性的概念.不过,把非线性作为一门学科来进行研究,则是从现代数学和现代物理学开始的,尤其是其中的核心内容——混沌学——更是19世纪以后的事情,而且它与稳定性的概念密不可分.本质上,混沌动力学研究稳定性和不稳定性兼备的一类特殊的动力学行为和产生这些动力学行为的系统:这类系统的动力学行为是全局最终有界的,但又是局部不稳定的,正如物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell)在1873年说的那样,这种系统的初始状态的一个无穷小变化可能会引起系统状态行为在有限时间内出现有限偏差,因而这样的系统是不稳定的,这种特性使人们对系统未来的精确预测成为不可能.数学家阿达马(J. S. Hadamard)在1898年也说过,初始条件中的误差或者不精确性可能会使系统长时间的动力学行为变得不可预测.被后人称为“最后一个通才”的科学家庞加莱(J. H. Poincaré)1908年在《科学与方法》一书中明确地写道:“初始条件的微小误差在最后结果中产生极大差别的情况可能发生……于是预测变为不可能,从而我们就看到了许多偶然现象.”前人的这些研究最后都凝聚到了数学和物理中的混沌理论.一般认为,现代混沌理论从洛伦兹(E. N. Lorenz)开始.洛伦兹生前是美国麻省理工学院气象学教授.1963年,他发现了一个混沌的大气动力学系统(Lorenz系统),让混沌学的抽象数学理论获得了具体的微分方程描述,使得物理实验、计算机仿真和数值分析成为可能. Lorenz系统在后来的半个世纪里,直至今天,都是数学和物理科学研究的核心,其成果在工程技术中也有了许多成功的应用.洛伦兹于1991年荣获Kyoto Prize(该奖项被誉为“日

本诺贝尔奖”),表彰他“发现了‘确定性混沌’这一项卓越的科学成就,其原理对众多基础科学都具有深刻影响,并且为人类在继牛顿之后带来了对外自然界认识的一次重大改变”。

我国学术界近二十年来开展了越来越广泛也越来越深入的关于 Lorenz 系统的学术和应用研究,发现了与之对偶的 Chen 系统以及把它们紧密联结起来的 Lü 系统,随后又将它们一起推广到了“广义 Lorenz 系统族”。这些新的系统和 Lorenz 系统有天然的密切联系而又互不等价,丰富和扩展了人们对经典 Lorenz 系统的认知,同时也加深和扩充了人们对混沌理论的理解。廖晓昕教授的这本新书介绍了 Lorenz 混沌系统族的基本知识和背景,然后综合作者本人长期以来集腋成裘的科研成果,探视并研究了其中若干十分重要而又极具挑战性的数学问题并给出了解答。本书最大的特色是其数学严谨性,科学判断基于严格证明而非数字仿真或图形观感。具体地说,本书基于李雅普诺夫(A. M. Lyapunov)各种稳定性理论和各种李雅普诺夫函数技巧(特别是广义正定、径向无界的李雅普诺夫函数技巧),构造出全局指数吸引集,并推导出平衡态的简洁代数充分必要条件以及参数分支值的显式表达,推广了俄罗斯科学院通信院士 G. A. Leonov 教授的一些重要工作,最后还利用 LaSalle 不变性原理等数学工具以最少保守反馈应用于混沌控制和同步。值得提及的是,作者廖晓昕教授是一位资深的科研工作者,是我国著名控制与系统理论专家、动力系统稳定性理论杰出学者。他多年来从事系统科学及其应用的研究,在经典和新兴的科学前沿领域均取得过不少值得称颂的研究成果,2016 年荣获俄罗斯工程院授予的金质奖章,表彰他毕生在科研和教育方面做出的卓越贡献。

我特别向广大读者推荐这本难得的好书。本书适合于对混沌理论有一定兴趣的广大读者,从大学生到研究生,以至从事数学、自然科学、工程技术、生物科学的研究工作者,均可阅读参考,以增长混沌科学知识,开拓思维空间,并提高解决技术问题的欲望和能力。我相信读者一定会欣赏这部新作,通过阅读必定会对混沌系统的基本理论和分析获得更深刻的认识和体会。

