高等院校数学课程改革创新系列教材

机电数学

◎游安军 主编 黄伟祥 廖桂波 龙海团 曾庆武 副主编

李军利 主审

中国工信出版集团

電子工業出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

http://www.phei.com.cn

高等院校数学课程改革创新系列教材

机电数学

游安军　主编
黄伟祥　廖桂波　龙海团　曾庆武　副主编
李军利　主审

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内容简介

“机电数学”是高等职业院校机电类专业(如机电一体化、机械制造、数控技术、模具设计与制造等)的一门创新性特色课程,它贯彻了“突出应用性,与专业结合,为专业服务”的课程思想,能为机电类专业技术人才的能力培养提供有效的支持。

本书内容包括三角函数及其应用、坐标与方程、导数与微分、定积分及其应用等4章,特别注重数学知识在专业实践中的应用,着力学生数学应用能力的培养。本书的逻辑结构清晰,语言叙述简明,例题讲解翔实,习题配备适当,非常适合作为高职高专机电类专业数学课程的教材,也可作为中、高级技师学校的数学课程的教学用书,还可供从事机电技术研发与应用的人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机电数学/游安军主编. —北京 :电子工业出版社,2016.7
ISBN 978-7-121-29028-2

Ⅰ. ①机… Ⅱ. ①游… Ⅲ. ①机电工程-应用数学-高等职业教育-教材 Ⅳ. ①TH-05 ②O29

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第128736号

策划编辑:朱怀永
责任编辑:底 波
印 刷:三河市兴达印务有限公司
装 订:三河市兴达印务有限公司
出版发行:电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036
开 本:787×1092 1/16 印张:11 字数:281千字
版 次:2016年7月第1版
印 次:2016年7月第1次印刷
印 数:3000册 定价:26.80元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题,请向购买书店调换,若书店售缺,请与本社发行部联系,联系及邮购电话:(010)88254888,88258888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn,盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式:zhy@phei.com.cn。

前　言

近 8 年来，我们一直致力于高等职业院校数学课程的理论研究与教材开发，先后出版了《计算机数学》(2013 年)和《电路数学》(2014 年)，这两本教材突破了传统《高等数学》的藩篱，已经对我国高职数学课程与教材改革产生了积极影响。

2014 年 5 月，我们就开始与机电一体化、数控技术、模具设计与制造等相关专业的负责人和教师进行坦诚交流，一是说明教材编写的意义和真实想法；二是因为存在知识上的盲区，请他们指导，并解决疑惑。在接下来的近两年时间里，我心无旁骛，反复查阅机电一体化和机械加工等专业的相关资料和教材，希望能从中找到一些有用的素材或得到一些启发，以便能建构一门在体系或结构上具有机电类专业特色的数学教材，直到 2016 年初才有了呈现在大家面前的这本《机电数学》。

“机电一体化”是机械工程学、电子学与信息技术等合为一体的技术，它包含许多复杂的构成要素(如控制器技术、软件技术、传感器技术、传动技术、接口技术、网络技术等)，其中最典型的技术是机器人技术和数控机床技术，所以本书所使用的“机电”也意指广义的“机电一体化”。从某种意义上讲，大学里开设的“机电一体化技术”、“机械设计与制造”、“数控加工技术”专业都可以归属到“机电”大类，而“机电数学”就是这个大类专业中基础性的课程。考虑到高职高专机电类人才的培养目标和学习要求，我们只选择了非常基础的初等微积分，削减了不必要的内容，对本书做了如下的内容选择和结构设计。本书包括三角函数及其应用、坐标与方程、导数及微分、定积分及其应用等 4 章。其中，第 1 章和第 2 章的主要内容都是中学阶段已经学习过的，当前侧重点是学会使用它们解决机械加工与设计中的计算问题。有些读者可能会有疑问：这两章的内容是不是偏多了？其实不然，因为它们是机电类专业的基本功，其应用是如此普遍，以致于不能不有所加强。第 3 章主要介绍导数与微分的概念、求导法则与公式、函数的极值、曲率等。第 4 章主要介绍不定积分与定积分的概念、性质与计算方法，定积分的应用等。这两章并不只是单纯地讲解数学知识，还包括了它们在机电类专业中的一些应用。同时，我们还降低了知识难度和数学技巧，增加了许多具有鲜明专业特色的例题和习题。希望读者通过适当的努力，就能掌握和运用这些数学知识，为专业技能的发展奠定良好的基础。

