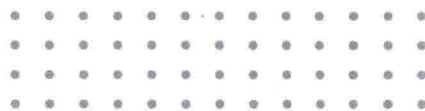


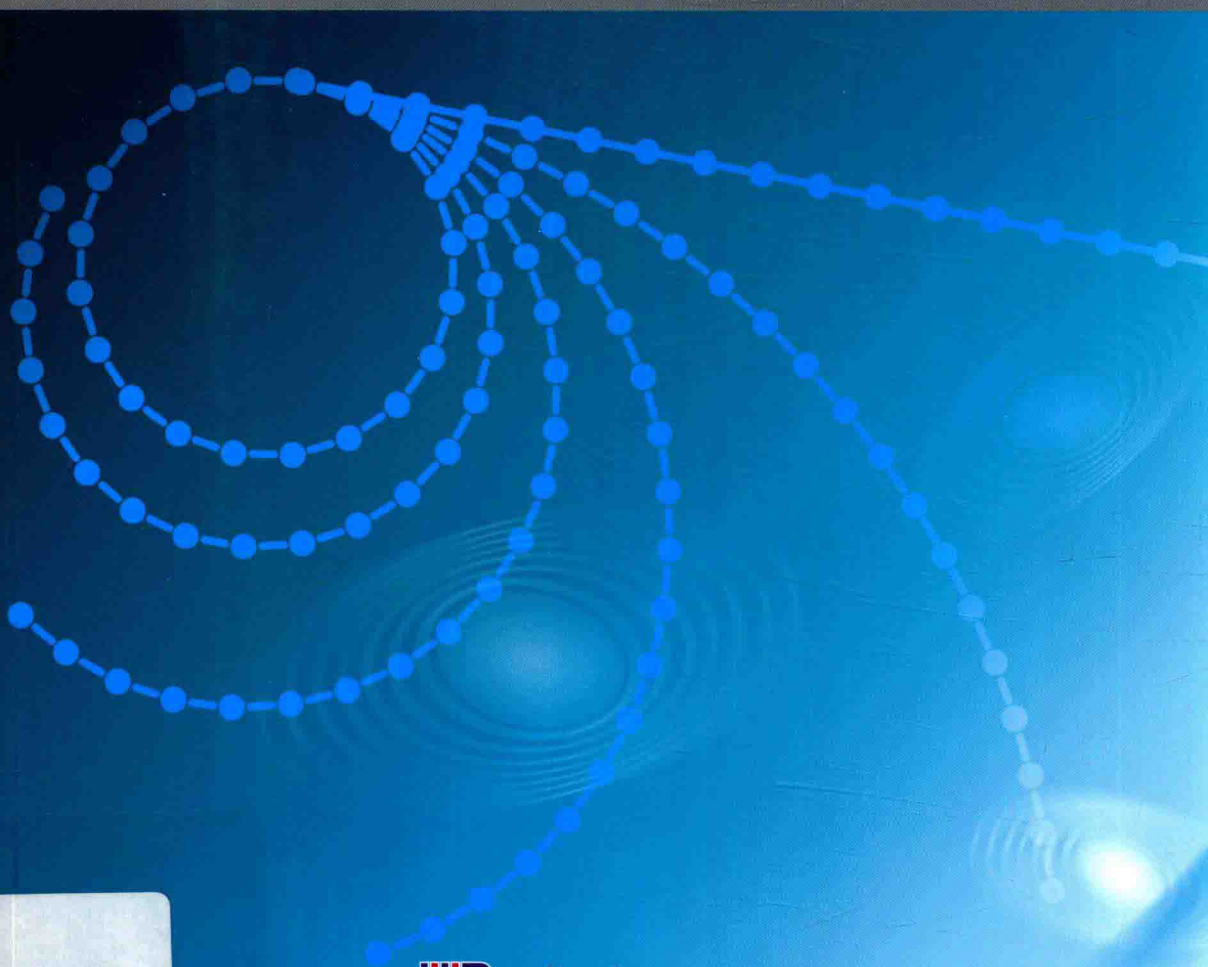
北京工业大学研究生创新教育系列著作



基面力单元法

Base Force Element Method

彭一江 刘应华 著



科学出版社

北京工业大学研究生创新教育系列著作

基面力单元法

Base Force Element Method

彭一江 刘应华 著



科学出版社

北京

内 容 简 介

基面力单元法是一种以基面力为基本未知量的新型有限元法。本书内容围绕基于余能原理的基面力单元法理论体系及其应用展开,共 13 章。第 1 章介绍基面力单元法的研究背景、特色和展望;第 2 章介绍基面力的概念和基本理论;第 3 章研究二维线弹性问题的余能原理基面力单元法;第 4 章研究凸多边形网格的余能原理基面力单元法;第 5 章研究凹多边形网格的余能原理基面力单元法;第 6 章研究二维几何非线性问题的余能原理基面力单元法;第 7 章研究凸多边形网格的几何非线性基面力单元法;第 8 章研究凹多边形网格的几何非线性基面力单元法;第 9 章研究材料非线性的基面力单元法;第 10 章研究基于余能原理的三维基面力单元法;第 11 章研究基面力单元法中的三维退化单元;第 12 章研究基面力单元法在平面复杂桁架中的应用;第 13 章研究基面力单元法在空间复杂桁架中的应用。

本书可作为土木工程、水利工程、机械工程、航空航天工程、交通工程、材料科学与工程、工程力学等专业工程技术人员、教师和研究生的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

基面力单元法(Base Force Element Method)/彭一江,刘应华著. —北京:科学出版社, 2017.6

ISBN 978-7-03-052681-6

I. ①基… II. ①彭… ②刘… III. ①有限元法 IV. ①O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 097168 号

责任编辑:刘信力/责任校对:邹慧卿
责任印制:张 伟/封面设计:蓝正设计

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2017 年 6 月第一次印刷 印张:19 3/4

字数:383 000

定价:128.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

