中央人民政府高等教育部推薦

高等學校教材試用本

理論力學

下册 第二分册

Е. Л. НИКОЛАИ著
徐芝綸 季文美譯

高等教育出版社

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本

理 論 力 學

下 册 第二分册

E. Л. 尼古拉依著
徐芝綸 季文美譯

高 等 教 育 出 版 社

本書係根據蘇聯理論技術出版社（Государственное издательство технико—теоретической литературы）出版的尼古拉依（Е. Л. Николаи）著“理論力學”（Теоретическая механика）1952年第十六版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定爲高等工業學校教科書。

本書中譯本原擬分上下兩册出版，現因急於供應需要，下册又分兩分册出版。下册第二分册的內容包括“拉格郎日方程式”及“微幅振動”兩篇。

本書上册、下册第一分册由商務印書館出版，下册第二分册改由本社出版。

理　論　力　學

下册　第二分册

書號17（課14）

尼　古　拉　依　著
徐　芝　綸　季　文　美　譯
高等教育出版社出版
北京琉璃廠一七〇號
新華書店華東總分店總經售
上海南京西路一號
商務印書館印刷廠印刷
上海天通菴路一九〇號

開本787×1092 1/25　印張6 12/12.5　字數 133,000
一九五四年六月上海第一版　印數 1—7,000
一九五四年六月上海第一次印刷　定價 ¥8,600

中央人民政府高等教育部推薦
高等學校教材試用本的說明

充分學習蘇聯的先進經驗，根據國家建設需要，設置專業，培養幹部，是全國高等學校院系調整後的一項重大工作。在我國高等學校裏，按照所設置的專業試用蘇聯教材，而不再使用以英美資產階級教育內容爲基礎的教材，是進一步改革教學內容和提高教學質量的正確方向。

一九五二年九月二十四日人民日報社論已經指出：'蘇聯各種專業的教學計劃和教材，基本上對我們是適用的。它是眞正科學的和密切聯系實際的。至於與中國實際結合的問題，則可在今後教學實踐中逐漸求得解决。'我們現在就是本着這種認識來組織人力，依照需要的緩急，有計劃地大量翻譯蘇聯高等學校的各科教材，並將繼續向全國推薦，作爲現階段我國高等學校教材的試用本。

我們希望：使用這一試用本及今後由我們繼續推薦的每一種試用本的教師和同學們，特別是各有關教研組的同志們，在教學過程中，對譯本的內容和譯文廣泛地認眞地提出修正意見，作爲該書再版時的參考。我們並希望各有關教研組在此基礎上逐步加以改進，使能結合中國實際，最後能編出完全適合我國需要的新教材來。

中央人民政府高等教育部

下册第二分册目録

第三篇　拉格郎日方程式

第四篇　微幅振動

第三篇　拉格郎日方程式

第二十章　廣義坐標與廣義力

§120　自由度數．廣義坐標

在§55裏，我們曾有機會講到自由度數與廣義坐標的概念。但在那一節裏，只是順便提到這兩個概念。現在，它們將成爲我們注意的中心，並將作爲以後所有一切論證的基礎。

提醒一下：設一個機械系統中所有各點的位置可用某幾個量完全決定（正如同空間一點的位置可用它的三個笛卡兒坐標決定一樣），則這幾個量稱爲該系的廣義坐標。決定該系位置的獨立廣義坐標的數目稱爲自由度數。

現在舉例說明以上所述。

在§55裏曾以曲柄機構(圖196)爲例。這個系的所有各點的位置可完全決定於一個量——曲柄的轉角φ（當然，假定這機構的所有各構件都是絕對剛固的）。因此，角φ就是這個系的廣義坐標。又因爲這個系的所有各點的位置可用一個廣義坐標決定，故曲柄機構是具有一個自由度的系的實例。

