运筹学解题方法技巧归纳

——名校考研（硕博）真题解析

梅述恩　编著

由浅入深　循序渐进　根据经典教材安排框架，内容由浅入深，逐步进阶。

试题典型　覆盖面广　精选国内名校最新典型试题，题型覆盖全部考点。

解析细致　归纳性强　解题思路清晰、过程详细，技巧归纳实用，方便自学。

硕博兼顾　适用广泛　涵盖硕士和博士入学的试题，兼顾各类考生需求。

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

运筹学解题方法技巧归纳

——名校考研(硕博)真题解析

梅述恩　编著

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

运筹学解题方法技巧归纳:名校考研(硕博)真题解析/梅述恩编著. —武汉: 华中科技大学出版社,2017.5

ISBN 978-7-5680-2252-1

Ⅰ.①运… Ⅱ.①梅… Ⅲ. ①运筹学-研究生-入学考试-题解 Ⅳ. ①O22-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 243482 号

运筹学解题方法技巧归纳——名校考研(硕博)真题解析 梅述恩 编著

Yunchouxue Jieti Fangfa Jiqiao Guina——Mingxiao Kaoyan(Shuobo)Zhenti Jiexi

策划编辑:袁 冲

责任编辑:刘 静

封面设计:孢 子

责任监印:朱 玢

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉) 电话:(027)81321913

武汉市东湖新技术开发区华工科技园 邮编:430223

录 排:武汉正风天下文化发展有限公司

印 刷:武汉鑫昶文化有限公司

开 本:710mm×1000mm 1/16

印 张:28.75

字 数:577 千字

版 次:2017 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

定 价:59.00 元

前　　言

“运筹学”是管理科学与工程、物流管理和信息管理与信息系统专业的必修课，管理学院普遍选择运筹学作为以上专业的考研课程。不仅如此，系统工程、控制科学与工程专业（控制系）、交通运输规划与管理专业（交通学院）、运筹学与控制论专业（数学学院）、建筑技术科学专业（建筑学院或工程管理学院）也将“运筹学”作为考研专业课，甚至有机电学院考研专业课为“运筹学”。可以这样说，运筹学是高等院校不同院系设置考研最多的课程之一。

“运筹学”是关于最优化的课程，其各种经典的算法广泛应用于不同的学科和各种研究方向中。选择“运筹学”作为考研专业课，易得到老师和他人的首肯。更重要的是，“运筹学”的知识是日后立志考取研究生和走上科研道路的同学有用和得力的研究工具。迄今为止，“运筹学”的不少知识点还是研究的热门，等待有志有为青年去挖掘和发现知识的富矿。关于运筹学三大经典启发式算法（禁忌搜索、模拟退火、遗传算法）以及在此基础上衍生的其他算法（神经网络、蚁群算法、量子算法等）每年发表在国内外期刊上的论文成千上万。不少知名的运筹学国际学术期刊，将是日后各位研究生实现梦想的重要舞台。

“运筹学”是管理类专业的“硬技术”，说它容易学，是因为该课程与考研数学紧密相关。有说其是“晕愁学”，是因为内容较多，有些章节知识点前后无联系，独成体系。如对策论就是博弈论初步，图论是计算机学科和数学学科的必修课。还有，数学建模是运筹学的重要内容，数学建模有国内国外大学生竞赛，挑战性和难度可想而知。对于广大考研族来说，如何在有限的备考复习时间内取得最好的成绩，值得思考。

题目千千万，而知识点是有限的，一般考试题目的思路、方法是有章可循的。做再多题目若不总结，就像看电影、电视看完就完了一样，得不到解题的技巧，而对相似的题目采取研习做题的方式，可形成心得。基于此种理念，本书精选了近年来运筹学的考研考博试题，主要有以下特点。