社会在变化，教育在发展，传统的“高等数学”课程也应该为高等教育大众化时代的专业发展做出积极的改变。因此，应该打破固有框架，去构建一个没有“高等”之标识、基于专业应用的类别化高职数学课程。转换到这个思想轨道上来需要多大的力度，我们从

来没有估量过，也没办法去估量，而我们的探索悄悄地经历了8年之久。我们非常感谢广州大学数学与信息科学学院院长、博士生导师、首批国家级教学名师曹广福教授，他的专业学识与人格魅力一直都令我们敬佩。他建议联合多方面的力量，深入到专业课之中去寻找和发现结合点。与他学术交流多年，不管得到的是赞同或是怀疑，最终都促使我们对高职数学课程做了更多、更深入的思考。

感谢珠海城市职业技术学院机电工程学院的领导和教师，特别是李军利院长、廖桂波副院长和龙海团主任，他们积极支持我们所倡导的高职数学课程类别化建设，并参与了编写本书的具体工作。还要感谢机电工程学院青年教师杨宝鹏，他花费许多时间带我们参观了十多个实训室，讲解了许多专业设备及其工作原理、工件加工方法，回答了诸多问题。还要感谢广东水利电力职业技术学院数学教学部主任黄伟祥副教授和广东松山职业技术学院曾庆武老师热情地参与编写工作。在编撰本书的过程中，我们参阅了机电类专业相关的书籍，在此对这些书籍的作者表示衷心感谢。当然，最后要感谢电子工业出版社朱怀永先生，他希望我能把高职数学课程与教材改革系列教材做得更广泛、更深入、更有特色。在这样一个躁动的时代，他一如既往地给予我支持与鼓励，实在是弥足珍贵。

另外，我们为本书提供了相关的教学资源，包括课程教学大纲、教学进度表、PPT课件等，请读者到电子工业出版社相关网站下载。由于我们才疏学浅，书中不足之处在所难免，期待广大读者和专家在使用与阅读本书的过程中提出建议和批评，并发送至电子邮箱 anjun65@sina.com。对此，我们将心存感激。

编　者

2016年5月于珠海

目录

第 1 章　三角函数及其应用 …… 1

1.1　三角函数的定义 …… 1

1.2　基本三角公式 …… 7

1.3　正弦型函数 …… 14

1.4　反三角函数 …… 19

1.5　解直角三角形 …… 24

1.6　解斜三角形 …… 38

第 2 章　坐标与方程 …… 46

2.1　坐标变换及其应用 …… 46

2.2　直线与二次曲线 …… 58

2.3　参数方程及其应用 …… 69

2.4　极坐标及其应用 …… 76

2.5　空间坐标与曲面方程 …… 89

第 3 章　导数与微分 …… 97

3.1　函数的极限 …… 97

3.2　导数与微分 …… 101

3.3　求导法则 …… 108

3.4　基本求导公式 …… 113

3.5　高阶导数 …… 118

3.6　函数的单调性与极值 …… 121

3.7　曲率 …… 128

第 4 章　定积分及其应用 …… 133

4.1　不定积分的概念 …… 133

4.2　基本积分公式 …… 136

4.3　不定积分的方法 …… 138

4.4　定积分的概念 …… 145

4.5 定积分的性质与方法 …… 149
4.6 定积分的应用 …… 154

部分习题参考答案 …… 162

参考文献 …… 169

第 1 章　三角函数及其应用

三角函数在机械制造中的应用非常广泛。运用它可建立零部件的数量关系，帮助我们对零件的轮廓形状、检验所需的尺寸等进行计算。本章主要学习三角函数与反三角函数的定义、基本三角公式，并用解三角形的方法解决机械加工中的常见计算问题。

1.1　三角函数的定义

如图 1.1.1 所示，在平面直角坐标系 xOy 中任取一点 P（这里假定点 P 在第一象限，如果它在第二、三、四象限，讨论是类似的），设 P 点坐标为 (x,y)，$\overline{OP}=r=\sqrt{x^2+y^2}>0$。记 $\angle QOP=\theta$（θ 的单位为度或弧度），那么角 θ 的三角函数可以定义如下：