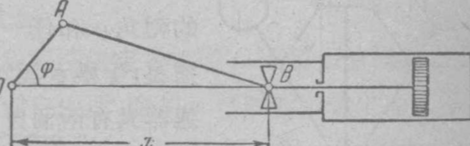

圖 196

我們也可以不選用角φ作爲曲柄機構的廣義坐標，而選用任一個其他的量（只要它能決定這機構所有各點的位置），例如十字頭B距機軸軸線O的距離x（圖196）。一般必須指出，選擇一個系的廣義坐標，總是具有極大的任意性的。

當然，“兩個”廣義坐標φ與x的存在毫不影響這一結論：曲柄機構

是具有"一個"自由度的系。再一次強調指出：一個系的"獨立"廣義坐標的數目稱爲自由度數。可是坐標 φ 與 x 顯然不是獨立的；相反地，x 的值可決定於 φ，即，x 是 φ 的函數：

$$x=x(\varphi)。$$

考察三角形 AOB，極易得出以角 φ 表達 x 值的表達式[1]

$$x=r\cos\varphi+l\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi},$$

式中 r 是曲柄 OA 的長度，l 是連桿 AB 的長度，而

$$\lambda=\frac{r}{l}。$$

這樣，曲柄機構只有一個獨立坐標，因此也只有一個自由度。用角 φ 可決定機構的位置，故不再需要第二個坐標 x；在這一觀點，x 這個量是多餘的坐標。但以後可見，在某些情形下，引用這種多餘坐標有怎樣的益處。

現在，設有繞鉛直軸轉動的離心調速器(圖 197)。爲了決定這個系所有各點的位置，必須指定兩個量：例如調速器的轉角 φ 和任一斜桿與鉛直線所成的角 α。在這裏，坐標 φ 與 α 是彼此獨立的。因此，離心調速器具有兩個自由度。

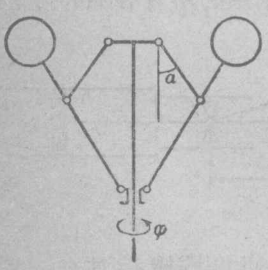

圖 197

假想有由 n 個質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所組成的一個機械系統。設這個系具有 k 個自由度，並用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 代表它的獨立廣義坐標。取直角坐標軸 x, y, z，並用 x_i, y_i, z_i 代表點 M_i 的笛卡兒坐標。我們已經知道，這個系的所有各點的位置，因而這些點的笛卡兒坐標的值，可由 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 完全決定。換句話說，笛卡兒坐標 x_i, y_i, z_i 是廣義坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的函數。

---

[1] 見本書第一册(運動學)，§ 78，例 26。

$$\left.\begin{aligned} x_i&=x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k),\\ y_i&=y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k),\\ z_i&=z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k)。\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

可是注意,只有在這個系所受的約束不隨時間而變的情形下,關係(1)才成立。在§55裏已經指出,隨着時間變化的約束是可能存在的。現在舉出這種約束的一個例子。設有小物塊 M 掛在細繩 MOA 的一端,細繩穿過靜止的圓環 O(圖198)。物塊 M 將視爲質點,而細繩 MOA 將作爲不會伸長並且沒有重量。其次,假定以常速度 c 抽動細繩的 A 端。於是得一個變長度的數學擺;用 l 代表長度 OM,得

