高等院校应用型本科教材

Linear Algebra Problem Set

线性代数习题册

董 慧 韦娜娜 主编

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

经济科学出版社
Economic Science Press

高等院校应用型本科教材

线性代数习题册

董 慧 韦娜娜 主编

经济科学出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数习题册/董慧，韦娜娜主编．—北京：经济科学出版社，2016.1
ISBN 978－7－5141－6570－8

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①董…②韦…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－习题集　Ⅳ.①O151.2－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 019522 号

责任编辑：段　钢　周胜婷
责任校对：靳玉环　王苗苗
责任印制：邱　天

线性代数习题册
董　慧　韦娜娜　主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮编：100142
总编部电话：010－88191217　发行部电话：010－88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京万友印刷有限公司印装
787×1092　16 开　9 印张　200000 字
2016 年 1 月第 1 版　2016 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978－7－5141－6570－8　定价：19.80 元

编委会成员

主　编　董　慧　韦娜娜

副主编　刘明月　郭红丽　赵华杰

编　委　魏选平　闫　璐　吴博峰　樊葡萄

前　言

本书是与经济科学出版社出版的《线性代数》教材相配套的学习辅导书。《线性代数》是大学经济类、管理类等各专业的一门重要的基础课，但该课程教学课时少、概念多、定理多、内容抽象。本书结合西安财经学院行知学院数学教研室多年的教学经验，根据《线性代数》的教学内容和进度安排，集教材内容指导和同步习题练习于一体，为学生梳理了每一章节的知识结构、清晰提炼了重点考点、深入讲解了思路方法，帮助学生吃透教材知识、融会贯通方法技巧。

本书结构框架贴合教材，每一章节均由四部分组成："主要内容"、"学法建议"、"疑难解析"、"同步练习"。在"主要内容"部分，整理出本章的主要概念、重要定理与理论，以便学生能够清晰地掌握本章的主要脉络，了解本章的基本要求。在"学法建议"部分，为学生罗列出本章各类题型的解题方法，说明常用的解题思路，同时明确本章的重、难点。在"疑难解析"部分，在教材已有例题的基础上，进一步扩大了例题的覆盖面，在例题的选择上，本着"强调基本方法，增强分析能力，开阔解题思路，提高综合能力"的原则，使例题在覆盖面、难易搭配、题型构成等方面对教材内容做了大量补充。在"同步练习"部分，结合学生对前三部分内容的学习，选配了相应的习题，并注意基本题与综合题的搭配，其中，每小节练习题与课堂教学内容相配套，题型涉及选择题、填空题、计算题、证明题。练习题内容由浅入深、由易到难，使学生理解线性代数基本理论和解题方法的同时，也为后续专业课的学习打下坚实的基础。最后本书给出了八套期末模拟试卷，为学生在学期末的复习提供了材料，帮助学生进行自我检测。

本书适合多层次读者的需要，虽主要作为独立院校经济管理学科学生的学习辅导书，实际上也适用于参加成人教育、高教自考、学历文凭考试等读者的学习需要。尤其对于有考研需求的学生，本书更是一本注重基础知识和基本方法的系统的复习参考书。

在本书的编写过程中得到了西安财经学院行知学院领导的大力支持，

同时，方志强、刘燕乐、李杨、张晓妮、仇甜、李瞳、韩家林、胡陈陈、韩珊珊、侯维然等同学做了大量工作，在这里深表感谢！

由于编者水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，恳请广大读者批评指正。

编者

2016 年 1 月

目　　录

第一章　行列式

一、主要内容

1. 基本概念

（1）行列式的定义。

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$为排列$(j_1j_2\cdots j_n)$的逆序数。

（2）行列式D的元素a_{ij}的余子式，记为M_{ij}，称$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$为a_{ij}的代数余子式。

2. 教学要点

（1）行列式与其转置行列式的值相等，即$D^T=D$。

（2）对换行列式的i，j两行（或两列），行列式的值变号，即$D(r_i\leftrightarrow r_j)=-D(D(c_i\leftrightarrow c_j)=-D)$。特别地，如果行列式有两行（列）相同，则行列式等于零。

（3）行列式的某一行（列）如果有公因数k，则k可以提到行列式符号外，即$D(kr_i)=kD(D(kc_i)=kD)$。若行列式的某一行（列）元素全为零，则行列式等于零；若行列式有两行（列）成比例，则行列式等于零。