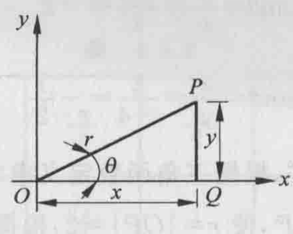


图　1.1.1

$$\text{正弦函数 } \sin\theta=\frac{\overline{QP}}{\overline{OP}}=\frac{y}{r}\quad \text{余弦函数 } \cos\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}}=\frac{x}{r}$$

$$\text{正切函数 } \tan\theta=\frac{\overline{QP}}{\overline{OQ}}=\frac{y}{x}\quad \text{余切函数 } \cot\theta=\frac{\overline{OQ}}{\overline{QP}}=\frac{x}{y}$$

本书主要介绍上面 4 个三角函数。为了更好地理解上述定义，可做如下说明：

首先，对于正弦函数 $\sin\theta$，对于一个给定的角 θ，这个角在平面直角坐标系里总是对应着唯一确定的一条终边（始边总是设定在 x 轴的正半轴上），在此终边上任取一点 P，设其坐标为 (x,y)，通过计算 $\frac{y}{r}$ 就可以确定 $\sin\theta$ 的值，而且这个值与终边上点 P 的选取是没有关系的。也就是说，只要角 θ 给定了，$\sin\theta$ 的值就是唯一确定的，从而 $\sin\theta$ 是 θ 的函数。

对于余弦函数 $\cos\theta$ 来说，可以做类似的解释。

其次，看一看 $\tan\theta$ 的定义。我们会发现，当角 θ 的终边位于 y 轴上时，点 P 的坐标

为(0,y),$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$没有意义(分母为0)。也就是说,除了角$\theta=k\cdot180°+90°$(其中$k=0,1,2,\cdots$)之外,角θ可以取其他的任何值,而且只要角θ给定,$\tan\theta$的值$\dfrac{y}{x}$就是唯一确定的,从而$\tan\theta$是θ的函数,而$\tan\theta$的定义域则是除$\theta=k\cdot180°+90°$之外的其他值。

对于余切函数$\cot\theta$来说,讨论也是类似的。

【例1.1.1】 已知角θ终边上的点$P(2,-4)$,根据三角函数定义求它的4个三角函数值。

解:由$x=2,y=-4$得$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$

根据定义得
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-4}{2\sqrt{5}}=\frac{-2\sqrt{5}}{5}$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{2}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{-4}{2}=-2$$
$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$$

【例1.1.2】 已知角$\theta=150°$,根据三角函数定义求它的4个三角函数值。

解:在角θ的终边上取一点P,使$r=|OP|=2$,根据直角三角形的性质,容易求得P点横、纵坐标分别为
$$x=-\sqrt{3},\quad y=1$$

根据定义得
$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$
$$\tan\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{-\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\cot\theta=\frac{x}{y}=\frac{-\sqrt{3}}{1}=-\sqrt{3}$$

在生产实际中,角θ可以有不同的表达方式。比如,在工程技术中经常用弧度表示一个角的大小。与半径等长的弧所对的圆心角称为1弧度的角。根据这个定义,角的弧度数等于它所对的弧长除以半径的商,即
$$\theta(\text{弧度})=\frac{l(\text{弧长})}{R(\text{半径})}$$

如果圆的半径是 R,那么圆的周长等于 $2\pi R$,半圆的周长等于 πR,所以

$$圆角(360°) = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi(弧度)$$

$$平角(180°) = \frac{\pi R}{R} = \pi(弧度)$$

于是可以得到

$$1° = \frac{\pi}{180}(弧度)$$

$$1(弧度) = \frac{180°}{\pi} \approx 57°17'45''$$

据此可以在弧度与角度之间进行换算。

在用弧度表示角的大小时,习惯上会把“弧度”两字省略,比如$\angle AOB = 60° = \frac{\pi}{3}$。

根据角的 θ 不同(弧度)值,可以求出相应的三角函数值。为了方便,我们把一些特殊角 θ 所对应的三角函数值 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$ 制成如表 1.1.1 所示,其中有些函数值要求读者自己填写。

表　1.1.1

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1				
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞				

