

SHUXUEFANGFAYINLUNSHUXUE

陆秀丽 钱吉林 毛经中 主编

# 数学方法引论

学术期刊出版社

# 数学方法引论



陆秀丽 钱吉林 毛经中 主编

学术期刊出版社

新 世 界 大 学 楼

主 编 申 登 杰 林 吉 升 副 主 编 胡 丽 秀

## 数 学 方 法 引 论

学术 期 刊 出 版 社 出 版 发 行  
(北 京 海 淀 区 学 院 南 路 86 号)

武 汉 市 长 江 印 刷 厂 印 刷

787 × 1092 毫 米 32 开 本 14.25 印 张 424 千 字

1989 年 12 月 第 1 版 1989 年 12 月 第 1 次 印 刷

印 数 1-10000 定 价 : 4.40 元

ISBN 7-80045-280-8/O·7

## 前 言

本书是为文科和理工科学生编写的，是通过实例，来介绍各种在实践中行之有效的数学方法，完全略去繁难的高等数学推导过程，开门见山地介绍这些数学方法的作用、使用步骤和注意事项。它为数学与使用者之间架起了一座桥梁。我们相信，它对于工厂、企业的管理人员、社会科学的研究人员、自然科学工作者、工程技术人员、乃至数学工作者都会有所帮助。

本书由陆秀丽、钱吉林和毛经中主编，参加本书编写的有：李小丽（第一章），夏明远（第二章），汪志文（第三章），谢民育（第四章），钱吉林、朱劲军（第五章），戴定春（第六章），陈应保（第七章），赵东方（第八章），章琪华（第九章），张方珍、陈修琼（第十章），毛经中（第十一章和第十二章），杨发明（第十三章），黄伟策（第十四章）。

本书出版，首先要感谢武汉文科自修大学校长周飞先生，他自始至终关心、支持和鼓励我们。

编 者

1988.3

# 目 录

<b>第一章</b>	<b>正交试验设计</b> .....	(1)
§ 1.1	试验为什么要设计.....	(1)
§ 1.2	正交试验设计的基本思想和基本方法.....	(6)
§ 1.3	多指标及位级数不同的试验.....	(21)
<b>第二章</b>	<b>抽样</b> .....	(31)
§ 2.1	两种调查统计方法.....	(31)
§ 2.2	抽样原理及其应用范围.....	(32)
§ 2.3	几种抽样调查方法.....	(35)
§ 2.4	误差的来源与控制.....	(38)
§ 2.5	调查结果的推算.....	(40)
§ 2.6	抽样数的估计.....	(44)
§ 2.7	如何使用随机号码表.....	(47)
<b>第三章</b>	<b>数据处理与曲线配合</b> .....	(51)
§ 3.1	数据的收集与整理.....	(51)
§ 3.2	几种常用的总体分布.....	(65)
§ 3.3	回归分析.....	(76)
<b>第四章</b>	<b>产品质量的评估、分析和控制</b> .....	(88)
§ 4.1	引言.....	(88)
§ 4.2	产品质量的估计.....	(89)
§ 4.3	产品质量的检验.....	(96)
§ 4.4	产品质量的控制.....	(113)
<b>第五章</b>	<b>预测</b> .....	(133)
§ 5.1	预测的基本概念.....	(133)

§ 5.2	定性预测法	(135)
§ 5.3	定量预测法	(153)
<b>第六章</b>	<b>决策论</b>	(190)
§ 6.1	决策的基本概念	(190)
§ 6.2	定性决策	(196)
§ 6.3	定量决策	(199)
<b>第七章</b>	<b>可靠性</b>	(212)
§ 7.1	可靠性中的基本概念	(212)
§ 7.2	可靠性数据的分析	(216)
§ 7.3	系统的可靠性	(225)
<b>第八章</b>	<b>排队理论的应用</b>	(234)
§ 8.1	基本定义与符号	(235)
§ 8.2	普阿松排队模型	(240)
<b>第九章</b>	<b>统筹方法与线性规则</b>	(259)
§ 9.1	统筹方法的基本思想	(259)
§ 9.2	关键路线	(271)
§ 9.3	非确定型统筹问题	(274)
§ 9.4	线性规划	(276)
<b>第十章</b>	<b>物质调运与工作分配问题</b>	(288)
§ 10.1	图上作业法	(288)
§ 10.2	奇偶点图上作业法	(295)
§ 10.3	分配问题	(296)
<b>第十一章</b>	<b>组合优化问题</b>	(306)
§ 11.1	可归结为变元只取0,1值的线性规划问题	(306)
§ 11.2	可化为变元只取整数值的线性规划问题	(322)