在有限元法的发展和应用中,基于势能原理的位移协调元法占有绝对优势,特别是一些大型的有限元分析软件基本上都是采用位移协调元方法。但随着科学研究的不断深入以及材料科学的迅速发展,严重依赖网格的位移法有限元在分析涉及特大变形(如加工成型、高速碰撞、流固耦合)、奇异性或裂纹动态扩展等问题时遇到了许多困难。因此,探索可适应任意网格、畸变网格以及接触问题的有限元法是一些学者关注的问题。

但是现有的有限元法采用的都是传统二阶应力张量的描述体系,这种理论框架使得建立和表述数学模型较为繁琐,寻求更大的突破较为困难。高玉臣院士提出了一个远较传统的应力张量简单的新概念——“基面力”来描述应力状态,较系统地描述了基面力的理论体系,并给出了基于余能原理推导单元柔度矩阵的思路。近年来,本书作者在高玉臣院士工作的基础上,以基面力为基本未知量系统研究了基于余能原理的基面力单元法的理论体系,建立了具有边中节点的四边形基面力单元法、适应于任意(凸、凹)多边形网格的基面力单元法、有限变形问题的余能原理基面力单元法、材料非线性问题的余能原理基面力单元法和杆系问题的余能原理基面力单元法等,采用 MATLAB 语言编制相应的余能原理基面力单元分析软件,研究了此类算法的计算性能,在适应任意网格、提高计算精度、减少网格依赖以及有限变形分析方法方面取得了一些创新性成果。

基面力单元法给出了一种新的有限元法研究思路。本课题组通过对各种基面力元的建立和计算性能的研究,发现基于余能原理的基面力单元法具有良好的计算通用性,提出采用一种统一的数学模型来表述空间单元、平面单元、任意形状网格单元、空间杆件单元、平面杆件单元以及混合单元,给出了各种单元采取一种单元模型计算的算例,分析结果表明:基于余能原理的基面力单元法在建立各种单元模型时具有统一的推导思路,一个三维的基面力元模型可以退化为各种不同的模型,柔度矩阵的计算可以采用统一的公式,并且具有对网格畸变不敏感、计算精度高的特点,具有较为广阔的应用前景和进一步研发的价值。

本书第一作者从 2001 年开始在北京交通大学固体力学研究所师从高玉臣院士从事基于基面力概念的有限元理论研究及软件开发工作,取得了一些创新性的研究成果;2005 年至 2006 年在副导师金明教授指导下进行成果整理和博士学位论文写作;2007 年至 2009 年在清华大学力学博士后流动站从事博士后研究工作,与合作导师清华大学工程力学系刘应华教授合作,在平面基面力单元法方面进行深入研

究,取得了系统性的研究成果,并在发表于国际学术期刊 *Acta Mechanica Sinica* 的论文中将这种基于基面力概念的新型有限元法命名为“基面力单元法”(Base Force Element Method),简称“基面力单元法”(BFEM)。