另外,根据角 θ 的终边上点 $P(x,y)$所处的象限,它的两个坐标分量 x、y 会出现正或负的情况。比如,如果点 P 在第二象限中(如图 1.1.2 所示),则有 $x<0,y>0$,从而可以确定三角函数值 $\sin\theta>0$,$\cos\theta<0$,$\tan\theta<0$。

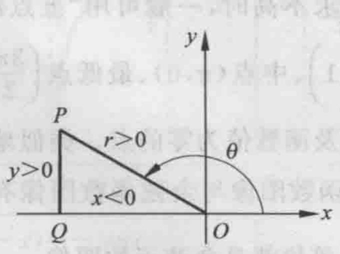


图　1.1.2

在此，我们将不同角度情况下三角函数值的正负列于表 1.1.2 之中。

表 1.1.2

	第 1 象限	第 2 象限	第 3 象限	第 4 象限
	$0<\theta<\pi/2$	$\pi/2<\theta<\pi$	$\pi<\theta<3\pi/2$	$3\pi/2<\theta<2\pi$
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−

【例 1.1.3】 根据下列已知条件，求角 θ。

(1) $\sin\theta=\frac{1}{2},\theta\in[0,2\pi)$；　　(2) $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3},\theta\in[-\pi,\pi)$

解：(1) 因为 $\sin\theta=\frac{1}{2}>0$，且 $\theta\in[0,2\pi)$，所以 $\theta\in[0,\pi]$。

而 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，且 $\frac{\pi}{6}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，故 $\theta=\frac{\pi}{6}$；

又 $\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，且 $\pi-\frac{\pi}{6}\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$，故 $\theta=\frac{5\pi}{6}$。

所以 $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$。

(2) 因为 $\tan\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}>0$，且 $\theta\in[-\pi,\pi)$，

所以 $\theta\in[-\pi,-\pi/2)\cup[0,\pi/2)$；

又 $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $\frac{\pi}{6}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 故 $\theta=\frac{\pi}{6}$；

而 $\tan\left(-\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\frac{-5\pi}{6}=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，且 $-\frac{5\pi}{6}\in\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，故 $\theta=-\frac{5\pi}{6}$。

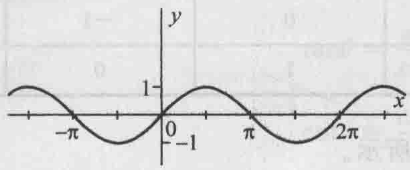
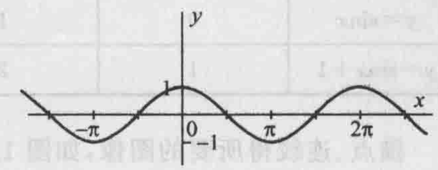
所以 $\theta=\frac{\pi}{6},-\frac{5\pi}{6}$。

函数图像是理解函数性质的重要手段。比如，正弦函数图像可结合它的周期变化的特点用描点法作出。在精度要求不高时，一般可用“五点法”作出一个周期函数，这五点分别是起点 $(0,0)$、最高点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$、中点 $(\pi,0)$、最低点 $\left(\frac{3\pi}{2},-1\right)$、终点 $(2\pi,0)$，即一个周期内函数值最大和最小的点以及函数值为零的点。类似地，可以作出余弦函数图像。

通过对比可以发现：正弦函数图像与余弦函数图像有完全相同的形状，只要把正弦函数图像沿 x 轴向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位就是余弦函数图像。

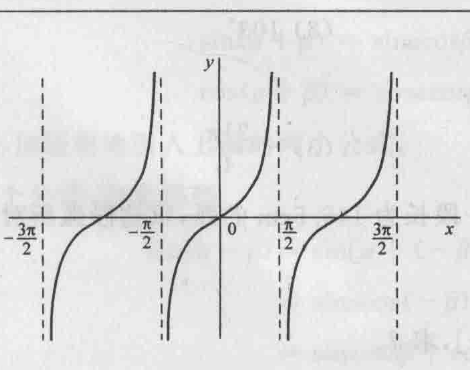
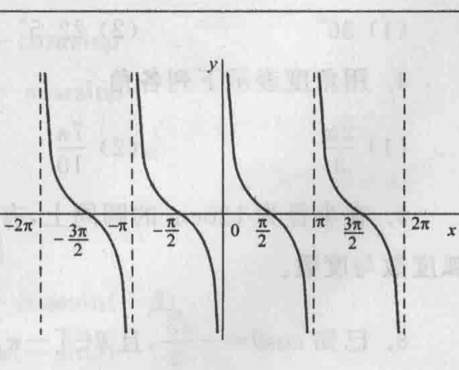
正弦函数、余弦函数的图形和性质参见表 1.1.3。