§ 11.3	多阶段决策——动态规划·····	( 337 )
<b>第十二章</b>	<b>库存问题</b> ·····	( 374 )
§ 12.1	确定型库存问题·····	( 374 )
§ 12.2	不确定型库存系统——非连续分配···	( 397 )
§ 12.3	不确定型库存系统——连续分配·····	( 406 )
<b>第十三章</b>	<b>投入产出法</b> ·····	( 409 )
§ 13.1	实物型投入产出法·····	( 409 )
§ 13.2	价值型投入产出法·····	( 414 )
§ 13.3	投入产出法的应用·····	( 418 )
<b>第十四章</b>	<b>灰色系统</b> ·····	( 426 )
§ 14.1	灰色系统的基本模型·····	( 426 )
§ 14.2	灰色系统的预测·····	( 428 )
§ 14.3	灰色系统的因素分析·····	( 434 )
§ 14.4	灰色系统的多目标局势决策·····	( 435 )

消耗最少，成本最低等。这一类问题在数学上称之为最佳化问题。

最佳化问题在生产、科研和日常生活中是大量存在的。而这些问题经常受多种因素，或者某些非理想复杂条件的影响，例如，一般数学模型，难以建立，分析，求解等。寻求最佳，且不易及。

在控制论中，最佳化问题，常常指确定目的，预先选择指标，为此需要借重问题作深入调查，并经周密分析后，着手地安排好试验，使试验次数尽可能少，试验的数据要可靠，并便于分析。

# 第一章 正交试验设计

## § 1.1 试验为什么要设计

由于正交试验设计是试验设计法中的一种，因此，在介绍“正交试验设计”前，想先说明两个问题：什么叫试验设计？试验为什么要设计？

### (一) 什么叫试验设计？

在农业生产中，经常会遇到如下一类问题，怎样选取适合本地区生长的作物优良品种？怎样确定某种作物高产、稳产的栽培条件？怎样确定合理的施肥量和施肥方法？怎样合理地配制使用农药等等。在工业上，试制一种产品，探索怎样配方、配比合理？怎样安排生产工艺、寻找优良的生产条件，使得产量最高，质量最好？或者在保证产量和质量的前提下，使消耗最少，成本最低等。这一类问题在数学上称之为最优化问题。

最优化问题在生产、科研和日常生活中是大量存在的，而这些问题经常受多种因素，或者说各种错综复杂条件的影响、制约。一般都需要通过试验来进行观察、分析，弄清本质，寻求规律，以求得最优的结果。

在试验中必须考虑以下两点：

(1) 在试验以前，必须明确试验目的，确定考核指标。为此需要带着问题作深入调查，并经周密分析后，科学地安排好试验，使试验次数尽可能少。试验的数据要可靠，并便于分析。



(2) 试验以后,对所得的数据,进行科学的分析,从中获得明确的结论。

通常,第一个问题简称“设计”,第二个问题简称“分析”。实际工作中,设计和分析是紧密联系在一起。设计时,必须考虑到使试验数据便于分析,结论明确可靠。分析时当然是离不开设计的要求。由此可见,在一般情况下,设计比分析更为重要,为了突出这一点,就把解决上述两个问题的数学方法,叫试验设计法或试验设计。

## (二) 试验为什么要设计?

实践证明试验设计得好不好,直接影响到实验的结果。设计得好,通过少数的试验就能得到满意的结果。设计得不好,不但要增加试验的次数使时间拖长,浪费人力、物力,而且还得不到明确可靠的结论。甚至会引起试验条件的改变使试验失败。因此,如何科学地、合理地设计试验是一个很值得研究的问题。