首先，本书不是试题的简单堆砌，而是按照每章的知识要点对试题进行归类。在此基础上，对每道试题进行分析。通过展现一类题型的解题方法，总结出解题思路和技巧。对于稍难的题目，解题前有“分析”，层层拨开思考的迷雾，剖析试题的难点。对于属于一类试题的通识解题方法，题后给予“点评”，进行总结和归纳。对于易疏忽或易错误的解题要点，通过题后的“注”给予提醒。

其次，所选试题大多为近年来的考研考博试题，反映了高等院校运筹学考题的命题方向。所选试题主要是国内重点大学的考研试题，特别是“985”和“211”高校，涵盖面广，具有广泛的代表性。对于考试出现较少类型的题目，补充了少量题目，以此开阔眼界和启迪思维。

最后，每章的前面简明扼要地列出了各章的必会知识点，使读者明了和熟悉各章的主要内容。本书摒弃了一般参考书冗长的知识点的回顾和罗列，因为此部分内容教科书中都有，作者假设读者已具备运筹学的基本知识。

本书可作为选运筹学作为考研、考博专业课的考研、考博族的应试教程，也可供高校大学生和自考生作为学习运筹学课程的参考书。由于作者水平有限，错误之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2017 年 3 月

目　　录

第 1 章　线性规划与单纯形法

本章是运筹学的基础，与对偶理论和灵敏度分析、运输问题、目标规划、整数规划、图与网络优化、对策论等内容联系紧密。求解线性规划的单纯形法是重点，本章主要必会知识如下。

(1) 基本概念：凸集；基解和基可行解；线性规划及其标准形式。

(2) 求解只有 2 个变量的线性规划的图解法。

(3) 线性规划的 3 种算法：一般单纯形法、大 M 法、两阶段法。弄懂了这 3 种方法，后面章节的对偶单纯形法、目标单纯形法就比较容易掌握了。

(4) 单纯形法的检验数和最小比值原理，这是单纯形法计算迭代的理论依据。

(5) 单纯形法解的类型判别：唯一解、无穷解、无界解、无解和退化解。

(6) 一般线性规划的建模问题。

一、非线性规划转化为线性规划

1. (中国科技大学 2013 年考研试题) 请将如下分式规划转化为线性规划(u_r，v_i 是待决变量，y_{rj}，x_{ij} 为已知常数，$k \in \{1,2,\cdots,n\}$ 且已知)：

$$\max \frac{\sum\limits_{r=1}^{s} u_r y_{rk}}{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ik}}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{r=1}^{s} u_r y_{rj}}{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ij}} \leqslant 1 \quad (j = 1,2,\cdots,n; j \neq k) \\ u_r, v_i \geqslant 0 \quad (r = 1,2,\cdots,s; i = 1,2,\cdots,m) \end{cases}$$

解：令 $t = \dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ik}}$，则 $t\sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1$。令 $\mu_r = tu_r$，$w_i = tv_i$。

若 $t > 0$，则必有 $\mu_r, w_i \geqslant 0$。

由 $t\sum\limits_{i=1}^{m} v_i x_{ik} = 1$，得 $\sum\limits_{i=1}^{m} tv_i x_{ik} = 1 = \sum\limits_{i=1}^{m} w_i x_{ik} = 1$。

由约束条件$\dfrac{\sum\limits_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ij}} \leqslant 1$,得$\dfrac{\sum\limits_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ij}} \leqslant t\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ik}$,即$\dfrac{\sum\limits_{r=1}^{s}u_r y_{rj}}{\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ik}} \leqslant t\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ij}$。

因为$t=\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ik}}$,所以$t\sum\limits_{r=1}^{s}u_r y_{rj} \leqslant t\sum\limits_{i=1}^{m}v_i x_{ij}$,即$\sum\limits_{r=1}^{s}tu_r y_{rj} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{m}tv_i x_{ij}$。

由前面假设$\mu_r = tu_r, w_i = tv_i$,得$\sum\limits_{i=1}^{s}\mu_r y_{rj} - \sum\limits_{i=1}^{m}w_i x_{ij} \leqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n;j\neq k)$。

