高校核心课程学习指导丛书

积分的方法与技巧

JIFEN DE
FANGFA YU JIQIAO

金玉明　顾新身　毛瑞庭／编著

中国科学技术大学出版社

高校核心课程学习指导丛书

积分的方法与技巧

JIFEN DE
FANGFA YU JIQIAO

金玉明　顾新身　毛瑞庭 / 编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书专门讲述积分方法，涵盖各种函数积分的方法，从初等函数到特殊函数，从实变函数到复变函数.本书以方法为中心、以算例为导向，读者可在算例的引导下，逐步掌握积分之方法.本书从易到难，由浅入深，适用不同层次、不同群体的人阅读，他们可以是初学微积分的大学生，可以是已经学过微积分的研究生，也可以是有工作经验的科学家、工程师.

图书在版编目(CIP)数据

积分的方法与技巧/金玉明，顾新身，毛瑞庭编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.1

(高校核心课程学习指导丛书)

ISBN 978-7-312-04051-1

Ⅰ. 积… Ⅱ. ①金… ②顾… ③毛… Ⅲ. 积分 Ⅳ. O172.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 211316 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn

印刷 安徽联众印刷有限公司

发行 中国科学技术大学出版社

经销 全国新华书店

开本 710 mm×1000 mm 1/16

印张 26

字数 554 千

版次 2017 年 1 月第 1 版

印次 2017 年 1 月第 1 次印刷

定价 48.00 元

前　言

这是一本专讲积分方法的书，可供大学生、研究生阅读，也可供科学家和工程师参考.

我们编纂了《实用积分表》《常用积分表》后，就萌发了编写一本如何做积分的书的想法.俗话说："授人以鱼，不如授人以渔."自己能捕鱼了，就不愁没有鱼了.当人们查阅积分表时，也许会想，这成千上万个积分公式是如何得来的呢？这正是本书要回答的问题.我们不能夸口说，读懂了本书，你就会做所有的积分了.我们只能说，读懂了本书，你就会做大部分的积分.

历经五年多时间的酝酿、资料搜集、撰写、编辑和修改，书稿最终完成.与大学教材不同的是，本书没有很多定理的严格证明，对于用到的定理，大部分情况只是引用，不做论证.我们认为读者在大学读"高等数学"或"微积分"课程时已经得到这方面的严格训练，而无需在此重复了.我们把重点放在做积分的方法与技巧上，花时间搜寻各种积分的方法，把它们汇聚在一起.我们尽量采用通俗易懂的语言，力避晦涩难懂的词句，采用规范化的符号、标准化的外文译名.

本书以大量的算例来阐明积分的方法与技巧，在对算例的演算中，推导十分详尽，使读者一目了然，不卖关子，不藏影子.许多方法与技巧是寓于算例的演算过程中的.

本书共分 8 章，第 1 章的不定积分和第 2 章的定积分为本书的主干，主要的积分方法都在这两章中叙述.第 3 章介绍定积分的应用，包括各种图形面积的计算、曲线长度的计算、立体体积的计算和表面积的计算等.第 4 章介绍重积分，包括二重积分、三重积分以及 n 重积分.第 5 章介绍曲线积分和曲面积分，并给出格林公式、斯托克斯公式和高斯公式及其应用.这 3 个公式描写的是函数在区域边界上的积分与区域内部积分的关系.第 6 章介绍积分变换，包括傅里叶变换和拉普拉斯变换.第 7 章为复数领域中的积分，主要是通过复变函数的留数定理来解实变量函数中难解的积分.第 8 章介绍特殊函数的积分，在物理学领域工作与学习的读者可能

对这一章更有兴趣.

作者在此对审阅了全部书稿并提出了很多宝贵意见的史济怀教授表示衷心的感谢,对绘制全书插图的博士研究生安宁表示诚挚的谢意.

由于水平所限,书中不足和错误之处难免,诚望读者批评指正.