（4）把行列式第i行（列）各元素的k倍加到第j行（列）的对应元素上（记作r_j+kr_i），其值不变。

（5）若行列式某一行（列）的元素均可表示为两项之和，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i1} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

（6）设D为n阶行列式，A_{ij}为元素a_{ij}的代数余子式，那么

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\delta_{ij}D，\text{其中 }\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\delta_{ij}D,\text{ 其中 }\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

（7）上（下）三角行列式 D 的值等于其对角线上元素的乘积，即

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & & \vdots\\0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

（8）克莱姆法则。n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_j=b_j,j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

当（且仅当）它的系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$ 时，有唯一的解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1$，2，…，n，其中 D_j 是把行列式 D 的第 j 列的元素换以方程组的常数项而得到的 n 阶行列式。

如果 $b_1=b_2=\cdots=b_n=0$，则方程组（1）一定有零解，这种线性方程组叫做齐次线性方程组。齐次线性方程组除零解外，可能还有非零解。对于齐次线性方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_j=0(j=1,2,\cdots,n)$，根据克莱姆法则，如果它的系数行列式 $D=|a_{ij}|\neq 0$，那么它只有零解。因此，如果该方程组有非零解，则必有系数行列式 $D=0$。

二、学法建议

（1）行列式的计算。计算行列式，要根据行列式的特点采用相应的方法。常用方法有：利用定义；利用行列式的性质化行列式为上（下）三角行列式；按某行（列）展开等方法。

（2）与代数余子式相关的问题。往往利用下述表达式简化与代数余子式的相关的问题。设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，那么

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=\delta_{ij}D,\text{其中 }\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=\delta_{ij}D,\text{其中 }\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\0, & i\neq j\end{cases}$$

（3）线性方程组问题。此类问题往往直接利用克莱姆法则即可。

三、疑难解析

例 1 计算行列式：$\begin{vmatrix}-ab & ac & ae\\bd & -cd & de\\bf & cf & -ef\end{vmatrix}$

解：原式 $=\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix} = adf\begin{vmatrix} -b & c & e \\ b & -c & e \\ b & c & -e \end{vmatrix}$

$$= adfbce\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4abcdef$$

例 2 证明：$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

解：当 $n=2$ 时，$D_2 = \begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix} = x^2 + a_1x + a_2$，命题成立。

假设对于（$n-1$）阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1} = x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x + a_{n-1}$$

则 D_n 按第一列展开：

$$D_n = xD_{n-1} + a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix} = xD_{n-1} + a_n = \text{右边}$$

所以，对于 n 阶行列式命题成立。

例 3 设 $f(x) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & x \\ a_{21} & a_{22} & x & a_{24} \\ a_{31} & x & a_{33} & a_{34} \\ x & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$，则多项式 $f(x)$ 中 x^3 的系数是多少？

解：按第一列展开 $f(x) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + xA_{41}$

$\because A_{11}, A_{21}, A_{31}$ 中最多只含有 x^2 项，$\therefore$ 含有 x^3 的项只可能是 xA_{41}

$$xA_{41} = x(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & x \\ a_{22} & x & a_{24} \\ x & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

$$= -x[x(a_{12}a_{34} + a_{13}a_{24} + a_{22}a_{33}) - (x^3 + a_{13}a_{22}a_{34} + a_{12}a_{24}a_{33})]$$

$\because xA_{41}$ 不含 x^3 项

$\therefore f(x)$ 中 x^3 的系数为 0

例 4 计算行列式：$\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} -2 & 2 & -4 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= 2\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -8 & -3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 0 & 13 & -7 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 13 & -7 \end{vmatrix}$$

$$= 10\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \end{vmatrix} = -10\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -10\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 27 \end{vmatrix} = -270$$

例 5 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$

解： $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3 - ar_2 \\ r_2 - ar_1}]{r_4 - a^2 r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{按第一列展开} \begin{vmatrix} b-a & c-a & d-a \\ b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{性质3} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_2 - br_1]{r_3 - b(b+a)r_2} (b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c(c-b)(c+b+a) & d(d-b)(d+b+a) \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{性质}3]{\text{按第一列展开}}(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1 & 1\\ c(c+b+a) & d(d+b+a)\end{vmatrix}$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)$$

例 6　如果 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix}0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24}\end{vmatrix}$ 和 $\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32} & a_{42}\\ a_{23} & a_{33} & a_{43}\\ a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}$ 等于多少？