$$l=l_0-ct,\qquad(2)$$

式中 l_0 代表這擺在瞬時 $t=0$ 的長度,

這例題中的約束(卽限制物塊 M 自由運動的條件)是:物塊至固定點 O 的距離應當是 l,而這距離按規律(2)隨着時間變化。這是約束隨着時間變化的一個例子。

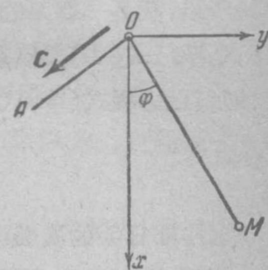

圖 198

在每一瞬時 t,點 M 的位置完全決定於細繩 OM 與鉛直線所成的角 φ。這個變長度的擺具有一個自由度,而角 φ 可取爲廣義坐標。

現在取直角坐標軸 x 與 y,如圖198所示,並用 x 與 y 代表點 M 對於這兩個軸的坐標。得

$$x=l\cos\varphi,$$
$$y=l\sin\varphi,$$

或

$$x=(l_0-ct)\cos\varphi,$$
$$y=(l_0-ct)\sin\varphi。$$

顯然,在這情形下,笛卡兒坐標不僅是廣義坐標 φ 的函數,而且也是時間 t 的函數。

一般地說，設物系所受的約束有些是隨時間而變的，則這系的所有各點的笛卡兒坐標將不僅是廣義坐標的函數，而且是時間的函數；在這情形下，代替方程式(1)的是

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)。 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

仿照波爾茨曼，我們將不隨時間而變的約束稱爲不變約束，以區別於變約束，即隨時間而變的約束。

所以，設某一個系的約束都是不變約束，則這個系的所有各點的笛卡兒坐標以式(1)與廣義坐標相關連；設某一個系的約束有些是變約束，則須以方程式(3)代替方程式(1)。

§121 廣義力

拉格郞日系的廣義坐標這概念引用了作爲他的解析力學[1]的基礎。隨着這一概念，廣義力的概念也在拉格郞日力學裏起着重要的作用。每一個廣義坐標都有一個與之對應的廣義力。

設有機械系統，由 n 個質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ (圖 199) 所組成。假定這系統具有 k 個自由度，並用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 代表彼此獨立的廣義坐標。作用於系統內各點的力令各爲 $F_1, F_2, \cdots, F_n$。現在來說明，如何可以算出對應於坐標 q_1 的廣義力。

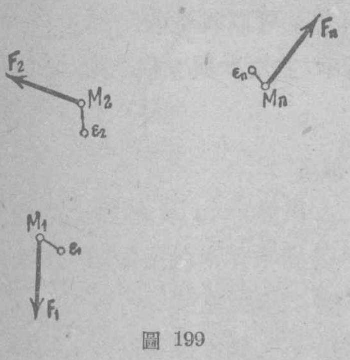

圖 199

爲計算這廣義力，進行如下。給坐標 q_1 一個微小的增量 δq_1，但保持其餘的坐標不變。坐標 q_1 的這個微小改變將引起系的所有各點的微小位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$。注意，因爲位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$

[1] 拉格郞日著：解析力學(由法文譯爲俄文，共兩卷)，1950 年版。

是系的約束所容許的(這些約束容許與坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的改變相對應的任何位移),所以位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 的總體是系的虛位移之一。

現在來計算力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 因位移 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 而作的功的和

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \varepsilon_i),$$

並使這功的和等於某一個因子 Q_1 與廣義坐標的增量 δq_1 的乘積,亦即令

$$\sum F_i \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \varepsilon_i) = Q_1 \delta q_1 。$$

這個等式所決定的量 Q_1 即稱爲對應於坐標 q_1 的廣義力。

同樣地進行,可求出對應於其他坐標 $q_2, \cdots, q_k$ 的廣義力 $Q_2, \cdots, Q_k$。重複一遍:爲求出對應於任一個坐標 q_i 的廣義力 Q_i,必須給這坐標一個微小增量 δq_i(其餘的坐標保持不變),並計算所有各力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$ 因作用點有位移而作的功的和;將這些功的和除以 δq_i,即得所求的廣義力。

根據以上所述,可以說:所謂對應於坐標 q_i 的廣義力,就是這樣的一個量,它和增量 δq_i 的乘積就等於作用於系的各力因位移(對應於增量 δq_i)而作的功。

不要以爲這樣求得的廣義力一定具有"力"的因次,即一定是按字面上的意義來講的"力"。由於乘積 $Q_i \delta q_i$ 應該具有功的因次,很容易斷定:設 q_i 是某一個長度,則 Q_i 具有力的因次。但是,設 Q_i 是某一個角,則 Q_i 應該具有"力乘以長度"的因次,即力矩的因次;設 q_i 是一個體積,則 Q_i 應該具有"力除以面積"的因次,即應力的因次,餘類推。