本书是作者对近年来基面力单元法的理论及其应用研究成果的总结。书中介绍了基面力的概念、基本理论;阐述了基面力单元法的研究背景、特色和应用前景;重点研究了二维线弹性问题的余能原理基面力单元法、凸多边形网格的余能原理基面力单元法、凹多边形网格的余能原理基面力单元法、二维几何非线性问题的余能原理基面力单元法、凸多边形网格的几何非线性基面力单元法、凹多边形网格的几何非线性基面力单元法、材料非线性的基面力单元法、基于余能原理的三维基面力单元法、基面力单元法中的三维退化单元研究、基面力单元法在平面复杂桁架中的应用和基面力单元法在空间复杂桁架中的应用。

本书成果是在高玉臣院士研究工作的基础上发展起来的。前期工作是在高先生生前的悉心指导下完成的,值此本书出版之际,谨向高先生致以深深的谢意和由衷的敬意!本书前期成果还得到了金明教授的精心指导和热心帮助,在此表示衷心的感谢!

近年来,一些研究生、本科生在作者指导下参加了对基面力单元法理论体系及其应用的研究工作。本书引用了他们的研究成果。在此特别要感谢宗娜娜、郭庆、单岩岩、黄斯拜、任聪、李瑞雪、白亚琼、周雅等同学对本书做出的贡献。

本书的研究工作得到了国家自然科学基金(编号 10972015)的资助,在此表示衷心的感谢!

本书仅是关于新型有限元法——基面力单元法初步研究成果的介绍,旨在抛砖引玉,后续深入的研究工作还需不断完善、深化和发展。也希望有志于探索新算法的科研人员和研究生投身到此种新型计算方法的研发和应用中来,以拓展该方法的理论体系和促进该方法的工程应用。由于作者水平所限,书中难免有疏漏和不妥之处,敬请读者提出宝贵意见。

作 者

2016 年 12 月于北京

主要符号

x^i ($i = 1, 2, 3$)	物质点的 Lagrange 坐标
P, Q	变形前后物质点的径矢
P_i, Q_i	变形前后的协变基矢量
P^i, Q^i	变形前后的逆变基矢量
T^i ($i = 1, 2, 3$)	坐标系 x^i 中 Q 点的基面力
V_P, V_Q	变形前后的基容
A^i	基面积
σ	Cauchy 应力张量
τ	第一类 Piola-Kirchhoff 应力张量
Σ	第二类 Piola-Kirchhoff 应力张量
u_i	位移梯度
F	变形梯度张量
G	Green 应变张量
C	Cauchy 应变张量
ε_G	Green 有限应变张量
ε_C	Almansi 有限应变张量
ρ_0, ρ	变形前和变形后的物质密度
W	应变能密度
W_C	余能密度
T^I	作用在单元各边中点上面力的合力, 简称为单元面力 (或节点力)
r_I 或 P_I	由原点 O 指向单元边中点 I 的径矢
A	单元的面积
V	单元的体积
C_{IJ}	单元柔度矩阵
U	单位张量
E	弹性模量

ν	泊松比
δ_I	节点位移
λ, μ	Lagrange 乘子
σ_m	静水压力
S	应力偏张量
σ_e	等效应力

目 录

前言

主要符号

第 1 章 绪论	1
1.1 研究背景	1
1.2 国内外研究现状及进展	3
1.3 基面力单元法的特色	5
1.4 基面力单元法的发展前景	6
第 2 章 基面力单元法的基本公式	7
2.1 基面力的概念	7
2.1.1 基面力的定义	7
2.1.2 基面力的功用	8
2.1.3 基面力与各种应力张量的关系	10
2.2 基面力的对偶量—位移梯度	12
2.2.1 位移梯度的定义	12
2.2.2 位移梯度与基面力的关系	12
2.3 基面力表示的基本方程	13
2.3.1 基面力表示的平衡方程和边界条件	13
2.3.2 基面力表示的弹性定律	14
2.3.3 位移梯度表示的几何方程	14
2.4 基面力表述的弹性大变形余能原理	20
2.4.1 余能密度表达式	20
2.4.2 基面力表述的弹性大变形余能原理	20
2.5 本章小结	25
第 3 章 二维线弹性问题的余能原理基面力单元法	26
3.1 二维受力状态表征	26
3.2 二维变形状态表征	27
3.3 基面力表示单元应力	28
3.4 单元柔度矩阵显式展开表达式	29
3.5 余能原理基面力元控制方程	30
3.6 单元应力展开表达式	33