表　1.1.3

函数	$y=\sin x$	$y=\cos x$
定义域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$
图像		
周期	2π	2π
奇偶性	奇函数 $\sin(-x)=-\sin x$	偶函数 $\cos(-x)=\cos x$
单调性	在 $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数；在 $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数	在 $[(2k-1)\pi,2k\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数；在 $[2k\pi,(2k+1)\pi](k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数

正切函数、余切函数的图形和性质参见表 1.1.4。

表　1.1.4

函数	$y=\tan x$	$y=\cot x$
定义域	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$
值域	$\mathbf{R}$	$\mathbf{R}$
图像		
周期	π	π
奇偶性	奇函数 $\tan(-x)=-\tan x$	奇函数 $\cot(-x)=-\cot x$
单调性	在 $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)(k\in\mathbf{Z})$ 上是增函数	在 $(k\pi,(k+1)\pi)(k\in\mathbf{Z})$ 上是减函数

【例 1.1.4】 用五点法作出函数 $y=\sin x+1$ 在 $[0,2\pi]$ 的图像。

解：列表求函数值。

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	1	0	-1	0
$y=\sin x+1$	1	2	1	0	1

描点、连线得所要的图像，如图 1.1.3 所示。

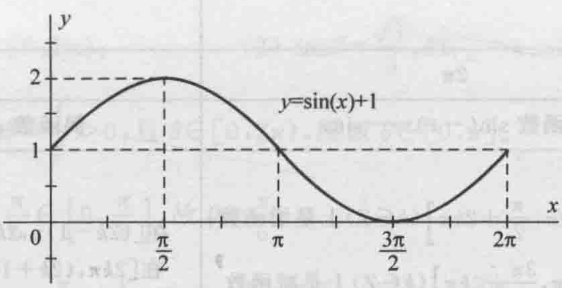


图 1.1.3

习题 1.1

1. 已知角 α 终边上一点为 $P(-2,-4)$，根据三角函数定义求它的 4 个三角函数值。

2. 画出下列函数的图形，并写出它们的周期。

(1) $y=|\sin\theta|$ (2) $y=|\cos\theta|$

3. 用弧度表示下列各角。

(1) $36°$ (2) $22.5°$ (3) $103°$

4. 用角度表示下列各角。

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{7\pi}{10}$ (3) $-\frac{21\pi}{4}$

5. 在半径为 120cm 的圆周上，有一段长为 145.5cm 的弧，求这段弧所对的圆心角的弧度数与度数。

6. 已知 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，且 $\theta\in[-\pi,\pi]$，求 θ。

7. 已知 θ 是第一象限角，且 $\tan\theta=\frac{5}{12}$，求 $\sin\theta$、$\cos\theta$ 的值。

8. 用五点法作出函数 $y=2\cos x-3$ 在 $[0,2\pi]$ 的图像。

1.2　基本三角公式

根据三角函数的定义，容易得到下面的许多关系。

（1）商数关系

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\tan\theta \cot\theta = 1$$

（2）平方关系

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

（3）诱导公式

同名转换：

$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta \quad \sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta \quad \cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(\pi+\theta) = \tan\theta \quad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

余名转换：

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta \quad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$$

（4）加法公式

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

在此，不加证明地引入上面的两个公式。

由这两个公式，容易得到

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta) &= \sin[\alpha+(-\beta)] \\ &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\sin\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

同理

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

进一步地，容易得到

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

下面证明第一个式子,请读者完成第二个式子的证明。

$$\begin{aligned}\tan(\alpha+\beta)&=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}\\&=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}\end{aligned}$$