陈英学

发展中国家科学院院士  
欧洲科学院院士

# 前言

1963年,美国麻省理工学院气象学家 E. N. Lorenz 从天气预报中提炼简化了的一个三维非线性微分方程组,经过计算机不厌其烦的冗繁数值计算,首次发现其数值解既不收敛于极限环,又不逼近于某定态函数(包括平衡位置),而是被一个奇特的蝴蝶形吸引子吸引,这一举世皆惊的独特发现,更进一步揭示了非线性科学的复杂性,从此混沌学成为全球研究的热点.著名物理学家 J. Ford 曾指出:“混沌的发现是 20 世纪物理学的第三次革命.”<sup>[10]</sup> E. N. Lorenz 也因此被世人誉为“混沌之父”. Lorenz 系统是混沌发展史上的一个重要的里程碑.

虽然数学家、物理学家及各行各业的专家经过共同努力,对混沌的研究做出了巨大贡献,但人们对混沌的本质认识还远远不够,其主要成果仍然是沙里淘金似的偶然发现,故世界著名数学大师 Smale 把“Lorenz 蝴蝶吸引子存在性的数学证明”列为 21 世纪第 14 大数学难题,向全球征解,数学界也把混沌学列为 21 世纪数学的重要内容.

《Lorenz 混沌族中若干数学问题新研究》一书是笔者 2004 年退休之后 10 年内对 Lorenz 系统中核心数学问题,即全局指数吸引集,正向不变集的构造性证明及平衡位置的 Lyapunov 全局指数稳定性、全局渐近稳定性、不稳定性的简洁的代数充要条件及参数的分支值公式等理论及应用的研究总结.全书分为十章:

第 1 章重新研究了 Lorenz 系统的最终有界性及全局吸引集和正向不变集的构造性证明,推广和改进了俄罗斯科学家 Leonov 院士曾用德文和俄文发表过的极重要的成果,且较大地简化了他的复杂证明,进而将该成果直接应用到了跟踪控制、混沌同步和保密通信.

第 2 章首次提出了 Lorenz 系统 Lagrange 意义下全局指数吸引集的新概念,且给出了该集的构造性证明,囊括了现有文献中前人相应的结果,进而解决了当系数  $b \rightarrow 1^+$ ,  $a \rightarrow 0^+$  时前人方法失效的奇异情况,证明了全局指数吸引集外不再存在平衡位置、周期解、概周期解及其他奇异吸引子,回答了“蝴蝶形吸引子”只能在所证的全局指数吸引集和正向不变集内,从而回答了吸引子的唯一性问题.

第3章深入研究了 Lorenz 系统的平衡位置全局指数稳定性、全局渐近稳定性、局部渐近稳定性、不稳定性的简洁代数充要条件,同时还分析了各参数的分支值,这些内容鲜见有人问津.这一章的理论成果,可直接用于指导最少保守的线性反馈最优控制律设计,例如,我们曾尝试设计使 Chen 混沌系统、Lü 混沌系统、Yang 混沌系统、Yuxia Li 超混沌系统化为稳定的 Lorenz 系统,得到  $S_0(0,0,0)$  全局指数稳定准则,为混沌控制提供了示例,特别是应用到第9章的无刷直流电机,可期望产生较大经济效益.

第4章至第7章是即将发表或尚未投稿的内容,涉及国际上一些公开难题的解答.

第4章尝试用多个 Lyapunov 函数,以几何和代数相结合的方法得到 Chen 混沌吸引子全局指数吸引集的构造性证明,解决了这个悬而未决的公开难题,为进一步解决 Lü 混沌系统、Yang 混沌系统、Yuxia Li 超混沌系统全局指数吸引集的构造性证明提供了基础和示范.最终有界的界值极为重要,进一步证实了混沌系统应该是最终有界的,但证明很难,这是用线性反馈控制实现混沌同步、混沌跟踪、混沌镇定的理论基础,以及计算 Lyapunov 指数的前提.