3.7	节点位移展开表达式	33
3.8	数值算例	34
3.8.1	分片检验算例	34
3.8.2	纯剪问题算例	34
3.8.3	厚壁圆筒受力分析算例	35
3.8.4	曲梁受力分析算例	39
3.8.5	单元计算精度分析算例	41
3.9	本章小结	43
第 4 章	凸多边形网格的余能原理基面力单元法	45
4.1	凸多边形基面力元模型	45
4.2	凸多边形基面力元模型的应用	48
4.2.1	矩形平板受拉问题	48
4.2.2	悬臂梁自由端受弯矩作用	49
4.2.3	悬臂梁自由端承受集中力	51
4.2.4	悬臂梁承受均布荷载作用	52
4.3	本章小结	53
第 5 章	凹多边形网格的余能原理基面力单元法	55
5.1	凹多边形基面力元模型	55
5.2	凹多边形基面力元模型的应用	58
5.2.1	矩形平板受拉问题	58
5.2.2	悬臂梁自由端受弯矩作用	59
5.2.3	悬臂梁自由端承受集中力	61
5.2.4	悬臂梁受均布荷载作用	62
5.3	本章小结	63
第 6 章	二维几何非线性问题的余能原理基面力单元法	65
6.1	基本公式	65
6.2	单元余能表达式	66
6.3	修正的余能原理	69
6.4	单元应力表达式	71
6.5	节点位移表达式	71
6.6	数值算例	72
6.6.1	常应力分片检验算例	72
6.6.2	小变形分析算例	73
6.6.3	直梁大转动分析算例	75
6.6.4	曲梁大转动分析算例	78

6.6.5	单元长宽比影响分析算例	82
6.6.6	泊松比的影响分析算例	83
6.7	本章小结	85
第 7 章	凸多边形网格的几何非线性基面力单元法	87
7.1	凸多边形网格的几何非线性基面力元模型	87
7.1.1	大变形问题的余能密度表达式	87
7.1.2	凸多边形单元余能表达式	88
7.1.3	凸多边形单元余能原理基面力元的控制方程	90
7.1.4	凸多边形单元的节点位移表达式	92
7.1.5	几何非线性余能原理凸多边形网格基面力元程序简介	93
7.2	利用几何非线性凸多边形基面力元求解小变形问题	94
7.3	利用凸多边形基面力元求解大位移大转动问题	99
7.4	本章小结	106
第 8 章	凹多边形网格的几何非线性基面力单元法	108
8.1	凹多边形网格的几何非线性基面力元模型	108
8.1.1	大变形问题的余能密度表达式	108
8.1.2	凹多边形单元余能表达式	109
8.1.3	凹多边形单元余能原理基面力元的控制方程	111
8.1.4	凹多边形单元的节点位移表达式	114
8.1.5	几何非线性余能原理凹多边形网格基面力元程序简介	114
8.2	利用几何非线性凹多边形基面力元求解小变形问题	116
8.3	利用凹多边形基面力元求解大位移大转动问题	121
8.4	本章小结	130
第 9 章	材料非线性的基面力单元法	132
9.1	材料非线性的基面力元模型	132
9.1.1	材料非线性简化模型	132
9.1.2	基面力表示的塑性力学不变量	135
9.1.3	基面力表示的单元等效应力	136
9.1.4	基面力表示的单元余能表达式	138
9.1.5	基面力表示的单元弹塑性柔度矩阵量表达式	139
9.1.6	弹塑性余能原理基面力单元法的控制方程	140
9.1.7	节点的位移表达式	143
9.1.8	非线性方程的解法	144
9.1.9	弹塑性余能原理基面力元程序的主程序框图	145
9.2	材料非线性余能原理基面力元的退化研究	147

