

/// 粒计算研究丛书 ///

粒计算、商空间及三支决策的 回顾与发展

张燕平 姚一豫 苗夺谦 王国胤 著
梁吉业 李天瑞 吴伟志 赵 姝



科学出版社

粒计算研究丛书

粒计算、商空间及三支决策的 回顾与发展

张燕平 姚一豫 苗夺谦 王国胤 著
梁吉业 李天瑞 吴伟志 赵 姝

科学出版社

北 京

内 容 简 介

粒计算是当前计算智能研究领域模拟人类思维 and 解决复杂问题的新方法, 研究内容覆盖了有关粒度的主要理论、方法和技术, 是研究复杂问题求解、大数据挖掘和模糊不确定信息处理等当前面临的关键问题的有效工具。本书介绍了商空间理论、三支决策理论和粗糙集理论等粒计算研究的概述和最新进展, 由国内外相关领域的学者共同撰写而成。全书共 16 章, 主要由三部分组成, 具体包括问题求解商空间理论形成始末、商空间理论及应用综述、多粒度商空间分类搜索与结构分析、基于粒度空间的最优聚类模型及应用、基于粒化的服务组合优化问题研究、基于商空间理论的网络图路径分析、三支决策: 三分而治的思维方式和方法、面向不完备数据的三支决策聚类方法、基于广义和狭义视角下的三支决策模型、多粒度三支决策: 理论及应用、基于代价敏感的三支决策边界域处理模型研究、多粒度标记决策表的知识表示与知识获取、基于概率粗糙集的流计算学习方法、群决策的区间犹豫模糊多粒度建模方法、粗糙集理论的多粒度研究、模糊软集信息集成与群决策方法。

本书可供计算机、自动化、应用数学等相关专业的研究人员、高校师生和工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

粒计算、商空间及三支决策的回顾与发展 / 张燕平等著. —北京: 科学出版社, 2017

(粒计算研究丛书)

ISBN 978-7-03-052693-9

I. ①粒… II. ①张… III. ①人工智能-计算方法 IV. ①TP18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 087766 号

责任编辑: 裴 育 纪四穗 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 华路天然

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 5 月第 一 版 开本: 720×1000 B5

2017 年 5 月第一次印刷 印张: 27 1/2

字数: 532 000

定价: 158.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《粒计算研究丛书》编委会

名誉主编：李德毅 张 钹

主 编：苗夺谦 王国胤 姚一豫

副主编：梁吉业 吴伟志 张燕平

委 员：（按拼音排序）

陈德刚 代建华 高 阳 胡清华

胡学钢 黄 兵 李德玉 李凡长

李进金 李天瑞 刘贵龙 刘 清

米据生 史开泉 史忠植 王飞跃

王 珏 王熙照 徐久成 杨 明

姚静涛 叶东毅 于 剑 曾黄麟

张 铃 张文修 周献忠 祝 峰

秘 书：王睿智 张清华

丛 书 序

粒计算是一个新兴的、多学科交叉的研究领域。它既融入了经典的智慧，也包括了信息时代的创新。通过十多年的研究，粒计算逐渐形成了自己的哲学、理论、方法和工具，并产生了粒思维、粒逻辑、粒推理、粒分析、粒处理、粒问题求解等诸多研究课题。值得骄傲的是，中国科学工作者为粒计算研究发挥了奠基性的作用，并引导了粒计算研究的发展趋势。在过去几年里，科学出版社出版了一系列具有广泛影响的粒计算著作，包括《粒计算：过去、现在与展望》、《商空间与粒计算——结构化问题求解理论与方法》、《不确定性与粒计算》等。为了更系统、全面地介绍粒计算的最新研究成果，推动粒计算研究的发展，科学出版社推出了《粒计算研究丛书》。本丛书的基本编辑方式为：以粒计算为中心，每年选择该领域的一个突出热点为主题，邀请国内外粒计算和该主题方面的知名专家、学者就此主题撰文，来介绍近期相关研究成果及对未来的展望。此外，其他相关研究者对该主题撰写的稿件，经丛书编委会评审通过后，也可以列入该系列丛书。本丛书与每年的粒计算研讨会建立长期合作关系，丛书的作者将捐献稿费购书，赠给研讨会的参会者。中国有句老话，“星星之火，可以燎原”，还有句谚语，“众人拾柴火焰高”。《粒计算研究丛书》就是基于这样的理念和信念出版发行的。粒计算还处于婴儿时期，是星星之火，在我们每个人的爱心呵护下，一定能够燃烧成燎原大火。粒计算的成长，要靠大家不断地提供营养，靠大家的集体智慧，靠每一个人的独特贡献。这套丛书为大家提供了一个平台，让我们可以相互探讨和交流，共同创新和建树，推广粒计算的研究与发展。本丛书受益于粒计算研究每一位同仁的热心参与，也必将服务于从事粒计算研究的每一位科学工作者、老师和同学。《粒计算研究丛书》的出版得到了众多学者的支持和鼓励，同时也得到了科学出版社的大力帮助。没有这些支持，也就没有本丛书。我们衷心地感谢所有给予我们支持和帮助的朋友们！

