HIT

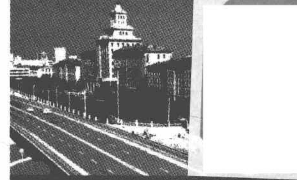
全国优秀数学教师专著系列

Budengshi Zhengtifa

不等式证题法

马茂年 主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



HIT

全国优秀数学教师专著系列

不等式证题法

Budengshi Zhengtifa

马茂年 主编

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书收录了作者近年来在不等式证法教学中的讲课实录，共分22章，有不等式证明的理论阐述，如对称问题、齐次问题、不等式的放缩问题，力求讲清不等式证明中的一些基本问题和解决方法；也有不等式证明中的一些案例分析，如恒成立问题、数列型问题、绝对值问题、分式和型问题、根式和型问题，尽力做到理论与实践的有机结合；还有一些不等式的证明方法，属笔者学习不等式的一些心得体会，也与读者一并分享.

本书能帮助读者理解不等式的基本思想，并能掌握不等式最常用的证题方法与技巧；它是一本较好的、比较初级的，但又有一定深度的入门书籍. 本书可供数学教学人员、大学数学系师生、中学学生及数学爱好者阅读和使用.

图书在版编目(CIP)数据

不等式证题法/马茂年主编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.4

ISBN 978-7-5603-6478-0

Ⅰ.①不…　Ⅱ.①马…　Ⅲ.①不等式—研究
Ⅳ.①O178

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第040706号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李广鑫
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张13.25　字数238千字
版　　次　2017年4月第1版　2017年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6478-0
定　　价　28.00元

前言

众所周知，数学学习首先应该注重基础，包括基本理论、基本概念和基本运算学习，其次应该注重解题方法和技巧的研究．后者如何实施？许多人都说多做题，“熟读唐诗三百首，不会作诗也能吟.”诚然，多做题不失为一种方法，但不是捷径．经过多年不等式教学实践，我们认为最有效的方法应该是注重题型的分类和解题技巧的总结．本书作者通过对历年的竞赛、高考和国内外书刊、QQ群、网络等资料的认真分析，筛选出重要题型，然后归纳总结出各种题型的解题方法和技巧，旨在帮助广大数学爱好者在研究不等式时能获得事半功倍、举一反三、触类旁通的效果．

本书是一本为解密不等式研究及快速提高不等式解题水平和技巧而编写的顶尖之作，具有如下一些特点：

(1)遴选题型恰当，具有典型性、代表性．所选题型有一定的难度、深度和广度，同时注意与高考、竞赛和研究紧密结合．

(2)针对题型精选的例题给出了详尽分析和解答，对不等式的研究很有启发性．通过认真学习本书，能达到高考、竞赛试题口述和“秒杀”的从容境界．

(3)总结了一些全新的不等式解题方法和技巧，可以大大提高学生的解题速度，拓宽解题思路，在高考和竞赛中一路高歌．

本书所选的都是经典的不等式题，当然会有一定的深度和难度.但作者充分了解这些问题的背景，求解和证明的过程中尽量做到深入浅出.任何事情都难以做到完美无缺，偶有疏漏，更有考虑不周的地方，从某种意义上说，这种不足毋宁说是一种优点：它给读者留下思考、想象和思维驰骋的空间.

作者虽倾心倾力，但限于能力和水平，难免有不妥之处，敬请广大读者和数学同行指正.

作者

2016年11月

目录

第 1 章　不等式六个基本量的证明和运用

> 科学的灵感，绝不是坐等可以等来的. 如果说，科学上的发现有什么偶然的机遇的话，那么这种“偶然的机遇”只能给那些学有素养的人，给那些善于独立思考的人，给那些具有锲而不舍的精神的人，而不会给懒汉.
>
> —— 华罗庚(中国)

【知识梳理】

$a^2+b^2+c^2$，$a+b+c$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$ab+bc+ca$，$abc$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ $(a,b,c\in\mathbf{R}_+)$之间有何不等关系呢？可以构成几个不等式链：

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}\geqslant ab+bc+ca\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}\geqslant 3\left[\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right]^2$$