因此,原分式规划可转化为如下线性规划:

$$\max \sum_{i=1}^{s}\mu_r y_{rk}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{s}\mu_r y_{rj} - \sum\limits_{i=1}^{m}w_i x_{ij} \leqslant 0 & (j=1,2,\cdots,n,j\neq k)\\ \sum\limits_{i=1}^{m}w_i x_{ik} = 1 \\ \mu_r, w_i \geqslant 0 & (r=1,2,\cdots,s;i=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

其中,y_{rj}, x_{ij} 为已知常数,$k\in\{1,2,\cdots,n\}$ 且已知。

注 本题是数据包络分析(DEA)的内容,数据包络分析是研究经济管理问题的一种重要方法。题中的 x_{ij}, y_{rj} 一般指投入和产出,因此,显然有 $\mu_r, w_i \geqslant 0$。

若分数规划形式为

$$\max f(\boldsymbol{X}) = \frac{\boldsymbol{cX}+c_0}{\boldsymbol{dX}+d_0}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{AX}\leqslant \boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{X}\geqslant 0\end{cases}$$

其中,$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$ 是行向量,$\boldsymbol{X}$ 是列向量,且 c_0、d_0 是常量。

可假设 $y=\dfrac{\boldsymbol{X}}{\boldsymbol{dX}+d_0}$ 和 $t=\dfrac{1}{\boldsymbol{dX}+d_0}$,于是有 $\boldsymbol{X}=\dfrac{y}{t}$,原分式规划可化为如下线性规划①:

$$\max z = \boldsymbol{c}y + c_0 t$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\boldsymbol{A}y - \boldsymbol{b}t \leqslant 0\\ \boldsymbol{d}y + d_0 t = 1\\ y,t\geqslant 0\end{cases}$$

2. (华南理工大学 2013 年考研试题) 请将如下问题化为线性规划问题。

$$\min(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$

---

① 弗雷德里克·S.希利尔,杰拉尔德·J.利伯曼. 运筹学导论[M]. 8 版. 胡运权,等,译. 北京:清华大学出版社,2007.

$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{AX} \leqslant \boldsymbol{b}$$

其中，$\boldsymbol{X} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{X} \in R^n$，$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的实数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 n 维列向量。

分析　本题 $x_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 是实数，一般设 $x_i = x'_i - x''_i$（其中 $x'_i \geqslant 0, x''_i \geqslant 0$）；由于不知 x_i 的正负号，所以怎样把绝对值符号去掉是解答本题的关键和难点。

若 x'_i 和 x''_i 都不为 0，那么说明 x'_i 和 x''_i 是基变量，但一般线性规划的基变量是线性无关的，而 x'_i 和 x''_i 只相差一个负号，这与定理相矛盾。因此，x'_i 和 x''_i 这两个变量中必有一个为 0。

解：设

$$x'_i = \begin{cases} x_i & \text{当 } x_i \geqslant 0 \\ 0 & \text{当 } x_i < 0 \end{cases} \qquad x''_i = \begin{cases} 0 & \text{当 } x_i \geqslant 0 \\ -x_i & \text{当 } x_i < 0 \end{cases}$$

很明显，由假设可知 $x'_i \geqslant 0, x''_i \geqslant 0$，即当 $x_i \geqslant 0$ 时，$x_i = x'_i$；当 $x_i < 0$ 时，$x_i = -x''_i$。

因此，$|x_i| = |x'_i - x''_i| = x'_i + x''_i$，代入原问题得

$$\min\,(x'_1 + x''_1 + x'_2 + x''_2 + \cdots + x'_1 + x''_n)$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}' - \boldsymbol{X}'') \leqslant \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}'' \geqslant 0 \end{cases}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 的实数矩阵，$\boldsymbol{b}$ 是 n 维列向量。

3.（上海海事大学 2011 年考研试题）将下列线性规划问题变换为标准形式：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \geqslant -5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 15 \\ |19x_1 + 7x_2 + 5x_3| \leqslant 13 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3\ \text{无约束} \end{cases}$$