《粒计算研究丛书》编委会

2015年7月

前 言

随着大数据时代的到来,恰逢人工智能的又一次发展高潮,急需一种化繁为简、快速有效处理大数据的计算理论和工具,如何使机器能够模拟人类认识客观世界的认知过程,成为人工智能领域的一项重要任务。粒计算(granular computing)是当前人工智能研究领域中模拟人类思维和解决复杂问题的新方法。商空间理论、三支决策理论和粗糙集理论是粒计算的主要理论。

粒计算覆盖了有关粒度的主要理论、方法和技术,是研究复杂问题求解、大数据挖掘和不确定性信息处理等问题的有力工具。人类智能的一个公认特点就是人们能从极为不同的粒度上观察和分析同一问题,人们不仅能在不同粒度的世界上进行问题求解,而且能够很快地从一个粒度世界跳到另一个粒度世界,往返自如,毫无困难。这种处理不同粒度世界的能力,正是人类问题求解的强有力的表现。粒计算理论提出至今已有 30 多年,受到众多研究者的广泛关注,成为学术界重视的一个新研究领域。

随着粒计算研究工作的不断深入,国内外学者从不同的角度展开了相关研究,组织了国际、国内学术会议和暑期研讨会等多种形式的学术交流活动,并相继出版了一系列著作。例如,2007 年张钹、张铃出版了《问题求解理论及应用——商空间粒度计算理论及应用(第 2 版)》(清华大学出版社);2008 年由 13 位海内外华人学者合著出版了《粒计算:过去、现在与展望》(科学出版社);2010 年结合粒计算专题在安徽大学举办了商空间与粒计算的专题研讨会,出版了《商空间与粒计算——结构化问题求解理论与方法》(科学出版社);2011 年在同济大学举办了不确定性粒计算的专题研讨会,出版了《不确定性与粒计算》(科学出版社);2012~2015 年相继出版了《云模型与粒计算》(科学出版社)、《三支决策与粒计算》(科学出版社)和《三支决策——复杂问题求解方法与实践》(科学出版社)。另外,中国粒计算学术研讨会和 IEEE International Conference on Granular Computing 等国内外有关学术活动的开展,也极大地促进了粒计算理论及其应用的发展。

本书由国内外粒计算研究领域的多位华人学者合作撰写。书中介绍了各位作者及其研究团队近年来在商空间理论、三支决策理论和粗糙集理论研究方面取得的最新研究成果,总结了相关研究进展。本书可为人工智能领域的专家或研究人

员提供参考。

全书组织结构如下：第1章问题求解商空间理论形成始末，由张钊撰写；第2章商空间理论及应用综述，由赵姝、张冬、余成进、陈洁、张燕平撰写；第3章多粒度商空间分类搜索与结构分析，由张清华、张涛、徐凯、王国胤撰写；第4章基于粒度空间的最优聚类模型及应用，由唐旭清撰写；第5章基于粒化的服务组合优化问题研究，由张以文、崔光明撰写；第6章基于商空间理论的网络图路径分析，由何富贵、张燕平、赵姝撰写；第7章三支决策：三分而治的思维方式和方法，由姚一豫撰写；第8章面向不完备数据的三支决策聚类方法，由洪、苏婷、王国胤撰写；第9章基于广义和狭义视角下的三支决策模型，由刘盾、梁德翠撰写；第10章多粒度三支决策：理论及应用，由鞠恒荣、李华雄、周献中、黄兵、杨习贝撰写；第11章基于代价敏感的三支决策边界域处理模型研究，由陈洁、方莲娣、王刚、赵姝、张燕平撰写；第12章多粒度标记决策表的知识表示与知识获取，由吴伟志撰写；第13章基于概率粗糙集的流计算学习方法，由徐健锋、张远健、张志飞、苗夺谦撰写；第14章群决策的区间犹豫模糊多粒度建模方法，由张超、李德玉、翟岩慧撰写；第15章粗糙集理论的多粒度研究，由徐怡、李龙澍撰写；第16章模糊软集信息集成与群决策方法，由毛军军、吴涛、王翠翠、姚登宝、钱庆庆撰写。