下面先看几个简单的例子。

### 例1 (关于单因素二位级的试验设计)

在足球、篮球赛中,当比赛进行到下半场时,就要双方交换场地。这一设计方案,其用意就是为的要消除由两边场地可能有的较大差异而带来的对两个球队的技巧评价。

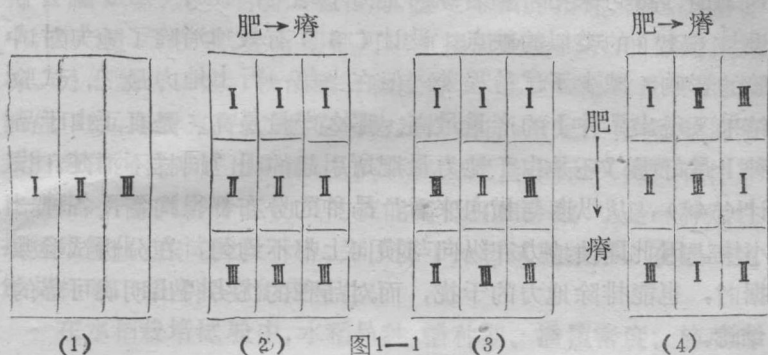
### 例2 (关于单因素三位级的试验设计)

某农技站想引进外地的蚕豆优良品种,选了I、II、III三个品种进行比较,看哪个品种在本地种植产量最高。怎样安排试验?

这个试验只考虑品种一个因素,称为单因素试验, I、II、III三个品种称为品种因素的三个位级。要评价好的试验结

果，称为指标，这里的指标为产量，产量越高越好。

图 1—1 给出了四种设计方案。



设计(1)是将三个品种分别种在三块大田里，比较它们的产量高低，来确定哪一个品种更适合本地生产。我们知道，通常土地肥力或水份等状况，在距离相近范围较小的面积内，差异较小，而距离较远的地方，一般差异就较大。设计(2)、(3)、(4)的共同处是把这片试验田都分种九块，不同处是小块内品种的排列方法不同。如果把图 1—1 中，三条称为三个区组，那么设计(2)中，每个区组内各品种位置安排的顺序都相同。设计(3)中，每个区组内各品种位置安排是由抽签方法确定的。设计(4)是每一行与每一列内各品种都出现一次，这种设计叫拉丁方设计。

我们来比较一下这四种设计。若三条田块地力相当均匀一致时，则设计(1)是最简便的。但是实际情况是很多场合下地力是不均匀的，或者试验前对地力的均匀度不能作出准确的判断，这时设计(1)就不好了。例如若品种 I 所在的那块，田力最好，产质也最高，品种 III 所在的那块田地力最差，产量也最低。那么我们就无法分清产量的高低，究竟是由品种的优

劣引起的，还是由田块肥力的不同所起的，作不出可靠的结论。设计(2)当纵向地力均匀时，即是每个区组内的地力都均匀时，就可采用，但若纵向地力不均匀，设计(2)就会有设计(1)的类似的缺点。设计(3)有效地消除了地力对试验的影响，减少了试验误差，但在当第一行上地力最肥，试验结果又得出品种I的产量最高。那么产量最高，是真正由于品种I最好呢？还是由于地力最肥所引起的呢？同样不清楚。设计(4)，从纵向与横向来看，品种的分布都很均衡，各种一小块。因此即使地力在纵向与横向上都不均匀，在分析试验数据时，也能排除地力的干扰，而对品种的优劣得出明确可靠的结论。

从这个例子看出，对试验进行科学设计是很重要的。

顺便说一下，前面的设计(4)，将它表格化，可以记为：

				1	2	3	4		1	2	3	4	5
1	2	3		2	1	4	3		2	3	4	5	1
2	3	1	类似还有	3	4	1	2		3	4	5	1	2
3	1	2		4	3	2	1		4	5	1	2	3
等等。									5	1	2	3	4

分别称它们为  $3 \times 3$  正交拉丁方， $4 \times 4$  和  $5 \times 5$  正交拉丁方。参考书目〔1〕中还列有其它的正交拉丁方表。

### (三) 因素、位级和指标

下面说明以后要用到的一些名词。

某生产队为了提高水稻的产量与质量，从外地引进几个新品种，现在需要通过小面积的试种来比较这些品种的优劣，同时摸清它们的栽培技术。

水稻的产量以亩产量表示，质量则以千粒重、生育期、可口

性（煮成饭后吃起来是否好吃）等项指标来考核。以上这些量都是在试验中来衡量试验效果的，叫做试验指标，简称指标。进行一项试验，先要明确试验目的，选定考核的指标。在这些指标中，亩产量、千粒重、生育期都可以直接用数量表示，叫做定量指标。另外象可口性、秧苗整齐程度等，不能直接用数量表示，只能凭口尝、眼看来评定，称它们为定性指标。对定性指标，我们可用打分的办法来评出等级，从而转化为定量指标。又例如在体操比赛中，评委对各个运动员的技能高低打出分数，也是一种定性指标量化。在试验设计中，为了便于分析试验结果，在遇到定性指标时，经常把它们定量化。