分析　解答本题的关键是处理约束条件 $|19x_1 + 7x_2 + 5x_3| \leqslant 13$，易知此约束条件等价于 $19x_1 + 7x_2 + 5x_3 \leqslant 13$ 并且 $19x_1 + 7x_2 + 5x_3 \geqslant -13$，这两个约束条件必须同时成立。

解：设 $x_3 = x'_3 - x''_3$，其中 $x'_3, x''_3 \geqslant 0$。

该线性规划问题的标准形式为：

$$\min z = 2x_1 + 3x_2 + 5x'_3 - 5x''_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\text{s.t.}\ \begin{cases} -x_1 - x_2 + x'_3 - x''_3 + x_4 = 5 \\ -6x_1 + 7x_2 - 9x'_3 + 9x''_3 = 15 \\ 19x_1 + 7x_2 + 5x'_3 - 5x''_3 + x_5 = 13 \\ -19x_1 - 7x_2 - 5x'_3 + 5x''_3 + x_6 = 13 \\ x_1, x_2, x'_3, x''_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

注　标准形式等号右边必须为非负数。

想一想：本题如果把约束条件 $|19x_1 + 7x_2 + 5x_3| \leqslant 13$ 改为 $|19x_1 + 7x_2 + 5x_3| \geqslant 13$，该如何将该题化为标准形式呢？

二、单纯形法原理

1.（西北工业大学 2009 年考研试题）已知线性规划标准模型 $\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$，约束条件为 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$，其中 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{b} = (b_i)_{m\times l}$，$\boldsymbol{X}$ 为由决策变量组成的向量。若该线性规划有解，求出单纯形法迭代时相邻两次目标函数值之间的数量关系式。

解：若该线性规划有解，则可用非基变量表示基变量。

用 $x_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 表示基变量，用 $x_j(j = m+1,m+2,\cdots,n)$ 表示非基变量；经过迭代后，有 $x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij}x_j(i = 1,2,\cdots,m)$。

将以上表达式代入目标函数，有

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i \left(b_i - \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j\right) + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{i=1}^{m} c_i \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i - \sum_{j=m+1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} x_j + \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j \\
&= \sum_{i=1}^{m} c_i b_i + \sum_{j=m+1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) x_j \\
&= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j \\
&= z_0 + \sum_{j=m+1}^{n} \sigma_j x_j
\end{aligned}
$$

其中，$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i$，$z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$；$\sigma_j = c_j - z_j$（$\sigma_j$ 即检验数）。

当 x_j 为入基变量，出基变量按最小比值原则选择时，$\theta = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0\right\}$。

在 $\sum_{j=m+1}^{n} (c_j - z_j) x_j$ 中，此时只有一个 x_j 不为零（其值为 θ），其他的 $\boldsymbol{X}$ 为零，因此，单纯形法迭代时相邻两次目标函数值之间的数量关系式是

$$z = z_0 + \theta\sigma_j$$

注　上述式子较抽象，联系第 2 章单纯形法的矩阵描述知识，则可能容易理解些。

2.（西北工业大学 2010 年考研试题）证明：在 max 型线性规划求解过程中，选择检验数最大的变量作为换入变量并不一定会使目标函数值增加最快。

解：求极大化的线性规划问题时，可从其初始基可行解 $\boldsymbol{X}^{(0)}$（假设前 m 个分量是基变量）出发，着眼于检验数为正值的某个非基变量 x_j，得另一基可行解 $\boldsymbol{X}^{(1)}$。

记 $\boldsymbol{X}^{(0)}$，$\boldsymbol{X}^{(1)}$ 对应的目标函数值分别为 $z^{(0)}$，$z^{(1)}$，可得 $z^{(1)} = z^{(0)} + \sum\limits_{j=m+1}^{n}(c_j - z_j)x_j$。