本书的出版得到了国家高技术研究发展计划(2015AA124102-6)、国家自然科学基金(61673020、61402006、61602003)等项目的资助，在此一并致谢。

由于作者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请读者批评指正。

目 录

丛书序

前言

第 1 章 问题求解商空间理论形成始末	1
1.1 引言	1
1.2 商空间理论的探索阶段	1
1.3 商空间理论的形成阶段	3
1.4 本章小结	4
参考文献	5
第 2 章 商空间理论及应用综述	8
2.1 引言	8
2.2 商空间理论基础	9
2.2.1 基本模型	9
2.2.2 基本操作	10
2.2.3 基本性质和原理	12
2.3 商空间理论的发展	14
2.3.1 基于模糊等价关系的商空间模型	14
2.3.2 基于模糊相容关系的商空间模型	17
2.3.3 动态商空间模型	18
2.3.4 基于代数结构的商空间模型	19
2.3.5 合成技术的扩充	20
2.4 基于商空间理论的模型及应用研究	22
2.4.1 分类	22
2.4.2 聚类	23
2.4.3 模式识别	23
2.4.4 网状问题求解	24
2.4.5 推荐	24
2.4.6 系统层次设计	25
2.4.7 资源调度	25
2.4.8 模糊控制	25

2.4.9 服务组合优化	25
2.4.10 信息检索	25
2.4.11 其他应用	26
2.5 本章小结	26
参考文献	28
第3章 多粒度商空间分类搜索与结构分析	32
3.1 引言	32
3.2 相关基本概念及引理	34
3.3 基于统计期望的多粒度搜索模型和方法	36
3.3.1 粒化层数为1的情况	38
3.3.2 粒化层数为2的情况	39
3.3.3 粒化层数为 i 的情况	41
3.3.4 确定最优粒化层数	43
3.4 模糊等价关系对应的多粒度知识空间	51
3.5 分类同构与粒度同构	55
3.6 同构模糊等价关系的生成算法	56
3.7 本章小结	60
参考文献	61
第4章 基于粒度空间的最优聚类模型及应用	66
4.1 引言	66
4.2 粒度空间理论与优化聚类指标	67
4.2.1 粒度空间理论	67
4.2.2 基于粒度空间的优化聚类指标	69
4.2.3 获取最优聚类的聚类算法	71
4.3 H1N1 流感病毒蛋白系统的多层结构及系统约简	72
4.3.1 H1N1 流感病毒蛋白的序列特征提取	73
4.3.2 H1N1 流感病毒的最优聚类与签名病毒选取	74
4.3.3 病毒系统二级结构的有效性验证与系统约简	75
4.3.4 结果分析与讨论	76
4.4 基于决策树的乳腺癌亚型异质性探索	78
4.4.1 乳腺癌研究现状	78
4.4.2 数据资源	79
4.4.3 方法和模型	79
4.4.4 实验结果	83
4.4.5 结果讨论	85

4.5 本章小结	89
参考文献	89
第5章 基于粒化的服务组合优化问题研究	94
5.1 引言	95
5.2 服务组合问题常用术语及模型	96
5.2.1 服务组合模型	97
5.2.2 质量约束模型	99
5.3 基于任务粒化的优化方法	103
5.3.1 任务粒化模型构建	104
5.3.2 单属性服务组合任务粒化可行性分析	108
5.3.3 多属性服务组合问题的任务粒化可行性分析	109
5.3.4 任务粒化时间复杂度分析	112
5.4 基于约束粒化的 QoS 约束感知服务组合优化方法	112
5.4.1 质量约束聚合	113
5.4.2 索引图构建	116
5.4.3 索引图查询	119
5.5 本章小结	120
参考文献	121
第6章 基于商空间理论的网络图路径分析	123
6.1 引言	123
6.2 商空间理论	124
6.2.1 等价关系商空间理论	124
6.2.2 相容关系商空间理论	126
6.2.3 网络图数据粒化	128
6.3 基于商空间理论的路径分析	131
6.3.1 加权网络图商空间最佳路径方法	131
6.3.2 无向无权网络图商空间最短路径方法	133
6.3.3 基于商空间的网络图多条最短路径方法	135
6.4 商空间理论的大规模网络图最短路径分析	136
6.4.1 基于社团的多粒度网络图分解	136
6.4.2 大规模网络图最短路径方法	138
6.4.3 实验及其分析	140
6.5 本章小结	144
参考文献	145