第5章给出了 Chen 混沌系统的三个平衡态分别为全局指数稳定、全局渐近稳定、局部指数稳定,以及不稳定性的简洁代数充要条件,以及关于系数的分支值,全由系统的系数简洁的代数表示.这些理论成果,同样是实现最少保守的线性反馈控制,或是改变系统的拓扑结构的准绳和依据.

第6章和第7章分别得到了 Lü 混沌系统、Yang 混沌系统、全局指数吸引集的构造性证明及平衡位置各种 Lyapunov 意义下稳定性的简洁代数充要条件,也讨论了参数的分支值问题.虽然本章与第4、5章解决问题的基本思路是一脉相承的,然而所构造的 Lyapunov 函数在系数的选择上是相异的,甚至更费神.人们对 Chen 混沌系统研究的多,相互启发和借鉴的文献也较多,但对 Lü 混沌系统、Yang 混沌系统类似的问题涉足者少,故进展甚微.

第8章研究四维相空间的 Lorenz 超混沌系统.该系统模型由山东科技大学 Yuxia Li 教授提出,笔者曾有幸应邀参与过他们的关于全局最终有界性的研究.但已经发表的文章受篇幅所限,删除了不少内容,故在此进一步深入研究,增加了新内容.本章首先给出平衡位置  $S_0(0,0,0,0)$  全局指数稳定、全局渐近稳定的简洁代数充分条件,不同于前几章的是,条件不是必要的,充要条件尚难得到;同时给出另外两个平衡位置  $S_+(x_1, y_1, z_1, w_1)$ ,  $S_-(x_2, y_2, z_2, w_2)$  局部指数稳定的充分条件,将 Yuxia Li 原文中 Lagrange 全局渐近稳定性改进为全局指数吸引性,且增加了一些新的构造性结果,并将结果应用到控制混沌系统稳定与同步.

第9章是笔者应湖北科技学院周国鹏教授邀请,正在合作研究的问题:如何控制带混沌的无刷直流电机消除混沌,使之正常稳定工作.据悉,混沌的出现可能造成整个驱动系统崩溃的严重后果,故这一极富实际意义的课题研究方兴未艾,已有方法和结果还很不完善和成熟.我们通过精心研究发现,可用本书前三章的关于 Lorenz 系统的全部成果研究这个问题.因此,无刷直流电机的混沌控制可期望开发较多的理论和应用成果,这里介绍的一些成果不包括我们已经完成的且已发表的内容.

第10章是关于具有光滑的 Chua 氏电路的全局指数吸引集的构造性证明,以及其在混沌同步中的应用.

本章似乎与本书的标题和主题不太协调,但考虑到这是继第一个最终有界性的 Lorenz 混沌系统后的已正式证明的第二个经典混沌系统全局指数吸引集的结果,也是当时全球公开的难题,故收录于此.日本教授 Tsaneda 撰文称,具有光滑的 Chua 氏电路的研究论文全球大约有 700 篇,但至今无人回答系统是否具有最终有界性这个核心理论问题.世界著名电子电路专家、美国加州大学伯克利分校 L. O. Chua 教授以 IJBC(国际分支与混沌期刊)主编身份,特邀笔者和加拿大西安大略大学 Pei Yu 教授合著了一长文,给出了 Chua 氏光滑电路的全局指数吸引集的构造性证明,系统地论述了 Chua 氏电路与 Lurie 控制系统的联系,用 Lurie 控制系统绝对稳定的理论和方法,得到 Chua 氏电路,以及具有光滑的 Chua 氏电路全局指数同步的系列成果,进一步证实了 Chua 氏的混沌同步应建立在 Lurie 控制系统绝对稳定的框架下的正确性.