实际上可以整理成

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\geqslant\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2\geqslant\frac{ab+bc+ca}{3}\geqslant(abc)^{\frac{2}{3}}\geqslant\left[\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}\right]^2$$

$$a+b+c\geqslant\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{3}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$$

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)<(a+b+c)^2$$

我们应该将$a^2+b^2+c^2$，$a+b+c$，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$，$ab+bc+ca$，$abc$，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ $(a,b,c\in\mathbf{R}_+)$这六个基本量牢记于心，一旦在试题中发现它们的影子，就仔细思考它们在不等式链中的位置，即与之相关联的不等号到底是哪一种(大于就放在左边，小于就放在右边)，也就是说，题目中的不等号也是一种很重要的隐含信息，指引着大家走向正确的方向.

【例题分析】

例 1 已知正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$.

(1) 求证：$\dfrac{abc}{ab+bc+ca}\leqslant\dfrac{1}{9}$;

(2) 求 $\dfrac{(a+b)^2}{2b+c}+\dfrac{(b+c)^2}{2c+a}+\dfrac{(c+a)^2}{2a+b}$ 的最小值.

证明 第(1)小题，我们注意到出现了两个基本量 $ab+bc+ca$，abc，其中 abc 一般出现在均值不等式中，因此考虑利用不等式链中 $ab+bc+ca\geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}$ 这一环；第(2)小题，只要利用柯西不等式的变式 $\dfrac{y_1^2}{x_1}+\dfrac{y_2^2}{x_2}+\dfrac{y_3^2}{x_3}\geqslant\dfrac{(y_1+y_2+y_3)^2}{x_1+x_2+x_3}$，就可一步解题.

(1) **证法一** $\dfrac{abc}{ab+bc+ca}\leqslant\dfrac{abc}{3\sqrt[3]{(abc)^2}}=\dfrac{\sqrt[3]{abc}}{3}\leqslant\dfrac{a+b+c}{9}=\dfrac{1}{9}$.

证法二 也可以将原式转变为

$$\frac{abc}{ab+bc+ca}=\frac{1}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

这个不等式中出现了不等式链中的另一环，即

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\frac{3}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$$

证法三 $(bc+ca+ab)(a+b+c)\geqslant(\sqrt{abc}+\sqrt{abc}+\sqrt{abc})^2$，所以 $bc+ca+ab\geqslant 9abc$，得证.

(2) 利用柯西不等式的变式 $\dfrac{y_1^2}{x_1}+\dfrac{y_2^2}{x_2}+\dfrac{y_3^2}{x_3}\geqslant\dfrac{(y_1+y_2+y_3)^2}{x_1+x_2+x_3}$，则有

$$\frac{(a+b)^2}{2b+c}+\frac{(b+c)^2}{2c+a}+\frac{(c+a)^2}{2a+b}\geqslant\frac{(2a+2b+2c)^2}{3a+3b+3c}=\frac{4}{3}(a+b+c)=\frac{4}{3}$$

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{3}$ 时取得最小值.

评注 学生在解题时，容易出现的典型错误就是以下不等式“打架”：由 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\Rightarrow abc\leqslant\dfrac{1}{27}$，$ab+bc+ca\leqslant\dfrac{(a+b+c)^2}{3}=\dfrac{1}{3}$，得

$$\frac{abc}{bc+ca+ab} \leqslant \frac{\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}$$

在证明不等式时必须要注意不等号的传递性，一旦出现不等式“打架”的情况，只能放弃这个方法，选择其他道路.

例 2　已知正数 a,b,c 满足 $ab+bc+ca=1$，求证：

(1) $(a+b+c)^2 \geqslant 3$；

(2) $a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab} \leqslant 1$.

证明　(1) 注意到

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$

及由柯西不等式可得

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+a^2) \geqslant (ab+bc+ca)^2$$

即有

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

所以有

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 3(ab+bc+ca) = 3$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号.

(2) 注意到

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab} = \sqrt{ab}\cdot\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ab}+\sqrt{ca}\cdot\sqrt{cb}$$

由柯西不等式可得

$$\begin{aligned}&(\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ac}+\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ab}+\sqrt{ca}\cdot\sqrt{cb})^2\\ \leqslant\ &(ab+bc+ca)(ac+ab+bc)=1\end{aligned}$$

即有

$$a\sqrt{bc}+b\sqrt{ac}+c\sqrt{ab} \leqslant 1$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号.