当 x_j 为入基变量，出基变量按最小比值原则选择时，$\theta = \min\left\{\dfrac{x_i^{(0)}}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0\right\}$。

在 $\sum\limits_{j=m+1}^{n}(c_j - z_j)x_j$ 中，此时只有一个 x_j 不为零（其值为 θ），其他的 $\boldsymbol{X}$ 为零，所以

$$z^{(1)} = z^{(0)} + \theta\sigma_j$$

可见，$z^{(1)}$ 与 $z^{(0)}$ 相比，增长得是否快，取决于乘积 $\theta\sigma_j$，而不取决于 σ_j。

因此，在 max 型线性规划求解过程中，选择检验数最大的变量作为换入变量并不一定会使目标函数值增加最快。

说明　以上解答直接运用了教材上的相关知识，下面提供另一种详细的解答①。

解：设基 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_m)$，出基变量为 x_m，入基变量为 x_n。在基 $\boldsymbol{B}$ 下，$\sigma_n = c_n - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n > 0$，$\theta = \min\left\{\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_i}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_i} \middle| (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_i > 0\right\} = \dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_m}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m}$，基变量 $\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} \geqslant 0$，目标函数值 $z_B = (c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, c_n)\boldsymbol{B}^{-1}b$，在新的基 $\boldsymbol{B}_1 = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \cdots, \boldsymbol{P}_{m-1}, \boldsymbol{P}_n)$ 下，

$$\boldsymbol{X}_{B_1} = \boldsymbol{B}_1^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P})_1}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_2}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_{m-1}}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \end{bmatrix} \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

由改进单纯形法知，$\boldsymbol{B}_1^{-1} = \boldsymbol{E}\boldsymbol{B}^{-1}$（$\boldsymbol{E}$ 为上式左边的矩阵）。

目标函数值

$$z = (c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, c_n)\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{b}$$

---

① 王全文，吴育华，吴振奎，张鑫钰. 单纯形法选择进出基变元的一个新准则[J]. 数学的实践与认识，2009，39(14)，75-81.

$$
= (c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, c_n)\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_1}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_2}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\dfrac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_{m-1}}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{1}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m} \end{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}
$$

$$
= \left(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, \frac{c_n - \sum_{j=1}^{m-1} c_j\ (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_j}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}
$$

$$
= \left[(c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, c_m) + \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{c_n - \sum_{j=1}^{m} c_j\ (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_j}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m}\right)\right]\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}
$$

$$
= (c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, c_m)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + \left(0, 0, \cdots, 0, \frac{c_n - \sum_{j=1}^{m} c_j\ (\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_j}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m}\right)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}
$$

$$
= (c_1, c_2, \cdots, c_{m-1}, c_m)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (c_n - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)\frac{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b})_m}{(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{P}_n)_m}
$$

$$
= z_B + \sigma_n\theta_n
$$

由上式可知，目标函数值 z 与原目标函数值 z_B 相比，增长得是否快，取决于乘积 $\sigma_n\theta_n$，而不取决于 σ_n。

因此，在 max 型线性规划求解过程中，选择检验数最大的变量作为换入变量并不一定会使目标函数值增加最快。

3.（西北工业大学 2008 年考博试题）已知线性规划问题已经标准化为

$$
\max z = \boldsymbol{CX}
$$

$$
\text{s. t. } \begin{cases} \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{X} \geqslant 0 \end{cases}
$$

试推导证明最优解的检验数为：$(\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}) \leqslant 0$。

证明：假设基变量为 $\boldsymbol{X}_B$，非基变量为 $\boldsymbol{X}_N$，与之对应的目标函数的系数分别为 $\boldsymbol{C}_B, \boldsymbol{C}_N$，$\boldsymbol{A}$ 矩阵与之对应的分别为 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N}$，则

$$
z = (\boldsymbol{C}_B, \boldsymbol{C}_N)\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{X}_B + \boldsymbol{C}_N\boldsymbol{X}_N \tag{1}
$$