第 7 章 三支决策：三分而治的思维方式和方法	146
7.1 引言	146
7.2 三支决策的三个发展阶段	148
7.3 三分而治的三支决策模型	150
7.4 三支决策与科学研究	151
7.4.1 三支决策中的三点、三线和一面	151
7.4.2 三元思维在科学研究中的实例	152
7.5 三元思维与粒计算三元论	154
7.6 本章小结	157
参考文献	157
第 8 章 面向不完备数据的三支决策聚类方法	162
8.1 引言	162
8.2 相关基础理论	165
8.2.1 不完备信息系统	165
8.2.2 三支决策聚类表示	166
8.2.3 无监督聚类与半监督聚类	167
8.2.4 基于密度峰值的快速聚类方法	168
8.3 面向不完备数据的三支决策聚类策略	169
8.3.1 不完备数据的相似性度量	169
8.3.2 基于邻域对象的缺失数据区间填充	171
8.3.3 不完备数据的无监督聚类算法	172
8.3.4 不完备数据的半监督聚类算法	174
8.4 实验分析	175
8.4.1 数据集及评价指标	175
8.4.2 确定邻域半径的实验	177
8.4.3 对比实验	178
8.5 本章小结	184
参考文献	185
第 9 章 基于广义和狭义视角下的三支决策模型	188
9.1 引言	188
9.2 两个案例：生活中的三支决策	190
9.3 广义三支决策模型	193
9.4 狭义三支决策模型	197
9.5 三支决策的粒结构层次模型	201
9.6 本章小结	202
参考文献	203

第 10 章 多粒度三支决策：理论及应用	205
10.1 引言	205
10.2 三支决策与粒计算	206
10.3 三支决策与粗糙集	208
10.3.1 Pawlak 粗糙集中的三支决策	208
10.3.2 决策粗糙集中的三支决策	209
10.4 基于 Parallel 策略的多粒度决策粗糙集模型	210
10.4.1 乐观与悲观多粒度决策粗糙集	211
10.4.2 柔性多粒度决策粗糙集	212
10.4.3 决策规则和决策代价	215
10.4.4 阈值学习的朴素算法	217
10.4.5 实验分析	218
10.5 基于 Sequential 策略的多粒度三支分类模型	221
10.5.1 Sequential 三支决策方法	221
10.5.2 Local 和 Global 约简	222
10.5.3 Sequential 三支分类器	225
10.5.4 实验分析	226
10.6 本章小结	229
参考文献	229
第 11 章 基于代价敏感的三支决策边界域处理模型研究	233
11.1 引言	233
11.2 三支决策相关理论	235
11.2.1 构造型覆盖算法简介	235
11.2.2 基于构造型覆盖算法的三支决策模型	236
11.2.3 基于构造型覆盖算法的三支决策模型的边界域处理方法	237
11.3 基于 CCA 的代价敏感边界域处理模型	239
11.3.1 三种选择覆盖半径的方法	239
11.3.2 CPBM 算法实现过程	240
11.3.3 实验结果及分析	241
11.4 基于 K 最近邻的代价敏感三支决策边界域处理模型	245
11.4.1 K 最近邻算法简介	245
11.4.2 CTK 算法的实现过程	246
11.4.3 实验结果及分析	249
11.5 基于代价敏感边界域处理的社团发现算法	253
11.5.1 基于聚类粒化的重叠社团划分算法	254