解： 令 $B=\begin{vmatrix}a_{22} & a_{32} & a_{42}\\ a_{23} & a_{33} & a_{43}\\ a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{1+1}|B|=1\Rightarrow a_{11}\neq 0\text{，且}|B|=\frac{1}{a_{11}}\neq 0$$

$$\begin{vmatrix}0 & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\\ a_{11} & a_{12} & a_{23} & a_{24}\end{vmatrix}=a_{11}\cdot(-1)^{4+1}|B|=-a_{11}|B|=-1,\quad \begin{vmatrix}a_{22} & a_{32} & a_{42}\\ a_{23} & a_{33} & a_{43}\\ a_{24} & a_{34} & a_{44}\end{vmatrix}$$

$$=|B^T|=|B|=\frac{1}{a_{11}}$$

例 7　设 $D=\begin{vmatrix}a & b & c & d\\ c & b & d & a\\ d & b & c & a\\ a & b & d & c\end{vmatrix}=\Delta(a_{ij})$，$A_{ij}$表示元素 a_{ij}的代数余子式，则

$A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=?$

解： $A_{14}+A_{24}+A_{34}+A_{44}=\begin{vmatrix}a & b & c & 1\\ c & b & d & 1\\ d & b & c & 1\\ a & b & d & 1\end{vmatrix}\xlongequal{\text{推论}4}0$

例 8　设 $f(x)=\begin{vmatrix}5 & 4 & 3 & 2 & x & 0\\ 4 & 3 & 2 & -x & 0 & 0\\ 3 & 2 & x & 0 & 0 & 0\\ 2 & -x & 0 & 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6\end{vmatrix}$，则 x^5 的系数为？

解：方法一：

$$f(x)=\begin{vmatrix}5&4&3&2&x&0\\4&3&2&-x&0&0\\3&2&x&0&0&0\\2&-x&0&0&0&0\\x&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&6\end{vmatrix}=6\begin{vmatrix}5&4&3&2&x\\4&3&2&-x&0\\3&2&x&0&0\\2&-x&0&0&0\\x&0&0&0&0\end{vmatrix}$$

$$=6\cdot(-1)^{\frac{5\times4}{2}}\cdot(-1)^2\cdot x^5=6x^5$$

方法二：$\because$ $f(x)$ 只有一项非 0

$$\therefore f(x)=\begin{vmatrix}5&4&3&2&x&0\\4&3&2&-x&0&0\\3&2&x&0&0&0\\2&-x&0&0&0&0\\x&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&6\end{vmatrix}=(-1)^{t(543216)}a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51}a_{66}$$

$$=(-1)^{10}\cdot(-1)^2\cdot x^5\cdot 6=6x^5$$

综上所述：x^5 的系数为 6。

例 9 用数学归纳法证明当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}x&-1\\a_2&x+a_1\end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，命题成立。

证明：假设对于 $(n-1)$ 阶行列式命题成立，即

$$D_{n-1}=x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1}$$

则 D_n 按第一列展开：

$$D_n=xD_{n-1}+a_n(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}-1&0&\cdots&0&0\\x&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&x&-1\end{vmatrix}=xD_{n-1}+a_n=\text{右边}$$

所以，对于 n 阶行列式命题成立。

例 10 用克莱姆法则解下列方程组：

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3+x_4=5\\x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2\\2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2\\3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0\end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&-1&4\\2&-3&-1&-5\\3&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&-5&-3&-7\\0&-2&-1&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-13&8\\0&0&-5&14\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&0&-1&-54\\0&0&0&142\end{vmatrix}=-142$$

$$D_1=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\-2&2&-1&4\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&1&1&1\\0&5&0&9\\-2&-3&-1&-5\\0&1&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&5&0&9\\0&-13&-3&-23\\0&1&2&11\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&1&2&11\\0&5&0&9\\0&-13&-3&-23\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&1&2&11\\0&0&-10&-46\\0&0&23&120\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-5&-1&-9\\0&1&2&11\\0&0&-1&38\\0&0&0&142\end{vmatrix}$$

$$=-142$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\1&-2&-1&4\\2&-2&-1&-5\\3&0&2&11\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-7&-2&3\\0&-12&-3&-7\\0&-15&-1&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-1&3&2\\0&0&23&11\\0&0&39&31\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1&5&1&1\\0&-1&3&2\\0&0&-1&-19\\0&0&0&-284\end{vmatrix}=-284$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&5&1\\1&2&-2&4\\2&-3&-2&-5\\3&1&0&11\end{vmatrix}=-426\qquad D_4=\begin{vmatrix}1&1&1&5\\1&2&-1&-2\\2&-3&-1&-2\\3&1&2&0\end{vmatrix}=142$$

$$\therefore x_1=\frac{D_1}{D}=1,\ x_2=\frac{D_2}{D}=2,\ x_3=\frac{D_3}{D}=3,\ x_4=\frac{D_4}{D}=-1$$