9.2.1	弹塑性基面力元的线弹性退化模型	147
9.2.2	弹塑性基面力元的退化模型验证算例	148
9.3	材料非线性的余能原理基面力元性能研究	166
9.4	本章小结	184
第 10 章	基于余能原理的三维基面力单元法	185
10.1	基于余能原理的三维基面力元模型	185
10.1.1	基面力表示的空间单元应力张量矩阵形式	185
10.1.2	基面力表示的空间单元余能表达式	187
10.1.3	三维单元的柔度矩阵	188
10.1.4	空间结构余能原理基面力元的支配方程	190
10.1.5	空间节点的位移表达式	193
10.1.6	三维余能原理基面力元程序简介	194
10.2	三维基面力元程序的典型分析算例	196
10.3	三维问题的基面力单元法计算性能分析	208
10.3.1	三维基面力元在梁问题上的应用	208
10.3.2	三维基面力元在板问题上的应用	219
10.3.3	三维基面力元在壳问题上的应用	227
10.4	本章小结	232
第 11 章	基面力单元法中的三维退化单元研究	234
11.1	空间余能原理基面力元的退化模型	234
11.1.1	退化的平面单元应力表达式	234
11.1.2	退化单元的柔度矩阵	236
11.1.3	节点的位移	237
11.2	三维基面力退化单元的应用	238
11.2.1	悬臂梁承受集中力问题	238
11.2.2	Cook 梁承受集中力作用	240
11.2.3	悬臂梁承受弯矩作用	242
11.2.4	自由端受集中力作用的曲梁	244
11.2.5	悬臂梁承受均布荷载作用	247
11.3	本章小结	248
第 12 章	基面力单元法在平面复杂桁架中的应用	249
12.1	平面桁架单元模型	249
12.1.1	平面桁架单元柔度矩阵	249
12.1.2	平面桁架基面力元控制方程	250
12.1.3	平面桁架单元位移和轴力表达式	251

12.1.4	多杆汇交的平衡条件及协调条件处理	252
12.2	桁架基面力元程序简介	256
12.2.1	余能原理桁架基面力元程序的简要说明	256
12.2.2	平面桁架基面力单元法的程序框图	257
12.3	复杂平面桁架基面力元计算分析	258
12.3.1	一般三杆桁架受力问题	258
12.3.2	一般四杆桁架受力问题	259
12.3.3	四边形静定桁架受力问题	260
12.3.4	对称平面桁架对称受力问题	261
12.3.5	平屋架对称受力问题	263
12.3.6	拱形屋桁架受力问题	265
12.3.7	对称平面桁架受力问题	267
12.3.8	不对称复杂平面桁架结构受力问题	269
12.3.9	桁架桥受力问题	271
12.3.10	塔吊受力问题	274
12.4	本章小结	277
第 13 章	基面力单元法在空间复杂桁架中的应用	278
13.1	空间杆件基面力元模型	278
13.1.1	空间桁架单元柔度矩阵	278
13.1.2	空间桁架基面力元控制方程	280
13.2	空间复杂桁架基面力元计算分析	284
13.2.1	三角空间桁架单向受力问题	284
13.2.2	空间复杂桁架水平受力问题	287
13.2.3	棱台空间桁架单向受力问题	289
13.2.4	空间屋架垂直受力问题	291
13.2.5	复杂空间多层桁架受力问题	293
13.3	本章小结	295
参考文献		296
索引		302

第1章 绪 论

1.1 研究背景

有限元法 (Finite Element Methods, FEM) 是计算力学的重要分支, 是一种将连续体离散化以求解各种力学问题的数值方法。1960 年, Clough^[1] 首先使用了“有限单元法”这一名称。现在, 有限元法已经成为处理力学、物理、工程等计算问题的有效方法之一^[2]。但是目前工程和科学领域广为应用的基于势能原理的位移协调元法在分析一些典型的力学问题, 如大变形、接近不可压缩材料、薄板弯曲、移动边界等问题时还存在一些不足^[3]。

有限元的理论和方法发展到今天, 人们不再满足于仅仅采用常规的位移协调元方法^[4]。20 世纪 60 年代发生发展起来的非协调元、杂交元和混合元在实践中日益显示出巨大的优越性和发展的潜力, 近年来成为力学界、工程界和数学界的一个中心议题^[5]。在这个领域里, 人们面临的一个主要困难是多变量非协调元解的可靠性 (即解的唯一存在性、收敛性和对计算背景变化的适应性等) 问题, 既有理论方面的障碍, 又有如何把理论付诸实现的困难, 国际上流行的非协调函数多是靠经验拼凑出来的^[5], 上述方法距工程界可以直接掌握的力学工具仍有相当的差距。近年来, 工程与材料科学的迅速发展对数值模型的可靠性和非线性行为提出了新的更高的要求, 全面优化单元的数值性能的问题提出来了。目前非协调元在线性领域的应用已获得很大的成功, 吴长春等建立了一个生成非协调元形函数的一般公式^[5,6], 发展了基于位移模式的 Q6 元及 QM6 元^[7], 基于各种杂交模式的非协调元等^[8,9]。但是, 非协调元在非线性领域的应用由于受到各种因素的制约, 远没有在线性领域的应用成熟^[10], 目前仍是国际计算力学界研究的热点问题。此外, 由于上述的有限元方法均是采用传统二阶应力张量的描述体系, 因此在这种理论框架下, 建立和表述弹性大变形问题的数学模型较为复杂繁琐, 寻求新的突破较为困难。