這樣,在拉格郎日的"解析力學"裏,每一個廣義坐標都有一個與之對應的廣義力。廣義力的數目等於系的廣義坐標的數目。

在§51和§52裏已經說過,作用於一個機械系統的所有各力總可以按兩種方式分爲兩組:或分爲外力與內力,或分爲主動力與約束反力。不言而喻,廣義力亦可按此分組:一方面可分爲廣義外力與廣義內力,另一方面可分爲廣義主動力與廣義約束反力。

現在要着重地指出:設一個系的約束是理想約束,則廣義約束反力都等於零。

事實上,爲求出對應於坐標 q_i 的廣義反力,必須計算當這個系有了對應於坐標增量 δq_i 的位移時約束反力所作的功的和。前面已經指出,這位移一定是該系的虛位移之一。而我們又知道,理想約束的反力因任何虛位移而作的功的和等於零。由此可見,我們所留意的廣義反力一定等於零。這簡單的註解說明:用廣義坐標法解答某一問題,應當將作用於系的力分爲主動力與約束反力而不應分爲外力與內力。設所處理的是理想約束,——而我們知道,將摩擦力計入主動力之內,就總可以把約束看作是理想的,——則當求廣義力時,約束反力自然不在計算之列。拉格郎日法的極大優點即在於此。

§ 122 廣義力計算例題

現在舉例說明廣義力的求法。

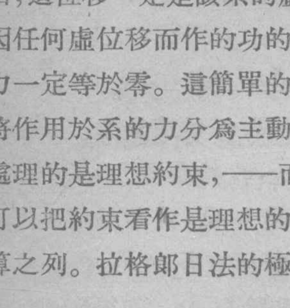

圖 200

例 15. 槓桿 AB,可繞軸 O 轉動,兩端各受有鉛直力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$; $OA=a$, $OB=b$。取槓桿與鉛直線所成的角 φ 爲廣義坐標 (圖 200),求對應於這角的廣義力。

解 該系具有"一個"自由度;角 φ 可取爲該系的廣義坐標。

爲求出對應於角 φ 的廣義力(稱它爲 Q),給角 φ 一個增量 $\delta\varphi$。槓桿轉過一個角 $\delta\varphi$;力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 的作用點各得到對應的微小位移 $\varepsilon_1=a\,\delta\varphi$ 與 $\varepsilon_2=b\,\delta\varphi$,方向垂直於直線 AB。求出力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 因位移 ε_1 與 ε_2 而作的功的和,並令這功的和等於 $Q\,\delta\varphi$,得

$$P_1\varepsilon_1\sin\varphi-P_2\varepsilon_2\sin\varphi=Q\,\delta\varphi,$$

或將 ε_1 與 ε_2 的值代入而得

$$(P_1a-P_2b)\sin\varphi\delta\varphi=Q\,\delta\varphi,$$

由此卽得所求的廣義力

$$Q=(P_1a-P_2b)\sin\varphi。$$

可見 Q 就是力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 對於點 O 的矩的和。

例 16. 在離心調速器的圓球的中心 B_1 與 B_2（圖 201）各有鉛直力 $\boldsymbol{P}$（球重）；$A_1B_1=A_2B_2=l$。取角 α（桿 A_1B_1 或 A_2B_2 與鉛直線所成的角）與角 φ（調速器的轉角）爲廣義坐標，求對應的廣義力。