在水稻栽培试验中，水稻品种、播种期、插植密度、施肥时间和数量、田间管理、生长期的雨量和气温等都对试验指标有影响，通常称它们为因素（或称因子）。有一类因素，在试验时，可以人为地加以调节和控制，如播种的品种、播种期、插植密度等，叫做可控因素。另一类因素，由于测试技术还不完善，测不出因素的数值，或虽然能测出，但由于控制手段还不具备，不能把因素控制在指定的用量上。例如大面积上作物生长期的雨量和气温等。这类因素叫做不可控因素。在试验设计中，在谈到因素时，一般都指的是可控因素。

在试验中，对因素的用量、所处状态，叫做因素的位级（或称水平），在农业上叫做处理。它不一定是数值，可以是原料的种类或操作方式等。例如在上面例2中，因素只有一个，就是稻谷。位级是三个，I、II、III三个品种。

只考虑一个因素的试验，叫做单因素试验，考查两个或多于两个因素的试验，叫做多因素试验。下节要介绍的正交试验法是一种适用于考查多位级试验的方法。

如果将所有的位级组合的试验都做遍，叫做全面试验，如

果只选做其中的一部分，叫做部分试验。

## §1.2 正交试验设计的基本

### 本思想和基本方法

#### (一) 正交试验设计的基本思想和基本方法

先通过一个简单的例子来介绍正交试验设计的基本思想和基本方法。

**例1** 轴承圈热处理退火试验，寻求最佳工艺条件。

在进行试验时，采取的步骤是：

#### 1、明确试验目的，确定试验指标。

实际工作中有时要求解决的问题很多，而且复杂。比如有产量、质量、消耗、原料等问题。不可能通过一批试验把要解决的问题都解决，需要一批一批去做试验，逐步寻求解决。所以在做每次试验前，先确定这次主要为解决哪一个或哪几个问题，然后针对这几个问题来确定相应的指标，有的是定量指标，也有的是定性指标。在定量指标中有的要求指标值越大越好(如产量、害虫死亡率等)，有的要求指标越小越好(如菌肥培养时间，原材料的消耗量等)，试验前先要弄清楚。

例1是研究轴承圈退火工艺，旧工艺退火后轴承圈硬度大，质量不够好，且每炉还有15%左右要回炉。希望通过试验，找到较好的工艺条件，降低硬度，因此例1的指标是轴承圈硬度的合格率。

#### 2、挑因素、选位级、制定因素位级表。

指标确定后，就可着手分析影响这些指标的种种因素，例如原料、操作方法等。首先把可能影响指标的各种可控因素都排列出来，然后经过仔细分析，反复研究，排除那些对指标影

响不大,或者已经掌握得较好的,或暂不考察的因素。所谓“排除”是指把这些因素固定在适当的位级上,在各次试验中保持不变。挑出那些对指标有影响,但又不清楚影响的大小的因素,对这一类因素来进行考察。

因素选定后,再定出每个因素的位级。位级选法是先根据已往的生产经验和专业知识,定出各因素的变化范围;然后,再在各范围内,确定位级的个数和用量或状态,各因素的位级的个数并不要求都一样。对于数量性质的因素。各位级间的变化幅度要适当,位级间隔太小,不容易看出苗头来;太大,就容易漏掉较好的生产条件。各位级间不一定要等距,次序也不一定要按从小到大,或从大到小来排列。有时,为了消除人为的影响,可采取随机化的办法(例如抽签)。因素的位级要选择得比较合理,位级选取不适当,就会使试验得不到好的效果。