$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$ 可写为 $(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{N})\begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_B \\ \boldsymbol{X}_N \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{BX}_B + \boldsymbol{NX}_N = \boldsymbol{b}$，两边左乘 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 后得

$$
\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \boldsymbol{B}^{-1}N\boldsymbol{X}_N \tag{2}
$$

把 (2) 代入到 (1) 得到

$$z = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N$$

$\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}$ 就是检验数。

$\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 是常数项，由于所有的 $\boldsymbol{X}_N \geqslant 0$，若$(\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}) \leqslant 0$，则$(\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N \leqslant 0$。

要使 $z = \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N$ 最大，显然只有使$(\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N})\boldsymbol{X}_N = 0$。

因此，把 $\boldsymbol{X}_N$ 取为非基变量(即令 $\boldsymbol{X}_N = 0$)，所求得的基可行解($\boldsymbol{X}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$) 就会使目标函数值最大。

反之，若 $(\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}) > 0$，由于所有的 $\boldsymbol{X}_N \geqslant 0$，$z$ 的值还可以继续增加(即没有达到最大值)。

因此，对于求 max 的线性规划问题，最优解的检验数为：$(\boldsymbol{C}_N - \boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}) \leqslant 0$。

注　检验数和最小比值原则是单纯形法的理论基础，我们不仅要会用单纯形法求解线性规划问题，而且还要理解单纯形法迭代的理论依据。

对于本章以下定理，要求能够熟练证明。

① 若线性规划问题存在可行域，则其可行域是凸集。

② 线性规划问题的基可行解对应于可行域的顶点。

③ 若可行域有界，线性规划问题的目标函数一定可以在其可行域的顶点上达到最优。

④ 线性规划问题的可行解为基可行解的充要条件是其正分量所对应的系数列向量是线性无关的。

4. (上海海事大学 2011 年考研试题) 设有问题 max $x = \boldsymbol{CX}$，约束于 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{X} \geqslant 0$。它有 N 个基可行解$(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(n)}), \cdots, (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots, x_n^{(N)})$。这些解的加权平均值为 $x_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k x_k^{(j)} \left(j = 1,2,\cdots,n; \alpha_k \geqslant 0, \sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k = 1\right)$。

求证：这 N 个基可行解的任何加权平均值必定是一个可行解。

证明：已知$(x_1^{(1)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(n)}), \cdots, (x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \cdots, x_n^{(N)})$ 是 N 个基可行解，因此，$\boldsymbol{AX}^{(1)} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{AX}^{(2)} = \boldsymbol{b}, \cdots, \boldsymbol{AX}^{(N)} = \boldsymbol{b}$。

这些解的加权平均值为 $x_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k x_k^{(j)}$，即 $\boldsymbol{X}_j = \sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k \boldsymbol{X}^{(k)}$。

因为 $\alpha_k \geqslant 0$ ，所以 $\boldsymbol{X}_j \geqslant 0$。

$$\boldsymbol{AX}_j = \boldsymbol{A}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k\boldsymbol{X}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\boldsymbol{AX}^{(k)} = \sum_{k=1}^{N}\alpha_k\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\sum_{k=1}^{N}\alpha_k = \boldsymbol{b} \quad \left(\text{因} \sum_{k=1}^{N}\alpha_k = 1\right),$$

即 $\boldsymbol{AX}_j = \boldsymbol{b}$。

所以，这 N 个基可行解的任何加权平均值必定是一个可行解。

三、基解和基可行解

1.（浙江理工大学 2013 年考研试题）已知线性规划模型

$$\max z = 10x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + 4x_2 \leqslant 9\\ 5x_1 + 2x_2 \leqslant 8\\ x_1, x_2 \geqslant 0\end{cases}$$