评注　第(2)小题注意到题目中不等号($\leqslant$)的位置，因为三个根号之和放在柯西不等式的右边，自然就可以把要证明的式子联想成柯西不等式中两两乘积之和.

例 3　已知正数 a,b,c 满足 $a+b+c=1$，求证：$a^3+b^3+c^3 \geqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

证法一 解题时可根据柯西不等式的特点去构造解题：

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)^2&=(a^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{3}{2}}c^{\frac{1}{2}})^2\\&\leqslant[(a^{\frac{3}{2}})^2+(b^{\frac{3}{2}})^2+(c^{\frac{3}{2}})^2](a+b+c)\\&=a^3+b^3+c^3\end{aligned} \quad ①$$

因为 $a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$,代入式①得

$$a^3+b^3+c^3\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

证法二 考虑用均值不等式证明,首先注意到等号成立的条件应该是在 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 处取得,因此配系数利用均值不等式得

$$a^3+\frac{a}{9}\geqslant\frac{2a^2}{3},b^3+\frac{b}{9}\geqslant\frac{2b^2}{3},c^3+\frac{c}{9}\geqslant\frac{2c^2}{3}$$

三式相加得

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+\frac{a+b+c}{9}&\geqslant\frac{2}{3}(a^2+b^2+c^2)\\&=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\\&\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}(a+b+c)^2\end{aligned}$$

又因为 $a+b+c=1$,所以

$$a^3+b^3+c^3+\frac{1}{9}\geqslant\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{9}$$

即有

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时取得等号.

证法三 同样用均值不等式,还可以配凑均值不等式

$$a^3+a^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{27}a^6}=a^2$$

同理

$$b^3+b^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{27}b^6}=b^2,c^3+c^3+\left(\frac{1}{3}\right)^3\geqslant3\sqrt[3]{\frac{1}{27}c^6}=c^2$$

三式相加得

$$2(a^3+b^3+c^3)+\frac{1}{9}\geqslant a^2+b^2+c^2$$

由于当 $a,b,c>0$，且 $a+b+c=1$ 时，$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{1}{9}$，所以

$$a^2+b^2+c^2\leqslant 2(a^3+b^3+c^3)+\frac{1}{9}\leqslant 3(a^3+b^3+c^3)$$

即

$$a^3+b^3+c^3\geqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$

评注　证法一注重运用柯西不等式；证法二、证法三注重运用不等式取等号时的条件.

例 4　已知 a,b,c 为正实数，且 $ab+bc+ca=1$.

(1) 求 $a+b+c-abc$ 的最小值；

(2) 求证：$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geqslant\frac{3}{4}$.

解　第(1) 小题可运用已知条件平方出发去求最值；第(2) 小题可构造柯西不等式去证明.

(1) 因为

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)\geqslant 3(ab+bc+ca)=3$$

又 a,b,c 为正实数，所以 $a+b+c\geqslant\sqrt{3}$，由 $1=ab+bc+ca\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$，即

$$abc\leqslant\frac{\sqrt{3}}{9}$$

所以

$$a+b+c-abc\geqslant\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{9}=\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

即当 $a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，$a+b+c-abc$ 的最小值为$\frac{8\sqrt{3}}{9}$.

(2) 由柯西不等式得

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}&\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+1+b^2+1+c^2+1}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}\\&=\frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+(ab+bc+ca)}\end{aligned}$$

$$\geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^2+\frac{1}{3}(a+b+c)^2}=\frac{3}{4}$$

所以$\frac{a^2}{a^2+1}+\frac{b^2}{b^2+1}+\frac{c^2}{c^2+1}\geqslant\frac{3}{4}$,当且仅当$a=b=c=\frac{\sqrt{3}}{3}$时取得等号.

评注　第(1)小题,主要运用了基本不等式$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$;第(2)小题运用了柯西不等式的变式$\frac{y_1^2}{x_1}+\frac{y_2^2}{x_2}+\frac{y_3^2}{x_3}\geqslant\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{x_1+x_2+x_3}$.

例 5　已知$a,b,c\in(0,1)$,且满足$a+b+c=2$.