在有限元的发展中, 研究基于余能原理的应力平衡元法寻求力学问题的上限解是一些学者所关心的课题^[11]。传统的应力平衡元法的求解思路通常是先构造单元的应力插值函数, 再通过积分求解出单元的柔度矩阵。但是由于插值函数的选择要保证应力在单元内、单元交界和应力边界上均保持平衡, 一般较难选择 (除杆、梁单元外); 在应力分量求出后, 位移的求解较为困难, 这就使应力平衡元法的应用受到较大的限制^[12]。此外, 传统的应力平衡元法的单元柔度矩阵一般不能得出

积分显式,需进行数值积分。在这种求解框架下,寻求应力平衡元法的进一步突破较为困难。

在有限变形理论研究方面,弹性大变形理论是弹性力学的一个分支,一般又称为有限变形理论。由于其描述的是自然界普遍存在的一类非线性现象,而且这一理论在工程实践中有着广泛的应用前景,所以它的理论研究一直受到力学界和工程界的重视。有限变形理论经历了漫长、曲折的发展过程,它是与理性力学的发展联系在一起的。近代的大变形弹性理论已由 Green, 郭仲衡和 Oden 等建立了基本框架^[13-15],但由于符号复杂,高度非线性,运算困难,因而不适合应用。此外,传统的位移协调元法在分析结构的有限变形力学行为时还存在一些问题:一是网格畸变引起的计算偏差;二是高度非线性方程组求解的收敛性;三是利用二阶张量描述体系建立数学模型的复杂性。因此,针对有限变形问题探索具有更简洁的应力和变形描述体系,建立不依赖网格且收敛性好的大变形新型有限元模型是一些学者所关心的。

高玉臣院士生前的工作给出了弹性大变形新的描述方法^[16-18],建立了两种典型本构关系^[19,20],并解决了一系列带有奇异点的代表性问题^[21-25]。利用高玉臣^[16]提出的“基面力”(Base Forces, BF)概念,可以完全替代传统的各种二阶应力张量描述一物质点在初始构型和当前构型的应力状态,可以得到弹性力学基本方程(平衡方程、边界条件、本构关系)的简洁表达式,还可以建立势能原理和余能原理。在研究物体的力学行为,特别是有限变形的分析中,一阶张量基面力具有传统的二阶应力张量无法比拟的优越性,提供了一个很好的分析工具。2003年,高玉臣^[17]较系统地提出了“基面力”(BF)的理论体系,并利用基面力概念给出了推导空间任意多面体单元刚度矩阵和柔度矩阵显式表达式的思路;2006年,高玉臣^[26]还基于基面力概念提出了弹性大变形余能原理,其表述形式与小变形情况完全一样,解决了国际上多年未能很好解决的难题。这些理论为基面力概念在有限元领域的应用奠定了理论基础。

在高玉臣院士的指导下,本书第一作者从2001年开始从事基于基面力概念的有限元相关理论研究及软件开发工作^[27];2006~2007年与北京交通大学工程力学研究所金明教授合作,在基于基面力概念的线弹性任意网格有限元理论及应用方面发表了一些研究成果^[28-30];2008~2009年与清华大学工程力学系刘应华教授合作,在基于基面力概念的几何非线性余能原理有限元理论及应用方面发表了一些研究成果^[31-34]。前期的研究成果表明,此种方法以基面力矢量(一阶张量)为基本未知量,具有简洁的积分显式有限元列式,无需进行数值积分,且编程简单,计算精度较高,收敛性较好,可适用于任意形状的有限元网格,对网格的畸变不敏感,可以进行大荷载步计算,具有较好的计算稳定性。作者将这种基于基面力概念的有限元法命名为“基面力单元法”(Base Force Element Method, BFEM)^[34]。进一步探