(5) 积化和差

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$$

(6) 和差化积

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

下面证明其中的前两个式子。

由加法公式得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta$$

在此令 $\alpha+\beta=\varphi,\alpha-\beta=\gamma$,则

$$\alpha=\frac{\varphi+\gamma}{2},\quad \beta=\frac{\varphi-\gamma}{2}$$

于是

$$\sin\varphi+\sin\gamma=2\sin\frac{\varphi+\gamma}{2}\cos\frac{\varphi-\gamma}{2}$$

同理可得

$$\sin\varphi - \sin\gamma = 2\cos\frac{\varphi+\gamma}{2}\sin\frac{\varphi-\gamma}{2}$$

（7）倍角公式

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

在加法公式中，令 $\alpha=\beta=\theta$，则

$$\begin{aligned}\sin 2\theta &= \sin(\theta+\theta) \\ &= \sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos(\theta+\theta) \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta\end{aligned}$$

由平方关系得

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \quad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

于是

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) \\ &= 2\cos^2\theta - 1 \\ &= (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta \\ &= 1 - 2\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\theta &= \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} \\ &= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\end{aligned}$$

【例 1.2.1】 化简 $\dfrac{\cos(2\pi-\theta)\sin(\pi+\theta)\tan(-\pi-\theta)}{\sin(-\pi+\theta)\tan(3\pi-\theta)}$。

解：

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \frac{\cos\theta(-\sin\theta)(-\tan\theta)}{-\sin\theta(-\tan\theta)} \\ &= \cos\theta\end{aligned}$$

【例 1.2.2】 已知 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$，θ 是第四象限的角，求 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)$。

解：因为 $\cos\theta=\dfrac{3}{5}$ 且 θ 是第四象限的角，由平方关系得

$$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$=-\frac{4}{5}$$

则
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}$$

$$=-\frac{4}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

【例 1.2.3】 已知两个正弦交流电流 $i_1=I_1\sin(\omega t+\theta_1)$，$i_2=I_2\sin(\omega t+\theta_2)$，求证它们的和 $i=i_1+i_2$ 仍是一个正弦交流电，即

$$i=i_1+i_2=I\sin(\omega t+\theta)$$

其中 $I=\sqrt{I_1^2+I_2^2+2I_1I_2\cos(\theta_1-\theta_2)}$，$\theta=\arctan\dfrac{I_1\sin\theta_1+I_2\sin\theta_2}{I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2}$。

证明：$i=i_1+i_2$

$$=I_1\sin(\omega t+\theta_1)+I_2\sin(\omega t+\theta_2)$$

$$=I_1(\sin\omega t\cos\theta_1+\cos\omega t\sin\theta_1)+I_2(\sin\omega t\cos\theta_2+\cos\omega t\sin\theta_2)$$

$$=\sin\omega t(I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2)+\cos\omega t(I_1\sin\theta_1+I_2\sin\theta_2)$$

在此，令 $I=\sqrt{(I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2)^2+(I_1\sin\theta_1+I_2\sin\theta_2)^2}$

$$=\sqrt{I_1^2+I_2^2+2I_1I_2\cos(\theta_1+\theta_2)}$$

再令 $\cos\theta=\dfrac{I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2}{I}$，$\sin\theta=\dfrac{I_1\sin\theta_1+I_2\sin\theta_2}{I}$，于是有

$$i=i_1+i_2$$

$$=I\left(\sin\omega t\cdot\frac{I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2}{I}+\cos\omega t\cdot\frac{I_1\sin\theta_1+I_2\sin\theta_2}{I}\right)$$

$$=I(\sin\omega t\cos\theta+\cos\omega t\sin\theta)$$

$$=I\sin(\omega t+\theta)$$

其中，$\theta=\arctan\dfrac{I_1\sin\theta_1+I_2\sin\theta_2}{I_1\cos\theta_1+I_2\cos\theta_2}$。

【例 1.2.4】 如图 1.2.1 所示，在某负载电路中加上正弦交流电压 $e=E\sin\omega t$ 时，有电流 $i=I\sin(\omega t-\varphi)$ 流过。求证：电路中被供给的瞬时电功率为

$$P=ei=E_eI_e[\cos\varphi-\cos(2\omega t-\varphi)]$$

其中，$E_e=\dfrac{E}{\sqrt{2}}$，$I_e=\dfrac{I}{\sqrt{2}}$ 分别称为 e 和 i 的有效值。