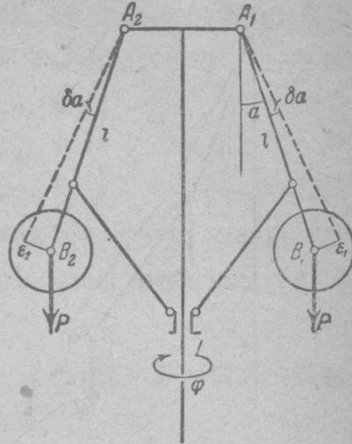

圖 201

解 所求的對應於角 α 與 φ 的廣義力各用 Q_α 與 Q_φ 代表。先求 Q_α。

給角 α 一個增量 $\delta\alpha$（角 φ 則保持不變）；點 B_1 與 B_2 將各有位移 ε_1 與 ε_2，分別垂直於直線 A_1B_1 與 A_2B_2，並且 $\varepsilon_1=\varepsilon_2=l\,\delta\alpha$。求出力 $\boldsymbol{P}$ 因位移 ε_1 與 ε_2 而作的功的和，並令這個和等於乘積 $Q_\alpha\,\delta\alpha$，得

$$-P\varepsilon_1\sin\alpha-P\varepsilon_2\sin\alpha=Q_\alpha\,\delta\alpha$$

或

$$-2Pl\sin\alpha\,\delta\alpha=Q_\alpha\,\delta\alpha,$$

由此得

$$Q_\alpha=-2Pl\sin\alpha。$$

其次求廣義力 Q_φ。給角 φ 一個增量 $\delta\varphi$，角 α 保持不變。這就是說，組成機構的各桿的相對位置保持不變，而調速器繞鉛直軸轉過了微小角 $\delta\varphi$。這樣，力 $\boldsymbol{P}$ 並不作任何的功（力的作用點的位移垂直於力的方向）。因此，

$$Q_\varphi\,\delta\varphi=0,$$

由此得

$$Q_\varphi=0\,。$$

例 17. 長 l_1 的直桿 OA 用鉸鏈掛在固定點 O（圖 202）；另一長 l_2 的直桿 AB 用鉸鏈掛在點 A。在點 A 與 B 各作用有鉛直力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$。取桿 OA 及 AB 與鉛直線所成的角 φ_1 及 φ_2 爲這個系的廣義坐標，求對應的廣義力。

解 用 Q_1 與 Q_2 代表對應於角 φ_1 與 φ_2 的廣義力。先求力 Q_1。

給角 φ_1 一個增量 $\delta\varphi_1$（角 φ_2 則保持不變）。桿 OA 繞點 O 轉過了角 $\delta\varphi_1$；點 A 得一個位移，大小等於 $\varepsilon_1=l_1\delta\varphi_1$ 而方向垂直於直線 OA。因角 φ_2 保持不變，故桿 AB 保持平行，卽只有平行移動；所以點 B 得一個位移 ε_2，等於並平行於點 A 的位移 ε_1。求出力 $\boldsymbol{P}_1$ 與 $\boldsymbol{P}_2$ 因位移 ε_1 與 ε_2 而作的功的和，得

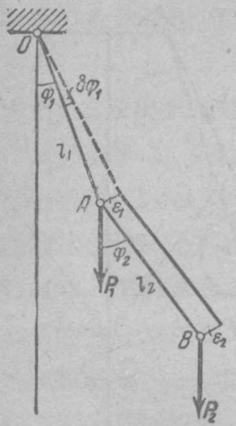

圖 202

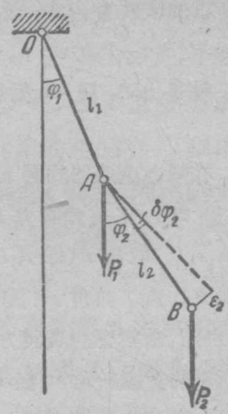

圖 203

$$-P_1\varepsilon_1 \sin\varphi_1 - P_2\varepsilon_2 \sin\varphi_1 = Q_1\delta\varphi_1,$$