11.5.2 重叠社团中的三个域	255
11.5.3 C-TWD 算法实现过程	256
11.5.4 实验结果及分析	256
11.6 本章小结	257
参考文献	258
第 12 章 多粒度标记决策表的知识表示与知识获取	260
12.1 引言	260
12.2 标记划分结构与粗糙近似	261
12.2.1 Pawlak 粗糙集近似	261
12.2.2 标记划分	262
12.2.3 多粒度标记划分结构	267
12.2.4 多粒度标记划分决策结构	270
12.3 多粒度标记决策表的知识获取	271
12.3.1 决策表与决策规则	271
12.3.2 多粒度标记信息系统	275
12.3.3 协调的多粒度标记决策表的知识获取	279
12.3.4 不协调的多粒度标记决策表的知识获取	281
12.4 本章小结	287
参考文献	287
第 13 章 基于概率粗糙集的流计算学习方法	289
13.1 引言	289
13.2 概率粗糙集三支决策基础理论	291
13.3 概率粗糙集的流计算方法	292
13.3.1 流计算学习方法下的条件概率更新	292
13.3.2 流计算学习方法下的三支区域更新	299
13.3.3 流计算学习方法下的单对象更新算法	303
13.4 实验与分析	307
13.5 本章小结	314
参考文献	314
第 14 章 群决策的区间犹豫模糊多粒度建模方法	316
14.1 引言	316
14.2 相关概念与理论	318
14.2.1 区间犹豫模糊集的定义	318
14.2.2 区间犹豫模糊集的运算	319
14.2.3 区间犹豫模糊集的比较	320

14.2.4 双论域多粒度粗糙集	321
14.3 双论域区间犹豫模糊多粒度粗糙集	322
14.4 基于双论域区间犹豫模糊多粒度粗糙集的决策模型	324
14.4.1 问题描述	324
14.4.2 模型建立	326
14.4.3 模型算法	331
14.5 算例及分析	332
14.5.1 算例描述	332
14.5.2 决策分析	335
14.5.3 对比性分析	338
14.6 本章小结	340
参考文献	340
第 15 章 粗糙集理论的多粒度研究	346
15.1 引言	346
15.2 粗糙集相关理论	347
15.3 基于属性的多粒度粗糙集研究	349
15.3.1 多粒度粗糙集模型	349
15.3.2 多粒度粗糙集模型的粒度约简	354
15.3.3 多粒度粗糙集模型的规则提取	356
15.3.4 多粒度粗糙集模型的扩展	360
15.4 基于属性值的多粒度粗糙集研究	360
15.4.1 概念层次树	361
15.4.2 层次粗糙集模型	363
15.4.3 基于层次粗糙集模型的泛化约简	367
15.4.4 基于层次粗糙集模型的规则提取	368
15.5 本章小结	372
参考文献	372
第 16 章 模糊软集信息集成与群决策方法	377
16.1 引言	377
16.2 模糊软集的相关模型	377
16.3 模糊软矩阵的粒度分析	382
16.3.1 模糊软矩阵的可能度及 α -优势类	382
16.3.2 基于 α -覆盖近似空间的变精度粒度分析	384
16.4 优势关系下的二粒度双极值粗糙	387
16.5 模糊软集信息的集成算子	390

16.5.1 模糊软集的集成算子·····	390
16.5.2 直觉模糊软集的集成算子·····	392
16.5.3 动态双极值模糊软集信息集成·····	394
16.6 模糊软集信息的群决策方法·····	394
16.6.1 基于水平软集的模糊软集决策方法·····	394
16.6.2 基于模糊软矩阵的群决策方法·····	396
16.6.3 基于水平软集的直觉模糊软集决策方法·····	401
16.6.4 基于直觉模糊软矩阵的群决策方法·····	402
16.6.5 双极值模糊软集的决策方法·····	407
16.7 本章小结·····	410
参考文献·····	410
后记·····	414

第 1 章 问题求解商空间理论形成始末

张 钹

清华大学计算机科学与技术系

1.1 引 言

商空间理论作为粒度计算中的一种主要理论,在多粒度计算方面有着独特的优势。它将不同粒度世界与数学上的商集概念相互统一,是论述多粒度计算的主要理论模型。多粒度计算来源于 Hobbs 的论断:人类智能进行求解的基本特征之一,就是具有从不同的粒度上观察世界,并且能够很快地从一个抽象层次转换到其他层次的能力,即分层次地处理^[1]。对于复杂问题,多粒度计算能够有效地降低问题求解的复杂性。商空间理论研究的是各个商空间之间的关系,商空间的分解、合成及商空间中的推理等。近年来,商空间理论在图像处理^[2,3]、网络分析^[4]、复杂问题求解^[5-7]等方面得到了广泛的应用。本章主要对商空间理论的形成始末进行简要的回顾,并对商空间理论的未来发展进行展望。