本例1挑选了三个因素,每个因素各取定了两个位级,列入下表1-1。

表1-1

因素 位级	上升温度A	保温时间B	出炉温度C
位级1	800°C	6小时	400°C
位级2	820°C	8小时	500°C

### 3、挑选正交表,列出试验方案,进行试验。

因素、位级选好以后,怎样安排试验呢?若进行全面试验,试验次数就会很多,有时不仅办不到,实际上也没有必要这样做,例如对7因素2位级的试验,若进行全面试验,就要做 $2^7 = 128$ 次试验,太多了。我们希望选有代表性的,且结果便干

分析的部分试验来做。而按正交表安排的正交试验可以达到上述目的。

为此先介绍一下“正交表”，下面是两张最常用的正交表。

正交表 $L_8(2^7)$

正交表 $L_9(3^4)$

表1—2

表1—3

列号	列号						
	1	2	3	4	5	6	7
试验号	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

列号	列号			
	1	2	3	4
试验号	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

正交表 $L_8(2^7)$ 有8个横行，7个竖列，由字码“1”和“2”组成。它有两个特点：

(1) 每竖列中恰有四个“1”和四个“2”，“1”的个数与“2”的个数一样多。

(2) 任意两个竖列，其横方向组成的几个有序数字对(1,1)，(1,2)，(2,1)，(2,2)各出现两次，次数一样。我们就说字码“1”和“2”间的搭配是均衡的。

“搭配均衡”在数学上称为“正交”，因此称这样的表为正交表。

再看另一张正交表 $L_9(3^4)$ ，有9个横行，4个竖列，由

字码“1”，“2”，“3”组成，它也有同样两个特性：

(1) 每竖列中“1”，“2”，“3”出现的次数相同，都是3次。

(2) 任意两个竖列，其横方向组成的6个有序数字对(1,1)，(1,2)，(1,3)，(2,1)，(2,2)，(2,3)，(3,1)，(3,2)，(3,3)各出现一次，即字码“1”，“2”和“3”搭配是均衡的。

下面一般地介绍一下正交表符号，正交表符号 $L_N(S^k)$ 所表示的意思是：L是正交表代号，N表示正交表的行数，k表示正交表的列数，S是字码个数。类似，混合位级正交表 $L_8(4 \times 2^4)$ ，表示此正交表有8行，有5列，其中第一列有4个字码，其它4列各有2个字码。如表1-4所示。

表1-4

试验号	列号				
	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	2	1	2

有了上述知识后，回到例1，究竟如何试验呢？又可分为三步：

(1) 选合适的正交表

由于上面已经选好了三个因素，各是两个位级，要进行的是3因素2位级的试验，因此选表就从两位级表 $L_4(2^3)$ ，



$L_8(2^7)$ ,  $L_{12}(2^{11})$ , ……中去选取。因为因素一共是 3 个, 因此选用  $L_4(2^3)$  表就可, 它的 3 个竖列恰好可以安排下 3 个因素。当然也可以选用  $L_8(2^7)$ ,  $L_{12}(2^{11})$ , ……等表, 但这样就要增多试验次数。一般, 我们若有合适的小表可用, 就用小表, 不用大表。

表1-5

试验号	列号		
	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

(2) 列出表头设计

按照因素位级表1-1中挑选的3个因素的次序, A(上升温度), B(保温时间)和C(出炉温度)分别安排在  $L_4(2^3)$  的 3 竖列上, 每列放上一个因素。比如把第一列放因素 A, 这一列字码“1”表示上升温度为  $800^{\circ}\text{C}$ , 字码“2”为  $820^{\circ}\text{C}$ , 其它两列分别放因素 B 和因素 C。

(3) 列出试验方案

把各列中的字码“1”、“2”换成这列所放因素的具体位级, 这样就完成了试验方案的制订工作(见表1-3)。

表1-6

试验号	列号	1	2	3
	因素	上升温度 A	保温时间 B	出炉温度 C
1		1 ( $A_1-800^{\circ}\text{C}$ )	1 ( $B_1-6$ 小时)	1 ( $C_1-400^{\circ}\text{C}$ )
2		1	2 ( $B_2-8$ 小时)	2 ( $C_2-500^{\circ}\text{C}$ )
3		2 ( $A_2-820^{\circ}\text{C}$ )	1	2
4		2	2	1

试验方案表1-6中, 每个号做一次试验, 其横行指出这号试验的试验条件。这个表共有 4 行, 为此共做 4 次试验。比如第一号试验, 是把上升温度控制在  $800^{\circ}\text{C}$ 、保温时间为 6 小时, 出