或令 $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = l_1\delta\varphi_1$ 而得

$$-(P_1+P_2)\, l_1 \sin\varphi_1\, \delta\varphi_1 = Q_1\delta\varphi_1,$$

由此得

$$Q_1 = -(P_1+P_2)\, l_1 \sin\varphi_1。$$

再來計算對應於角 φ_2 的廣義力 Q_2。現在,令角 φ_1 保持不變而給角 φ_2 一個增量 $\delta\varphi_2$(圖 203)。桿 OA 將保持不動,桿 AB 則繞點 A 轉過角 $\delta\varphi_2$。點 A 的位移等於零;點 B 則得一個位移,大小等於 $\varepsilon_2 = l_2\delta\varphi_2$ 而方向垂直於直線 AB。因此,力 $\boldsymbol{P}_1$ 的功等於零;計算力 $\boldsymbol{P}_2$ 的功,得

$$-P_2\,\varepsilon_2 \sin\varphi_2 = Q_2\delta\varphi_2,$$

或

$$-P_2 l_2 \sin\varphi_2 \delta\varphi_2 = Q_2\delta\varphi_2,$$

由此得

$$Q_2 = -P_2 l_2 \sin\varphi_2。$$

§123 廣義力表以力在笛卡兒坐標軸上的投影.有勢的力的情形

以後將須要用到廣義力的表達式,表以各力在笛卡兒坐標軸上的投影。現在來導出這些公式。

設有由 n 個質點 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 所組成的機械系統。假定這系具有 k 個自由度,並用 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 代表它的獨立廣義坐標。取直角坐

標軸 x, y, z 並用 x_i, y_i, z_i 代表點 M_i 的笛卡兒坐標。在 § 120 裏已經看到,笛卡兒坐標 x_i, y_i, z_i 以下列等式與廣義坐標相關聯:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= x_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t), \\ y_i &= y_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t), \\ z_i &= z_i(q_1, q_2, \cdots, q_k, t)。 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

為了更大的一般性,這裏假定系的約束有些是變約束;我們已經知道,設系的所有一切約束都是不變的(卽不隨時間而變),則公式(1)的右邊將不是時間 t 的顯函數。

現在假設系的各點受有力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \cdots, \boldsymbol{F}_n$, 而來計算對應於廣義坐標 $q_1, q_2, \cdots, q_k$ 的廣義力 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$。

給坐標 q_1 一個增量 δq_1, 其餘的坐標保持不變(注意,在變約束的情形下計算廣義坐標時,時間 t 也必須保持不變),求點 M_i 的對應位移 ε_i。

廣義力 Q_1 可由下列等式求得:

$$Q_1 \delta q_1 = \sum F_i \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i)。 \qquad (2)$$

但力 $\boldsymbol{F}_i$ 的功亦可表以已知的公式

$$F_i \varepsilon_i \cos(\boldsymbol{F}_i, \boldsymbol{\varepsilon}_i) = X_i \delta x_i + Y_i \delta y_i + Z_i \delta z_i, \qquad (3)$$

式中 X_i, Y_i, Z_i 是力 $\boldsymbol{F}_i$ 在軸 x, y, z 上的投影,而 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 是當點 M_i 發生位移 ε_i 時坐標 x_i, y_i, z_i 所得的增量。

坐標 x_i, y_i, z_i 的這些增量極易由公式(1)求得。事實上,據公式(1),坐標 x_i, y_i, z_i 是自變量 $q_1, q_2, \cdots, q_k, t$ 的函數;當自變量 q_1 得到增量 δq_1 而其餘的自變量保持不變時,這些函數將各得到一定的增量 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$。應用微分學上的已知公式,得

$$\delta x_i = \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta y_i = \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1, \quad \delta z_i = \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1。$$

將增量 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 的這些值代入等式(3),再將這樣得到的力 $\boldsymbol{F}_i$ 的功的表達式代入公式(2),得

$$Q_1\delta q_1=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)\delta q_1。$$