索这种“基面力单元法”(BFEM)在计算力学中的优势所在,并进一步拓宽此方法的应用范围,将具有较重要的理论意义和应用价值。

本课题具有自主的知识产权、创新性的研究思路和简洁实用的理论体系,研究工作具有理论意义和工程应用价值,研究成果具有广阔的应用前景。

1.2 国内外研究现状及进展

在与本课题相关的能量变分原理研究方面, Hellinger 在 1914 年第一个成功将变分原理应用于弹性力学问题的研究,不过当时他的工作并未引起人们的注意。直到 1950 年 Reissner^[35]做了相似的工作,再加上计算技术的发展,人们才开始在这方面有了进一步的认识。Hellinger 和 Reissner 所做的工作就是著名的 Hellinger-Reissner 混合变分原理。而胡海昌^[36,37]在 1954 年和鹭津久一郎^[38,39]在 1955 年进一步提出了位移、应力和应变三个独立的场变量的变分原理,即胡-鹭津 (Hu-Washizu) 三类变量变分原理。此外,钱令希^[40]在 1950 年研究的余能原理,从理论上和应用上为研究广义变分原理奠定了基础。钱伟长^[41]倡导 Lagrange 乘子法,为建立各个学科领域的广义变分原理提供了一个有效方法。此后人们又进一步研究了弹性力学及弹塑性力学的广义变分原理^[42-45],随着一些应用数学家、力学家和工程师对弹性力学能量变分原理的研究,以及电子计算机的广泛应用和发展,人们开始用变分原理作近似计算,这其中运用最为成功的便是有限单元法。

有限元成功激起了人们对弹性力学变分原理的研究热情,然而在过去的几十年中,人们对小变形问题的余能原理进行了深入的研究,但弹性大变形问题的余能原理的恰当形式却还没有被很好地建立。通过回忆可以发现,在力法出现以前,Navier 在 1827 年就提出了基于势能原理的位移法,但由于计算技术和手段的限制始终未能得到广泛的应用。而后在 1873 年和 1889 年, Castigliano 和 Engesser 提出了基于余能原理的力法,这种方法得到极其广泛的应用。直到 20 世纪 60 年代,由于计算技术和计算机的发展,人们才开始“偏爱”矩阵位移法,相比之下力法就不受重视了。那么随着今后技术的发展,这种情况是否会再次发生逆转,这一点值得人们去探索。因此对余能原理的进一步研究是有价值的。

对弹性大变形余能原理做出最初贡献的是 Hellinger。在小变形假设前提下,余能原理仅将应力分量作为独立变量,在势能原理中仅有位移是独立变量。然而如果有大旋转存在,这种良好的对称性将被打破。Reissner 在 1953 年阐述了以 Kirchhoff 应力张量为变量的余能原理,这一原理在有限变形力学中得到了广泛的研究^[46-49]。但是 Hellinger-Reissner 原理既包含未知位移也含有第二类 Piola-Kirchhoff 应力,同时含有两类未知变量,因此不被认为是纯粹的余能原理。此外它的极值性问题也一直未能很好地解决,仅被看成是一个驻值的理论,并且还产

生了很多争论。正如 Levinson^[50] 指出的, 利用第二类 Piola-Kirchhoff 应力作为基本未知量, 不可能建立起大变形余能原理并使之与小变形情况一致。其原因是, 公式中包含一个很讨厌的项, 它由应力及位移梯度的二次方组成。进一步, Levinson 给出了一个大变形余能原理, 他采用了第一类 Piola-Kirchhoff 应力为基本未知量。然而, Levinson 未证明这类应力的共轭量, 即位移梯度, 可以唯一地通过该应力表示出来。Ogden^[51] 讨论了这种逆表示的唯一性并给出了若干限制条件, 但是这些限制条件是不正确的。Gao 和 Strang^[52] 讨论了 Levinson 称之为讨厌的一项, 并且称它为“裂隙函数”。其后, 在文献^[53] 中, 将“裂隙函数”通过第一类和第二类 Piola-Kirchhoff 应力表示了出来, 从而得到了所谓的“纯余能原理”。然而, 该原理中包含着第二类 Piola-Kirchhoff 应力的逆, 这是很难求得的。此外, Gao 的余能公式与线弹性情况不相似。Fraeijs de Veubeke^[54] 基于极分解方法给出一个余能原理, 但它仍然不是纯余能原理。这样, 大变形余能原理仍是未解决的问题。还有其他许多学者对余能原理及其应用进行了深入的研究^[55-59]。

