高等数学习题集

上

GAODENG SHUXUE

XITIJI

主　编　任大源

副主编　陈　琳

重庆大学出版社

高等数学习题集

上

主　编　任大源　副主编　陈　琳

重庆大学出版社

内容提要

本习题集分为上、下两册。习题集上册内容有函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学以及微分方程等;下册内容有向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学以及无穷级数等。

本习题集适合于应用型本科院校的工科专业及对数学要求较高的经管类专业学生使用,也可供教师教学参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集. 上/任大源主编. --重庆:重庆大学出版社,2017.8

ISBN 978-7-5689-0696-8

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①任… Ⅲ. ①高等数学—习题集 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 183083 号

高等数学习题集(上)

主 编 任大源

副主编 陈 琳

参 编 董 艳 郑茂波 蔡礼渊 杨 印

石 川 谭宁波 段 慧

策划编辑:何 梅

责任编辑:陈 力 版式设计:何 梅

责任校对:张红梅 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:易树平

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路 21 号

邮编:401331

电话:(023) 88617190 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

重庆学林建达印务有限公司印刷

*

开本:787mm×1092mm 1/16 印张:7.5 字数:168千

2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷

印数:1—4 000

ISBN 978-7-5689-0696-8 定价:19.00 元

前言

《高等数学习题集》是以“工科类本科数学基础课程教学基本要求”为指导，主要服务于应用型本科院校的工科专业及对数学要求较高的经管类专业的高等数学课程的教学，是学生学习高等数学课程的练习用书，也可作为教师教学的参考。

本习题集分为上、下两册。习题集上册内容有函数与极限、一元函数微分学、一元函数积分学以及微分方程等；下册内容有向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学以及无穷级数等。

基于应用型本科人才培养方案以及数学课程教学改革的潮流，本习题集具有下述几个特点。

(1)每个章节的知识点由浅入深，从概念的理解，到基本运算的掌握，再到知识的灵活运用，全面形成学生在数学问题上的综合素养。

(2)重视基本概念的理解，思想方法的渗透，以及数学知识的应用，加入了一些应用型问题，以生活或工程上的实例加强学生对概念和方法的理解。

(3)与考研数学接轨，在每节习题后加入了与该节知识相关的考研真题，向学生逐步揭开考研数学的面纱，鼓励有条件的学生继续深造。

(4)题量和难度适中，知识点覆盖较为全面，题型精练且具有代表性，层层递进，适合作为高等数学课程的配套习题。

本习题集是由成都工业学院高等数学教研室教师编写后，经多年的教学实践，不断地修改、提炼形成的，对于应用型本科院校的高等数学课程教学有较好的实践意义。欢迎使用，并请广大读者批评指正。

编　者

2017 年 6 月

目录

第 1 章 函数与极限

1.1 函　数

一、求下列函数的自然定义域：

1. $y=\sqrt{x-2}+\dfrac{1}{\ln(3-x)}$

2. $y=\arcsin\dfrac{x^2+1}{5}$

二、设$f(x)$的定义域为$[0,1]$，求下列函数的定义域：

1. $f(e^x)$

2. $f(\cos x)$

三、下列各题中$f(x)$和$g(x)$是否相同？为什么？

1. $f(x)=x,g(x)=(\sqrt{x})^2$

2. $f(x)=\sec^2 x,g(x)=\tan^2 x+1$

四、判断下列函数的奇偶性:

1. $f(x)=x\cdot\dfrac{a^x-1}{a^x+1}\quad(a>0,a\neq1)$

2. $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

3. 设函数$f(x)$为奇函数,$g(x)$为偶函数,判断$f[g(x)]$的奇偶性.

五、已知$f(x)=\mathrm{e}^{2x}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,求$\varphi(x)$及其定义域.

六、设$f\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^4}$,求$f(x)$.

七、已知$f(x)=\begin{cases}x-2, & |x|>2\\ 2x+1, & |x|<2\end{cases}$,求$f[f(3)]$.

八、某品牌手机每部售价为1 000元,成本为600元. 厂商为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过50部的,每多订购1部,售价就降低10元,但最低售价为每部800元. 试将厂方所获利润P表示成订购量x的函数,并求当订购量为70部时厂方可获多少利润?

考研真题：

设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$,则$f\{f[f(x)]\}=$________.

1.2　极限的概念

一、观察当 $n\to\infty$ 时下列数列的变化趋势，并判断它们是否收敛，若收敛指出其极限：

1. $x_n=(-1)^n\dfrac{1}{3^n}$

2. $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$

3. $x_n=a^n(a>1)$

4. $x_n=\cos n\pi$

5. $x_n=3^{(-1)^n}$

6. $x_n=\dfrac{2^n-1}{3^n}$

二、由函数图形判别下列函数极限是否存在，如存在，则写出其极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$

3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$

5. $\lim\limits_{x\to 0}a^x(a>0,a\neq 1)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty}a^x(a>0,a\neq 1)$

7. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 0\\ x-1, x<0\end{cases}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}$

三、考察函数 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ 在点 $x=0$ 处的左右极限,并说明在 $x=0$ 处极限是否存在.