笔者虽在动力系统的稳定性领域内持续地工作了数十年,但大都只涉及非混沌的正常系统,即使是正常系统,穷尽笔者毕生精力和心血,也远远不够.众所周知,世界著名的希尔伯特第16大难题:微分方程  $\frac{dy}{dx} = \frac{P_n(x,y)}{Q_n(x,y)}$  (其中  $P_n, Q_n$  为  $n$  次多项式),最多有几个极限环? 至今甚至对于  $n=2$  都悬而未决.简单至极的 Hill 方程  $\frac{d^2x}{dt^2} + h(t)x = 0$  的稳定性的完全解决,居然被称为是对数学家们严重挑战的难题.其他未解决的问题,可谓俯拾皆是.所以一提起“混沌系统”,就只能望而生畏,闻而止步了,岂敢越雷池一步!

笔者对混沌的研究源于十多年前一次偶然机会,笔者聆听了杨叔子院士关于“蝴蝶效应”的文理通融、诗意盎然的精彩报告,激发了我本能的数学好奇心:“蝴蝶何在?(存在性)”“蝴蝶几何?(唯一性)”.恰在此期间,笔者拜读了我的老师齐民友教授的著作《世纪之交话数学》,其中有关蝴蝶效应的详尽深邃论述,进一步引起我的兴趣.不久又猛然发现,世界著名数学大师 Smale 竟然把“蝴蝶吸引子的存在性”的数学证



明(不再是计算机仿真)列为 21 世纪的第 14 大数学难题向全球征解. 由此我认识到了数学在混沌学中的重要性和问题的艰难性, 难怪独具慧眼的俄罗斯 Leonov 院士早就独自潜心致力于 Lorenz 混沌系统吸引集的研究.

当然如果没有工作任务的压力, 仅仅是凭兴趣和好奇, 明知重要也未必能持久, 问几个为什么, 在脑海中盘旋几番, 也就不了了之, 烟消云散了.

笔者选择混沌研究方向, 首先要感谢教育部和华中师范大学让我破格(超龄)参加中加学者交换项目的竞选, 后又改派为高级访问学者访问美国南加州大学一年; 要感谢英国的 X. Mao 院士为我申请了英国皇家学会的资助, 赴英国合作, 该合作的成果之一是笔者参加了在日本举行的 IFAC 会议, 且得到了大会的资助, 此次合作大大地鼓舞了我冲出国门, 走向国际学术舞台的决心; 更要感谢香港中文大学 Jun Wang 教授、香港城市大学 Chen 教授、香港大学的 Li Wang 教授, 他们多次邀请笔者赴港进行合作研究, 特别是 Chen 教授还送我一本专著《Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步》(与 Lü 教授合著)和他应国际权威期刊特邀而写的“稳定性综述”大作, 并告诉我一个极重要的信息, 即美国海军实验室也发现混沌可应用于保密通信, 著名的电子电路专家 L. O. Chua 教授最先建议的混沌同步的一般理论和方法, 应该也只能建立在 Lurie 控制系统的框架内, 罗琦教授提供了最近几年来的基因调控网络文献, 许多恰恰是一个典型的 Lurie 系统. 这使我对曾经有过的研究 Lurie 问题的激情又重燃起信心的火焰, 找到了新的近代科学的应用, 令人欢欣鼓舞. 我还要特别感谢加拿大西安大略大学 Pei Yu 教授四次邀请我对混沌同步控制及对 Lurie 问题进行深入的合作研究, 并完成了 Springer 再版的英文专著. 另外, 还应感谢好友徐道义教授曾竭力协助笔者把对 Lurie 问题的研究在瑞典的国际控制与网络会议上宣读, 后来又法国的世界计算大会上作报告, 从而得到了俄、美、德等国相关数学评论杂志的好评.