高玉臣^[26] 也对弹性大变形的余能原理进行了深入研究, 他利用“基面力”作为描述弹性系统应力状态的基本变量, 其共轭变量是位移梯度, 通过极分解定理可以将位移梯度唯一地分解为旋转与变形两部分。由本构方程和力平衡方程及力矩平衡方程, 可以用基面力来表示位移梯度的旋转和变形这两部分, 从而建立了弹性大变形的纯粹余能原理, 其表达式具有与小变形余能原理相同的形式^[26]。在本课题的研究中将进一步探索高玉臣提出的弹性大变形余能原理的适用性及新的应用领域。

在与本课题相关的其他各种有限元理论研究方面, 从应用数学的角度来看, 有限元法的基本思想可以追溯到 Courant 在 1943 年的工作。他首先尝试将在一系列三角形区域上定义的分片连续函数和最小势能原理相结合, 来求解 St. Venant 扭转问题。此后, 不少应用数学家、物理学家和工程师分别从不同角度对有限元法的离散理论、方法及应用进行了研究。随着电子计算机的广泛应用和发展, 有限元法的发展速度才显著加快。Turner 等^[60] 在 1956 年分析飞机结构时将矩阵位移法推广应用于弹性力学平面问题, 第一次给出了用三角形单元求得平面应力问题的正确解答。1960 年, Clough 进一步处理了平面弹性问题, 并第一次提出“有限单元法”的名称。

Fraeijs de Veubeke^[61] 在 1965 年将变分原理用作有限元基础建立了平衡元; 卞学鐸^[62-67] 基于多场变分原理建立了杂交元 (某些场变量仅在单元交界面定义) 的表达式; Tong^[68] 提出了杂交位移元表达格式; Wilson 等^[69] 提出了非协调位移元表达格式。Herrmann^[70] 在 1965 年用 Hellinger-Reissner 变分原理建立起混合型 (单元内包括多个场变量) 的有限元表达格式; 唐立民等^[71,72] 提出了拟协调元; 钟万勰等^[73] 研究了理性有限元; 龙驭球等^[74] 研究了广义协调元和分区混合元等。

还有许多学者为推进有限元法的发展做出了贡献。

对应不同的变分原理,人们研究出不同的单元^[74]:

- (1) 协调位移元 (采用在单元间精确协调的位移试函数)——最小势能原理;
- (2) 非协调位移元 (采用在单元间不精确协调的位移试函数)——分区势能原理;
- (3) 广义协调位移元 (采用在单元间广义协调的位移试函数)——分区势能原理的退化形式;
- (4) 应力杂交元 (采用应力试函数,满足平衡微分方程)——最小余能原理;
- (5) 混合元 (采用混合试函数,含位移、应力和应变)——广义变分原理;
- (6) 分区混合元 (部分单元采用位移试函数,其余单元采用应力试函数)——分区混合能量原理。

在与本课题相关的基面力单元法研究方面,2003年,高玉臣基于基面力的概念给出了推导空间任意多面体单元刚度矩阵和柔度矩阵显式表达式的思路^[17],为基面力的概念在有限元领域的应用奠定了理论基础。在高玉臣工作的基础上,彭一江^[27]在高玉臣院士的指导下从2001年开始进行基面力单元法(BFEM)的有关研究工作,在基面力单元法模型研究、软件开发和基面力元性能分析方面进行了一些前期的基础研究和开发工作^[27]。

近年来,作者在基面力单元法的计算性能研究,与常规位移模式有限元对比分析,以及基面力单元法在国际上的推广应用方面做了一些工作^[75-81]。国内外同行已开始对一些基面力单元法的研究成果进行了引用^[82-84]。

在高玉臣工作的基础上,作者还在基于势能原理的基面力单元法研究方面进行了一些工作^[85],并将其应用于再生混凝土材料细观损伤分析的大规模计算中,取得了一些研究成果^[86-89]。

近年来,在基面力相关理论、应用和数值分析方法研究方面还有一些学者取得了创新性的研究成果^[90-97]。金明教授出版的《非线性连续介质力学教程》^[98]对基面力理论也有一些介绍。

1.3 基面力单元法的特色

基面力单元法的特色如下:

- (1) 基面力的概念是高玉臣院士提出的用于表述大变形问题应力状态的一种物理量,其表达公式简洁,推导方程方便。
- (2) “基面力单元法”是作者在高玉臣院士工作的基础上提出的,是近几年发展起来的一种新型有限元法,其以基面力为基本未知量,具有简洁的张量表达形式。