在這等式的右邊，δq_1 是所有各加項的公共因子；將這因子移到連加號之前，得

$$Q_1\delta q_1=\delta q_1\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right);$$

消去兩邊的 δq_1 以後，即得下列公式中的第一式：

$$\left.\begin{aligned}Q_1&=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right),\\Q_2&=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_2}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_2}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_2}\right),\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\Q_k&=\sum\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)。\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

上列公式中的其餘各式可與第一式同樣導出。這就是廣義力的表達式，用力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 在笛卡兒坐標軸上的投影來表示。

在一個重要的特殊情形下，即當作用力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 有勢的時候，以上所導出一般公式（4）可大爲簡化。我們知道（見 § 79），在這情形下，有公式

$$X_i=-\frac{\partial V}{\partial x_i},\ Y_i=-\frac{\partial V}{\partial y_i},\ Z_i=-\frac{\partial V}{\partial z_i},$$

其中的

$$V=V(x_1,y_1,z_1,x_2,\cdots,z_n)\tag{5}$$

是系的對應於力 $\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_n$ 的勢能。

將上面 X_i,Y_i,Z_i 的表達式代入公式（4）的第一式，得

$$Q_1=-\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)。\tag{6}$$

另一方面，將笛卡兒坐標的值（1）代入勢能的表達式（5），得

$$V=V(q_1,q_2,\cdots,q_k,t)。$$

必須指出，設系的所有一切約束都是不變約束，則式(1)不包含時間 t，因而勢能的上一表達式也不包含 t；在這情形下，系的勢能將僅是廣義坐標的函數：

$$V=V(q_1, q_2, \cdots, q_k)。$$

現在來求勢能 V 對於廣義坐標 q_1 的偏導數。留意 q_1 是經由笛卡兒坐標 x_i, y_i, z_i 進入 V 的表達式的，並應用複合函數微分的公式，得

$$\frac{\partial V}{\partial q_1}=\sum\left(\frac{\partial V}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\frac{\partial V}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)。$$

將這結果與等式(6)比較，即得下列公式中的第一式：

$$Q_1=-\frac{\partial V}{\partial q_1},\ Q_2=-\frac{\partial V}{\partial q_2},\ \cdots,\ Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}。\qquad (7)$$

其餘各式可同樣導出。

這些公式的理論價值將在以後說明。現在只提出它們的實用價值：在系的勢能可以很容易求出的情形下，公式(7)提供一個計算廣義力的最便利的方法。

現在用一個簡單的例題說明這些公式的應用。

例 18. 假定例 17 中的力 P_1 與 P_2 是常量，試用公式(7)解答這問題。

解　力 P_1 與 P_2 的大小和方向不變。這樣的力(例如重力)已知是有勢的。取通過點 O 的鉛直線爲軸 z (圖 204)；取點 O 以下 l_1+l_2 的一點爲 z 的起算點，並取軸 z 朝上。

系的勢能可表以公式

$$V=P_1z_1+P_2z_2。$$

另一方面，

$$z_1=l_1+l_2-l_1\cos\varphi_1,$$
$$z_2=l_1+l_2-l_1\cos\varphi_1-l_2\cos\varphi_2。$$

將 z_1 與 z_2 的這些値代入上面 V 的公式，得系的勢能的表達式，表以廣義坐標：

$$V=(P_1+P_2)(l_1+l_2-l_1\cos\varphi_1)-P_2l_2\cos\varphi_2。$$

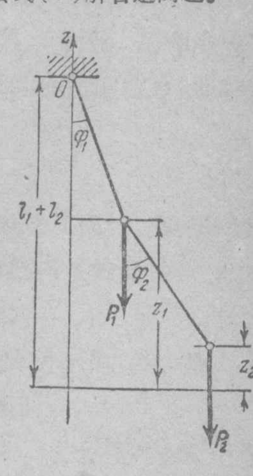

圖 204