当笔者得知继 1963 年美国发现 Lorenz 混沌系统之后, 德国物理学家 Rössler 于 1976—1979 年又独自发现了六类混沌系统, 美国电子电路专家 L. O. Chua(1986)发现了可用电子电路实现的形式简单但动力学行为十分丰富的 Chua 氏电路, 我国学者、欧洲科学院院士 Chen 教授(IEEE Fellow, 北京大学长江讲座教授)1999 年又发现了可与 Lorenz 系统相媲美但又不拓扑等价的 Chen 混沌系统, 中国科学院 Lü 教授(IEEE Fellow)2002 年再一次发现了介于 Lorenz 系统与 Chen 系统之间的 Lü 系统, 华南理工大学 Yang 教授从另一个方向发现并建立 Lorenz 系统与 Chen 系统的纽带的 Yang 混沌系统, 山东科技大学 Yuxia Li 教授提出了四维相空间的 Lorenz 超混沌系统, 其中华人科学家格外耀眼, 他们的这些工作得到了世界公认, 其成果以他们的姓氏命名, 他们为世界的混沌理论的应用增添了色彩, 更为我国在混沌动力学方

面走向国际前沿做出了不可磨灭的贡献,笔者真诚地为每位炎黄子孙取得的学术成就欢呼喝彩.他们也是我真诚的学术好友,我想假如我能再为他们创造性的成就做些铺砖添瓦的辅助工作,不亦乐乎,不更幸乎!于是乎笔者走上了混沌研究之路.

笔者退休之后,时间精力殊多,身体尚好,养成了以思考数学问题、做数学题为最大乐趣的习惯.记得数学大师华罗庚先生谆谆告诫数学工作者:“学数学而不做习题,无异于到宝山不采宝空手而归.”齐民友教授常告诫我们:学数学是靠做题目做懂的.宋健院士曾鼓励我:咬住一个方向不放,坚持数十年,锲而不舍.于是,笔者把 Lorenz 系统中的数学问题自己出题自己做,反复思考.等到本书前三章已介绍过的成果出来之后,笔者猜想 Chen, Lü, Yang, Yuxia Li 系统也应有类似的结果.但是经过了漫长岁月的尝试,始终困难重重,其原因是 Lorenz 系统线性部分的三个主对角线上的系数全为负,这是用构造加权和二次型 Lyapunov 函数使之导数消除变号的三次项的关键前提和核心技巧,而后三个混沌系统不再具有此宝贵性质,从而对 Lorenz 系统行之有效的单一的 Lyapunov 函数完全失败.虽然许多人都在尝试逾越这个鸿沟,但终未见有成功的福音,正因如此才作为公开难题,引人逐鹿.

到了山穷水尽之时,笔者常想起古人“它山之石,可以攻玉”“精诚所至,金石为开”的至理名言.在解决上述问题过程中,笔者想起曾参与翻译过的美国世界数学大师 LaSalle 的专著《动力系统的稳定性》,书中他介绍了一个十分巧妙的例子,即用传统的 Lyapunov 方法无法解答是否稳定时,他用多个不同的 Lyapunov 函数,再用他新发现的不变原理而获成功.这个高超的技巧无疑也给了笔者宝贵的启迪,笔者也用多个 Lyapunov 函数越过了上述的鸿沟.

本书是笔者和合作者近几年的研究成果的阶段性的总结,全是自己和合作者的成果,包括在《中国科学》等权威杂志发表的论文和尚未公开发表的成果.我引用的参考文献也不是很全,甚至连好多合作者的类似的工作也来不及介绍,有些已投稿的成果也不会一稿多投,这里都省略了,恳请同仁、朋友、读者原谅.

承蒙华中科技大学校领导和华中科技大学出版社(特别是姜新祺总编辑)对笔者一贯的信赖和支持.笔者已年逾古稀,无任何功利目的,不奢求 SCI、“影响因子”这些华丽的外衣,只要能尽快地将本书献给祖国、献给同仁就深感荣幸了.

笔者对书中的内容文责自负,由于水平有限,再加上时间仓促,对于书中存在的错误和缺点,衷心地欢迎读者批评指正,不胜感激!

廖晓昕

2016年7月于多伦多