例 11 用克莱姆法则解下列方程组

$$\begin{cases}5x_1+6x_2=1\\x_1+5x_2+6x_3=0\\x_2+5x_3+6x_4=0\\x_3+5x_4+6x_5=0\\x_4+5x_5=1\end{cases}$$

解：

$$D=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按最后一行}}5D'-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}=5D'-6D''$$

$$=5\ (5D''-6D''')\ \ -6D''\qquad =19D''-30D'''\qquad =65D'''-114D''''$$

$$=65\times19-114\times5=665$$

（D'为行列式 D 中 a_{11} 的余子式，D''为 D'中 a'_{11} 的余子式，D'''，D''''类推）

$$D_1=\begin{vmatrix}1&6&0&0&0\\0&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\1&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}D'+\begin{vmatrix}6&0&0&0\\5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}=D'+6^4=19D'''-30''''+6^4$$

$$=1507$$

$$D_2=\begin{vmatrix}5&1&0&0&0\\1&0&6&0&0\\0&0&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&1&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第二列}}-\begin{vmatrix}1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&0&0&0\\1&6&0&0\\0&5&6&0\\0&1&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}$$

$$-5\times6^3=-65-1080=-1145$$

$$D_3=\begin{vmatrix}5&6&1&0&0\\1&5&0&0&0\\0&1&0&6&0\\0&0&0&5&6\\0&0&1&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第三列}}\begin{vmatrix}1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&0&0\\0&1&6&0\\0&0&5&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&6&0\\0&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}$$

$$+6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&0\\0&1&6\end{vmatrix}=19+6\times114=703$$

$$D_4=\begin{vmatrix}5&6&0&1&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&0&0\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第四列}}-\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\\0&0&0&5\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}5&6&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&0\\0&0&1&6\end{vmatrix}$$

$$=-5-6\begin{vmatrix}5&6&0\\1&5&6\\0&1&5\end{vmatrix}=-395$$

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&1\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&0\\0&0&0&1&1\end{vmatrix}\xlongequal[\text{展开}]{\text{按最后一列}}\begin{vmatrix}1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\\0&0&0&1\end{vmatrix}+D'=1+211=212$$

$\therefore x_1=\dfrac{1507}{665}$；$x_2=-\dfrac{1145}{665}$；$x_3=\dfrac{703}{665}$；$x_4=\dfrac{-395}{665}$；$x_4=\dfrac{212}{665}$

例 12 问 λ，μ 取何值时，齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\x_1+\mu x_2+x_3=0\\x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$ 有非零解？

解： $D_3=\begin{vmatrix}\lambda&1&1\\1&\mu&1\\1&2\mu&1\end{vmatrix}=\mu-\mu\lambda$，若齐次线性方程组有非零解，则 $D_3=0$

即 $\mu-\mu\lambda=0$　　　得：$\mu=0$ 或 $\lambda=1$

不难验证，当 $\mu=0$ 或 $\lambda=1$ 时，该齐次线性方程组确有非零解。

四、同步练习

1.1 二阶与三阶行列式

1. 填空题：

（1）3421 的逆序数为________。

（2）517924 的逆序数为________。

2. 计算下列二阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix}5&4\\3&2\end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix}3&6\\-1&2\end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix}\cos x&-\sin x\\\sin x&\cos x\end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix}x-1&x^3\\1&x^2+x+1\end{vmatrix}$

（5）$\begin{vmatrix}a^2&a^3\\b^2&ab^2\end{vmatrix}$　　（6）$\begin{vmatrix}\sin\alpha&\cos\alpha\\\sin\beta&\cos\beta\end{vmatrix}$

（7）$\begin{vmatrix}1&\log_a b\\\log_b a&3\end{vmatrix}$

3. 计算下列三阶行列式：

（1）$\begin{vmatrix}2&1&3\\3&-2&-1\\1&4&3\end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix}0&a&0\\b&0&c\\0&d&0\end{vmatrix}$