（1）求出该模型的所有基本解。

（2）分别用图解法和单纯形法求解线性规划模型，指出单纯形法求解时的每一个可行解对应于图解法中可行域中的点。

（3）在图中标出所有的基解。

解:（1）首先把约束条件化成标准形式:

$$\text{s.t.}\begin{cases}3x_1 + 4x_2 + x_3 = 9\\ 5x_1 + 2x_2 + x_4 = 8\\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0\end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}3 & 4 & 1 & 0\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{bmatrix} = (\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{P}_3, \boldsymbol{P}_4)$，$C_4^2 = 6$，所以基解不超过 6 个。

因为 $|\boldsymbol{P}_1 \quad \boldsymbol{P}_2| = \begin{vmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -14 \neq 0$，所以 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 构成基，令 $x_3 = x_4 = 0$，则有

$$\begin{bmatrix}3 & 4 & 9\\ 5 & 2 & 8\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 4/3 & 3\\ 0 & -14/3 & -7\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 3/2\end{bmatrix}$$

得基解 $\boldsymbol{X}_1 = (1, 3/2, 0, 0)$。

用同样的方法可以求出另外 5 个基解：$\boldsymbol{X}_2 = \left(\frac{8}{5}, 0, \frac{21}{5}, 0\right)$，$\boldsymbol{X}_3 = (3, 0, 0, -7)$，$\boldsymbol{X}_4 = (0, 4, -7, 0)$，$\boldsymbol{X}_5 = \left(0, \frac{9}{4}, 0, \frac{7}{2}\right)$，$\boldsymbol{X}_6 = (0, 0, 9, 8)$。

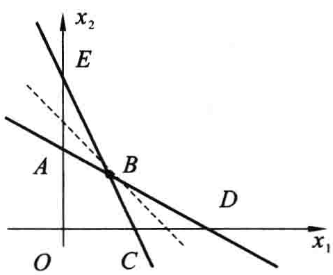

图 1.1

（2）绘制约束条件不等式图如图 1.1 所示。

由图 1.1 可知，该线性规划的可行域为四边形 $OABC$，最优解为 B 点 $(1, 3/2, 0, 0)$，最优目标函数值为 $10 \times 1 + 5 \times 1.5 = 17.5$。

用单纯形法求解如表 1.1 所示。

表 1.1

$c_j \rightarrow$			10	5	0	0
$\boldsymbol{C}_B$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	9	3	4	1	0
0	x_4	8	[5]	2	0	1
$c_j - z_j$			10	5	0	0
0	x_3	21/5	0	[14/5]	1	−3/5
10	x_1	8/5	1	2/5	0	1/5
$c_j - z_j$			0	1	0	−2
5	x_2	3/2	0	1	5/14	−3/14
10	x_1	1	1	0	−1/7	2/7
$c_j - z_j$			0	0	−5/14	−25/14

第一次迭代的可行解为(0,0,9,8),对应可行域的 O 点;第二次迭代的可行解为$\left(\frac{8}{5},0,\frac{21}{5},0\right)$,对应可行域的 C 点;第三次迭代的可行解为(1,3/2,0,0),对应可行域的 B 点。

(3) 基解如图 1.1 所示,除了(2) 所指出的 O、B、C 三点外,还有 $A\left(0,\frac{9}{4},0,\frac{7}{2}\right)$,$D(3,0,0,-7)$,$E(0,4,-7,0)$。

注　基解和基可行解是针对线性规划的标准形式而言的,因此,应首先写出线性规划约束条件的标准形式。

2. (昆明理工大学 2013 年考博试题) 设有线性规划问题

$$\max z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 6x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 \leqslant 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leqslant 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0 \end{cases}$$

确定:(1) 基解的最大个数;

(2) 可行的极点;

(3) 最优基本可行解和最优目标函数值。

解:(1) 首先把约束条件化为标准形式:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_6 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0 \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 8 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\boldsymbol{P}_1 \quad \boldsymbol{P}_2 \quad \boldsymbol{P}_3 \quad \boldsymbol{P}_4 \quad \boldsymbol{P}_5 \quad \boldsymbol{P}_6)$,因为 $\mathrm{C}_6^2 =$