1.2 商空间理论的探索阶段

我与张铃合作从事人工智能研究始于 1978 年,当时刚刚改革开放,国内相关的文献很少,尽管我们查阅过所有能够收集到的文献,但也只能了解人工智能的皮毛。1980 年 2 月,我到美国伊利诺伊大学(University of Illinois Urbana-Champaign)CSL(Coordinated Science Laboratory)访问,目的是学习人工智能。当时 CSL 在人工智能上有两个研究方向,一个是机器人,另一个是专家系统,其实这两者也是当时美国各大学人工智能的主要研究内容。尽管实验室有一台 PUMA 机械臂,当时却没有从事有关研究的项目。我们对机器人颇感兴趣,经过商量之后,把机器人运动规划作为首个研究目标。当时国际上运动规划(motion planning)的研究也刚刚起步,可参考的文献很少,我们找到其中的 3 篇^[8-10]。通过这些文献知道了什么是机器人运动规划,以及一个称为剖分(subdivision)的规划方法。这个方法尽管非常简单与直观,但我们从中学到了一个机器人规划的表示方法——组合空间

(configuration space)表示。它的基本思路是：将机器人压缩为一个点，而将“障碍”进行相应的扩展，形成一个新的组合空间。于是将机器人运动路径规划问题转变为组合空间中寻找点的无碰轨迹。剖分法很简单，先将组合空间切割成细小的方块，从这些小块中找出无碰路径(collision-free path)。显然，组合空间表示法降低了寻找路径的难度，但剖分法本身则十分粗糙。于是我们在组合空间表示的基础上，引进分层规划(hierarchical planning)的概念，将组合空间中的无碰路径规划分成两步：第一步，将组合空间简化为一个等价的拓扑空间，在这个简化空间中，首先判别出不存在通路的空间，而将这部分空间删除；第二步，回到原来的几何空间，在剩下的空间中寻找无碰路径。利用分层路径规划的方法显然可以降低计算复杂度。我们根据此思路撰写了一篇文章，投到 *IEEE Transactions PAMI* 杂志，很快就被录用^[11]。这是我们第一次撰写学术文章，对撰写的规则很不清楚，包括作者署名，以为既然工作是在 CSL 中做的，就把该实验室主任 R. T. Chien(钱天闻)列为第一作者。

接着我们进行第二项研究工作，即 A^* 启发式搜索。 A^* 算法在人工智能中是一个经典算法，教科书里都有，尽人皆知，似乎没有什么可值得研究的。美国 Pearl 等的两篇文章^[12,13]引起了我们的注意，我们第一次看到数学公式出现在人工智能的文章中。他们用统计方法分析了 A^* 搜索的平均复杂度，指出如果启发式估计 $h(n)$ 满足以下条件：

$$p\left(\left|\frac{h(n)-h^*(n)}{h(n)}\right|>\varepsilon\right)>\frac{1}{m} \quad (1.1)$$

其中 m 为分支因子，则 A^* 算法的平均计算复杂度为 N 的指数函数， N 表示目标所在的深度。这个结果表明，如果启发式估计的相对误差大于 ε 的概率超过一定范围($1/m$)，那么其计算复杂度与目标所在的深度 N 呈指数关系。可见， A^* 算法是一个效率很低的搜索算法，由此我们萌生了改进 A^* 算法的念头。 A^* 搜索把搜索树上的节点 n 看成孤立的点，从 n 点出发得到估计函数 $h(n)$ ，通常其估计精度难以保证，这是这个算法的主要缺陷。我们同样根据分层递阶(hierarchy)的思路，设想如果把节点 n 看成一棵以 n 为根的子树，对子树中的众多节点进行采样，并利用这些样本，根据某个统计推断的方法，判断该子树包含目标的概率。然后将包含目标概率最小的子树删除，继续对剩下的子树按同样办法逐层向下搜索，直至找到目标。根据这种按层次进行搜索的思想，我们提出了一个新的启发式搜索算法——统计启发式搜索(简称 SA * 算法)，并从理论上证明 SA * 算法的确可以降低计算复杂度。根据这些内容我们撰写了两篇文章，分别投到人工智能国际联合会会议(IJCAI-83)^[14]和 *IEEE Transactions PAMI-85* 杂志^[15]，都很快被录用。

尽管我们当初撰写文章时，经验不足，可参考的文献又很少，无论在英文表