(1) 求证:$1<ab+bc+ca\leqslant\frac{4}{3}$;

(2) 求证:$\frac{4}{3}\leqslant a^2+b^2+c^2<2$.

解　对于本题,我们都可以用不同的方法来解决它.下面我们各用两种方法来讲解:

(1) **证法一**　因为

$$\begin{aligned}2(ab+bc+ca)&=(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)\\&=4-(a^2+b^2+c^2)\\&\leqslant 4-(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

所以

$$ab+bc+ca\leqslant\frac{4}{3}$$

由$1<ab+bc+ca\Leftrightarrow 2<2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2-2(a^2+b^2+c^2)=4-2(a^2+b^2+c^2)$,可得$a^2+b^2+c^2<2$.

因为$a,b,c\in(0,1)$,所以$a^2<a,b^2<b,c^2<c$,三式相加即$a^2+b^2+c^2<a+b+c=2$,得证.

证法二　设$x=1-a,y=1-b,z=1-c$,则$x,y,z\in\mathbf{R}_+$,且$x+y+z=1$,则

$$\begin{aligned}ab+bc+ca&=(1-x)(1-y)+(1-y)(1-z)+(1-z)(1-x)\\&=3+(xy+yz+zx)-2(x+y+z)\\&=1+(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

因为

$$0<xy+yz+zx\leqslant\frac{(x+y+z)^2}{3}$$

即

$$0 < xy + yz + zx \leqslant \frac{1}{3}$$

所以

$$1 < ab + bc + ca \leqslant \frac{4}{3}$$

(2) **证法一**　由柯西不等式得 $(a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geqslant (a+b+c)^2 = 4$，所以 $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{4}{3}$.

因为 $a,b,c \in (0,1)$，所以 $a^2 < a, b^2 < b, c^2 < c$，三式相加即 $a^2+b^2+c^2 < a+b+c=2$，或用

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca) \\ &= 4 - 2(ab+bc+ca) < 4-2=2 \end{aligned}$$

综上得

$$\frac{4}{3} \leqslant a^2+b^2+c^2 < 2$$

证法二　(本题也可以用换元法解决)

设 $x=1-a, y=1-b, z=1-c$，则 $x,y,z \in \mathbf{R}_+$，且 $x+y+z=1$，则

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (1-x)^2+(1-y)^2+(1-z)^2 \\ &= 3-2(x+y+z)+(x^2+y^2+z^2) \\ &= 1+(x^2+y^2+z^2) \end{aligned}$$

因为 $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$，且

$$x^2+y^2+z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy+yz+zx) < (x+y+z)^2 = 1$$

所以

$$\frac{1}{3} \leqslant x^2+y^2+z^2 < 1$$

即有

$$\frac{4}{3} \leqslant a^2+b^2+c^2 = 1+x^2+y^2+z^2 < 2$$

评注　第(1)小题，不等式的左半边很难一步证明，但我们应该注意到这个题目的题干与常见题干有何不同？平时只要求 a,b,c 为正数，而本题却要求 $a,b,c \in (0,1)$，这是多此一举还是有意为之？显然这是一个可以挖掘的信息. 因此如何将 $a,b,c \in (0,1)$ 转化为正数呢？换元是最常用的方法，这就是

我们的证法二，换元法是用来处理 a,b,c 之间线性轮换问题的常见方法.

第(2)小题，我们主要是运用了一个常用不等式

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)<(x+y+z)^2$$

大家在解题的过程中要注意积累各式各样的不等式变形，这是解决不等式问题的关键.

六个基本量之间有着千丝万缕的联系，这是不等式命题的丰富资源，只要我们仔细钻研，自然熟能生巧，使这一类问题迎刃而解，而且还能变换出更多的精彩问题，期待大家通过这一章的学习，有更多的奇思妙解.

【课外训练】

1. 若 $a,b,x,y\in\mathbf{R}_+$，且 $x+y=1$，求证：$ab\leqslant(ax+by)(ay+bx)\leqslant\dfrac{(a+b)^2}{4}$.

2. 已知 $a,b,c\in(0,1)$，且满足 $a+b+c=2$. 求 $\dfrac{abc}{a^2+b^2+c^2}$ 的最大值.