四、设函数 $f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x<0\\ e^x, & x>0\end{cases}$,若当 $x\to 0$ 时极限存在,求常数 a 的值.

五、思考并回答下列问题:

1. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,数列 $\{x_{2n+1}\}$ 是否一定收敛?

2. 如果数列 $\{x_n\}$ 发散,数列 $\{x_{2n+1}\}$ 是否一定发散?

3. 如果数列 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,数列 $\{x_{n+10}\}$ 是否一定收敛?若收敛,求极限.

4. 如果数列 $\{x_n\}$ 收敛,$\{y_n\}$ 发散,问 $\{x_n+y_n\}$ 是收敛还是发散?

5. 如果数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 均发散,问 $\{x_n+y_n\}$ 是否一定发散?

六、下列命题中正确的是(　　).

A. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=b$,且 $a<b$,则 $\forall n\in\mathbf{N}^+$,有 $x_n<y_n$

B. 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}=a$,$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}=b$,则数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在

C. 若 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在,则函数在 $x=a$ 的某邻域内有界

D. 若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$,而函数 $f(x)$ 在 $x=a$ 无定义,则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在

1.3　无穷小和无穷大的概念　极限的运算法则

一、指出下列函数在什么情况下是无穷小量,什么情况下是无穷大量:

1. $y=\mathrm{e}^{-x}$

2. $y=\ln x$

3. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$

4. $y=2^{\frac{1}{x}}-1$

二、填空题.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=(\qquad)$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-5x+4}=(\qquad)$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-3}{x^2-5x+4}=(\qquad)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+1)^{10}(3x-4)^5}{(2x-7)^{15}}=(\qquad)$.

5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\ln[(\sin 2x)^3]=(\qquad)$.

6. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的水平渐近线为(　　　　),铅直渐近线为(　　　　).

三、计算下列极限:

1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+(n+1)}{n^2}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+2}{\sqrt{x^4+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+1}+x)$

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-4}-\sqrt{x}}{x-1}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})\arctan x$

*8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$

四、已知$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{a\sqrt{x}+b}{x-1}=1$,求常数 a 与 b 的值.

1.4　极限存在准则与两个重要极限

一、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{\sin 5x}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty}2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于 0 的常数）

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{1+2x}\sin\dfrac{1}{x}\right)$

二、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{2x-1}$

三、利用夹逼准则计算数列极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$.

*四、设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求出其极限.

五、计算半径为 R 的圆的内接正 n 边形的面积 A_n,并利用其证明圆的面积为 πR^2.

考研真题:

计算极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x-b)}\right]^x$.

---

* 表示选做题,此书其余情况同。

1.5　无穷小和无穷大的性质　无穷小的比较

一、当 $x \to 0$ 时，函数 $y = x\sin\frac{1}{x}$ 和 $y = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是否是无穷小或无穷大，并说明理由.

二、下列命题中，正确的命题有(　　).

(1)无界函数必为无穷大量；

(2)有限多个无穷大量之和仍为无穷大量；

(3)无穷大量必为无界函数；

(4)无穷大量与有界函数之积仍为无穷大量.

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

三、当 $x \to 0$ 时，下列无穷小中

(1) $\sin x - \tan x$　　(2) $1 - \cos x^2$　　(3) $\sqrt[5]{1+x} - 1$　　(4) $\ln(1 - x^2)$

从高阶到低阶依次是(　　)，(　　)，(　　)，(　　).

四、计算下列极限：

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\arctan x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x} + 2x\sin\frac{1}{x}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\arcsin 3x}$

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1 - \cos x}{x(e^{2x} - 1)}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-2x^2)}{x(\sqrt{1+x}-1)}$

6. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

7. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{\sin((x-1)\pi)}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}$

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^n}{(\sin x)^m}$($m,n$ 为正整数)

考研真题:

当 $x\to 0^+$ 时,与$\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是(　　).

A. $1-e^{\sqrt{x}}$　　B. $\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　C. $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　D. $1-\cos\sqrt{x}$

1.6 连续函数的概念与性质

一、讨论下列函数在分段点处的连续性：

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 4-2x & 1<x<2\\ 2x+1 & x\geqslant 2\end{cases}$

二、设 $f(x)=\begin{cases}ax^2+bx, x<1\\ 3, x=1\\ 2a-bx, x>1\end{cases}$，求常数 a,b 的值，使函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

三、找出下列函数的间断点，并判断间断点的类型，如果是可去间断点，则补充或改变该点的函数值使它连续：

1. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x-3}$

2. $y=\dfrac{x}{\sin x}$

3. $y=\arctan\dfrac{1-x}{2-x}$

4. $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{\pi x-2}, & x>0\\ x-1, & x\leqslant 0\end{cases}$