作　者

2016 年夏于合肥

目　　录

绪　论

微积分的发明和创立是数学史上划时代的事件.它是继欧几里得几何之后,全部数学史中一个最伟大的创造.

微积分是17世纪由牛顿和莱布尼兹创立的.18世纪经过欧拉、拉格朗日等人系统化的努力,摆脱了原来几何或力学的语言和思想方法,形成以函数为中心,以代数运算为基础的数学分析体系.19世纪又经过柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯的严格化,进一步形成严谨的数学分析系统,微积分得到更大的发展.现在微积分已成为科学技术中不可或缺的有力工具了.

微积分的创立不仅推动了近代数学的发展,如微分方程、变分法、微分几何的发展,而且推动了天文学、力学、物理学、化学、生物学、工程学、经济学等自然科学、社会科学的发展.

微积分的出现是初等数学向高等数学变化的重大转折,是常量数学向变量数学发展的里程碑.17世纪上半叶笛卡儿的解析几何把变量引入数学,使数学进入一个新的发展时期.解析几何在数学发展中起了推动作用,恩格斯曾说:"数学中的转折点是笛卡儿的变数.有了变数,运动进入了数学;有了变数,辩证法进入了数学;有了变数,微分和积分也就立刻成为必要的了."

但解析几何学的诞生还不是新时代的开始,它只是对旧数学做了总结,使代数与几何融为一体,并引出变量的概念.而微积分的创立和发展却开创了数学史上的新纪元.从此,数学进入自然科学的各个领域,并推动着自然科学的发展.在今天,可以毫不夸张地说,不掌握微积分就无法掌握现代任何一门自然科学和工程技术.

微积分的主要内容是极限理论、微分学和积分学.极限理论是微积分的基础,微分和积分是互逆运算.如果知道一个函数的微分,那么进行逆向运算,积分这个微分,结果就得到该函数了.例如,我们知道对函数 $\sin x$ 求微商的结果是

$$\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x} = \cos x$$

那么,它的逆运算则是

$$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x$$

这样就得到原函数 $\sin x$ 了.这就是所谓求原函数的方法.本书的内容之一就是探讨用积分来求原函数的方法和技巧.

本书不讨论极限理论,也不论述微分学,对积分学也只是从积分的方法这个

角度来展开，探讨各种积分的方法，从初等函数到特殊函数，从实变函数到复变函数.

微积分经过了三百多年的发展历程，积分的方法已日臻成熟和完善，许多积分方法已成经典.如分项积分法是牛顿创立微积分之初在关于“无穷多项方程分析”的论文中首先论证并使用的[32][33]，换元积分法和分部积分法也早已在欧拉和伯努利的论著中用来求解许多困难的积分了[32].如今，分项积分法、分部积分法和换元积分法这三大方法已成为积分中最常用的方法，应用广泛，而且具有普遍意义.其中，换元积分法实际上就是承接莱布尼兹的复合函数微分积分的法则而来的.我们要讲的三角替代法、欧拉替换法以及万能替换法不过是换元法的延伸.倍角法只在特殊形态的三角函数的积分上适用，组合积分法也只对某些特殊形状的被积函数的积分有用.

在定积分中，除了在不定积分中能使用的方法外，还有一些特殊的方法和特别的技巧，如利用参变数的积分，利用把被积函数展开成无穷级数的积分，利用复变函数的回路积分，特别是应用复变函数的留数定理来计算实变函数的积分.这些方法都将在本书中详细论述.

至于积分的技巧，是指在积分过程中根据实际情况而采用的一些小方法和窍门，例如待定系数法、配方法、分部积分法中的分部法、重积分中的坐标变换法、回路积分中的回路选取法的技巧性都很强，我们管这些叫积分的技巧.实际上，方法和技巧有时也很难分辨，方法也好，技巧也罢，只要在实际的积分运算中起到积极作用就行.