3. (1) 已知 $x,y\in\mathbf{R}_+$，求证：$x^3+y^3\geqslant x^2y+xy^2$；

(2) 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$a^3+b^3+c^3\geqslant\dfrac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)$.

4. (1) 求证：当 $x>0$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}\geqslant\dfrac{2}{2+x^2}$；

(2) 已知 a,b,c 为正实数，$a^2+b^2+c^2=12$，求 $\dfrac{1}{\sqrt{1+a^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+b^3}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+c^3}}$ 的最小值.

5. 已知 a,b 为实数，且 $a>0,b>0$.

(1) 求证：$\left(a^2+b+\dfrac{1}{a}\right)\left(a+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{a^2}\right)\geqslant 9$；

(2) 求 $(4-3a)^2+9b^2+(a-b)^2$ 的最小值.

第 2 章　巧用均值不等式证题

发展独立思考和独立判断的一般能力，应当始终放在首位，而不应当把获得专业知识放在首位. 如果一个人掌握了他的学科的基础理论，并且学会了独立地思考和工作，他必定会找到他自己的道路，而且比起那种主要以获得细节知识为其培训内容的人，他一定会更好地适应进步和变化.

—— 爱因斯坦（美国）

【知识梳理】

当 $a,b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时取得等号；

当 $a,b\in\mathbf{R}_+$，则 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取得等号；

当 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，则 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取得等号.

说明：(1) 均值不等式反映的数学含义就是算术平均数不小于几何平均数.

(2) 注意“一正、二定、三相等”，有一个条件未达到，就无法取得等号.

(3) 积定和最小，和定积最大.

均值不等式是不等式链中重要一环，要特别注意配凑系数，以满足等号成立的条件.

【例题分析】

例 1　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$a^2+b^2+c^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2\geqslant 6\sqrt{3}$，并确定 a,b,c 为何值时，等号成立.

证法一　因为 a,b,c 均为正数，由均值不等式得

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3(abc)^{\frac{2}{3}}$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant \left(3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\right)^2=9(abc)^{-\frac{2}{3}}$$

故

$$a^2+b^2+c^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant 3(abc)^{\frac{2}{3}}+9(abc)^{-\frac{2}{3}} \geqslant 2\sqrt{27}=6\sqrt{3}$$

当且仅当$\begin{cases}a=b=c\\3(abc)^{\frac{2}{3}}=9(abc)^{-\frac{2}{3}}\end{cases}$，即 $a=b=c=3^{\frac{1}{4}}$ 时等号成立.

证法二 因为 a,b,c 均为正数，由柯西不等式得

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 \geqslant 3\frac{1}{ab}+3\frac{1}{bc}+3\frac{1}{ca}$$

故

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 &\geqslant ab+bc+ca+3\frac{1}{ab}+3\frac{1}{bc}+3\frac{1}{ca}\\&\geqslant 2\sqrt{3}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=6\sqrt{3}\end{aligned}$$

当且仅当$\begin{cases}a=b=c\\(ab)^2=(bc)^2=(ca)^2\end{cases}$，即 $a=b=c=3^{\frac{1}{4}}$，原式等号成立.

评注 本题巧用了均值不等式和柯西不等式及分析法两种不同的方法加以证明，我们要深刻理解其数学原理.

例 2 (1) 已知 $a,b\in(0,1)$，求证：$\sqrt[3]{a^2(1-b)} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4a-b+1}{3}$；

(2) 若 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，且 $a+b+c=1$，求 $S=\sqrt[3]{a^2(1-b)}+\sqrt[3]{b^2(1-c)}+\sqrt[3]{c^2(1-a)}$ 的最大值.

证明 (1) $\sqrt[3]{a^2(1-b)}=\sqrt[3]{2a\cdot 2a\cdot(1-b)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{2a+2a+(1-b)}{3}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4a-b+1}{3}$$

(2) 由(1)知

$$\sqrt[3]{a^2(1-b)}=\sqrt[3]{2a\cdot 2a\cdot(1-b)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4a+(1-b)}{3}$$

同理

$$\sqrt[3]{b^2(1-c)}=\sqrt[3]{2b\cdot 2b\cdot(1-c)}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{4}} \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{4b+(1-c)}{3}$$