本书的公式推导十分详尽，主要是因为许多方法和技巧是寓于推演的过程中的.有时，遇到一个很陌生的积分式子，在对这个公式外形进行改造，或用新的符号替换后，一下子就变成你所熟悉的式子了.在这种情况下，并不一定要特别说明用了什么方法和技巧，你只需要注意每一步的变化就明白了，其中的方法和技巧你也就掌握了.

我们从微分学中已经知道许多初等函数的微分结果，那么用相应的逆运算，积分结果也就可以得到了.现将常用的初等函数的微分公式及其对应的积分公式列于表 0.1.这些公式对于以后进行复杂的积分运算是很有用处的.如果你能把这些公式熟记于心，那么在你做积分计算时将会得心应手，顺风顺水了.

微分式用微商或导数表示，如$\dfrac{dy}{dx} = y'$.

表 0.1　常用的初等函数微商公式及其对应的积分公式表

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$	$\int \mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x = x^{\mu}$
$(\sqrt[p]{x^m})' = \dfrac{m}{p}x^{\frac{m-p}{p}}$	$\int \dfrac{m}{p}x^{\frac{m-p}{p}}\mathrm{d}x = x^{\frac{m}{p}} = \sqrt[p]{x^m}$
$(\ln\|x\|)' = \dfrac{1}{x}$	$\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\|x\|$
$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x$
$(a^x)' = a^x\ln a$	$\int a^x\mathrm{d}x = \dfrac{a^x}{\ln a}$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x\mathrm{d}x = \sin x$
$(\cos x)' = -\sin x$	$\int \sin x\mathrm{d}x = -\cos x$
$(\tan x)' = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x$
$(\cot x)' = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x$
$(\sec x)' = \sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x$
$(\csc x)' = -\csc x\cot x$	$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x$
$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x$
$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = -\arccos x$
$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x$
$(\mathrm{arccot}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = -\mathrm{arccot}\, x$
$(\mathrm{arcsec}\, x)' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \mathrm{arcsec}\, x$
$(\mathrm{arccsc}\, x)' = -\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\int \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = -\mathrm{arccsc}\, x$
$(\sinh x)' = \cosh x$	$\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x$
$(\cosh x)' = \sinh x$	$\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x$
$(\tanh x)' = \mathrm{sech}^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$	$\int \dfrac{1}{\cosh^2 x}\mathrm{d}x = \tanh x$

$$(\coth x)' = \operatorname{csch}^2 x = \frac{1}{\sinh^2 x} \qquad \int \frac{1}{\sinh^2 x} dx = \coth x$$

$$(\operatorname{sech} x)' = -\operatorname{sech} x \tanh x \qquad \int \operatorname{sech} x \tanh x dx = -\operatorname{sech} x$$

$$(\operatorname{csch} x)' = -\operatorname{csch} x \coth x \qquad \int \operatorname{csch} x \coth x dx = -\operatorname{csch} x$$

$$(\operatorname{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \operatorname{arsinh} x$$

$$(\operatorname{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arcosh} x$$

$$(\operatorname{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \qquad \int \frac{1}{1-x^2} dx = \operatorname{artanh} x$$

$$(\operatorname{arcoth} x)' = -\frac{1}{x^2-1} \qquad \int \frac{1}{x^2-1} dx = -\operatorname{arcoth} x$$

$$(\operatorname{arsech} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} dx = -\operatorname{arsech} x$$

$$(\operatorname{arcsch} x)' = -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} \qquad \int \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}} dx = -\operatorname{arcsch} x$$

$$(\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm b}\right|)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm b}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm b}} dx = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm b}\right|$$

表 0.1 右列的积分公式中，在等式的右边应该加上积分常数 C. 这里没有加常数 C 是为了在形式上看起来对称，并表明微分和积分是互逆的. 但在实际运算时，千万别忘了加上积分常数 C!

第 1 章　不 定 积 分

1.1　不定积分中的原函数概念

大家知道在微积分中，微分学的基本问题是求给定函数的微分或微商；而积分学的基本问题则是一个反问题，是一个与求微分(或微商)的运算相反的过程，或者说是做微分的逆运算——积分.

如果在给定的区间里，$f(x)$是函数 $F(x)$的导数，或 $f(x)\mathrm{d}x$ 是$F(x)$的微分，即

$$F(x)' = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad 或 \quad \mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$$

那么，在给定的区间上，$F(x)$叫做**函数 $f(x)$的原函数**，或 **$f(x)$的积分**. 求一个函数 $f(x)$的原函数，称为求积分，我们用下式表示：

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) \tag{1.1}$$

可以看到，求积分实际上是做微分的逆运算. 因此，对于单项式函数，只要你知道该函数在微分前的原函数，那么求积分的工作就完成了. 例如微分式

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$$

那么反过来，它的积分式就是

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}$$

但考虑到常数 C 在取微分时为零的情况，即

$$\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$$

所以，积分后应加上常数 C，即

$$\int x^2\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + C$$

因此，积分式(1.1)中应该加上积分常数 C，即

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C \tag{1.2}$$

式中的这个 C 是任意常数，所以原则上讲，任何一个函数的原函数都有无穷多个，它们之间只差常数 C.

同理，因为 $(\sin x)' = \cos x$，$(\cos x)' = -\sin x$，所以就有

$$\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$$

$$\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

1.2 分项积分法

若干个微分式的和（或差）的不定积分，等于每个微分式各自积分的和（或差）. 如

$$\int [f(x) + g(x) - h(x)] \mathrm{d}x = \int f(x) \mathrm{d}x + \int g(x) \mathrm{d}x - \int h(x) \mathrm{d}x \qquad (1.3)$$

这里的微分式 $f(x)\mathrm{d}x$，$g(x)\mathrm{d}x$，$h(x)\mathrm{d}x$ 等称为被积表达式，$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 等称为被积函数. 式(1.3)就是**分项积分法**的表达式.

一个多项式的积分，等于组成该多项式的各个单项式的积分之和. 如

$$\begin{aligned}\int\left(5x^2 - 4x + 3 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x &= 5\int x^2 \mathrm{d}x - 4\int x \mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 2\ln|x| - \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

式中的 C 为积分常数.

如果一个分式的分母为多项式，则可把它化成最简单的分式再积分. 如

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2}$$

因为被积函数的分母是一个二次函数，可分解为

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$$

所以可用部分分式法使被积函数分成如下两项：

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x + a}$$

其中 A，B 为待定系数. 两边通分，得到等式

$$(x + a)A + (x - a)B = 1$$

在上式中，若令 $x = 0$，则 $A - B = \frac{1}{a}$；令 $x = a$，则 $A = \frac{1}{2a}$，因而得到 $B = -\frac{1}{2a}$，于是

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x - a} - \frac{1}{x + a}\right)$$

因此,积分为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x - a} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x + a}\right)$$

$$= \frac{1}{2a}(\ln|x - a| - \ln|x + a|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C$$

用同样的方法,可得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{a - x} + \frac{1}{a + x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2a}(-\ln|a - x| + \ln|a + x|) + C$$

$$= \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C$$

更一般的情况是分母、分子都是多项式,并且分子的幂次小于分母的幂次,即真分式的情况.例如求积分

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q}\mathrm{d}x$$

被积函数的分母为 x 的二次函数,虽然不能直接分解,但可以进行配方:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$$

再设

$$t = x + \frac{p}{2}$$

则

$$x = t - \frac{p}{2}, \quad \mathrm{d}x = \mathrm{d}t$$

并令

$$q - \frac{p^2}{4} = \pm a^2$$

等式右边取正号或负号,要看等式左边的符号.再令

$$A = m, \quad B = n - \frac{1}{2}mp$$

则

$$mx + n = At + B$$

于是我们可以把积分写成

$$\int \frac{mx + n}{x^2 + px + q}\mathrm{d}x = \int \frac{At + B}{t^2 \pm a^2}\mathrm{d}t = A\int \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2 \pm a^2} + B\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 \pm a^2}$$

其中