

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第二十编

时代文献出版社

刘彦佩选集

(Selected Publications of Y.P.Liu)

第二十编



时代文献出版社

刘彦佩选集（第二十编）

作 者：刘彦佩

出版单位：时代文献出版社

编辑设计：北京时代弄潮文化发展公司

地 址：北京中关村海淀图书城25号家谱传记楼二层

电 话：010-62525116 13693651386

网 址：www.grcsw.com

印 刷：京冀印刷厂

开 本：880×1230 1/16

版 次：2016年3月第1版

书 号：ISBN 978-988-18772-5-3

定 价：全套 1978.00元（共计23编）

版权所有 翻印必究

第二十编 目录

中文文选第 13 卷	9463
20.1 (邻接)树图的同构及平面性(魏二玲)	9465
20.2 一类图的亏格(邵泽玲)	9472
20.3 图的上可嵌入性与独立节点的度和(吕胜祥)	9482
20.4 叉梯有向图在可定向曲面上的亏格多项式 (郝荣霞)	9490
20.5 球面和射影平面上不可分地图的色和 (李赵祥,任婧,徐世英)	9499
20.6 关于图的上可嵌入性的一个充分条件 (蔡俊亮,董广华)	9510
20.7 关于图的 Edmonds 平面对偶定理的一个注记	9518
20.8 3-边连通图的 Betti 亏数与奇度点(吕胜祥, 刘峰)	9520
20.9 射影平面上标号图的辅助图(郝荣霞)	9523
20.10 序 (运筹学基础,王周宏编)	9531
20.11 曲面上的偏微分方程	9532
20.12 曲面四角化上的直差分方程	9540
20.13 曲面四角化偏微分方程	9547
20.14 我所认识的拓扑图论(I): 球面上十部曲	9557
20.15 单行地图在曲面上的计数(张永利)	9562

Introduction to Combinatorial Maps	9565
20.16 Combinatorial Embeddings of a Graph	9571
20.17 Formal Definition of Maps	9576
20.18 Duality	9581
20.19 Orientability	9587
20.20 Orientable Map	9594
20.21 Nonorientable Maps	9599
20.22 Isomorphisms	9604
20.23 Automorphism Groups	9611
20.24 Asymmetric Census	9616
20.25 Symmetric Census	9629
组合泛函方程论	9641
20.26 基本知识	9656
20.27 介子泛函	9684
20.28 一元函数方程	9701
20.29 多元函数方程	9731
20.30 差分函数方程	9758
20.31 常微分方程	9789
20.32 偏微分方程	9819
20.33 外面型介子方程	9859
20.34 内面型介子方程	9932
20.35 曲面型介子方程	10027
20.36 参考文献	10085

刘彦佩
中文文选
第十三卷

北京交通大学
2013

目 录

164[423]	(邻接)树图的同构及平面性	1231
165[426]	一类图的亏格	1238
166[429]	图的上可嵌入性与独立节点的度和	1248
167[430]	叉梯有向图在可定向曲面上的亏格多项式	1256
168[431]	球面和射影平面上不可分地图的色和	1265
169[434]	关于图的上可嵌入性的一个充分条件	1276
170[437]	关于图的 Edmonds 平面对偶定理的一个注记	1284
171[454]	3-边连通图的 Betti 亏数与奇度点	1286
172[457]	射影平面上标号图的辅助图	1289
173[458]	序 (运筹学基础,王周宏编)	1297
174[481]	曲面上的偏微分方程	1298
175[482]	曲面四角化上的直差分方程	1306
176[484]	曲面四角化偏微分方程	1313
177[487]	我所认识的拓扑图论(I): 球面上十部曲	1323
178[488]	单行地图在曲面上的计数	1328

(邻接) 树图的同构及平面性

魏二玲^{1,*}, 刘彦佩²

(1. 中国人民大学信息学院, 北京, 100872; 2. 北京交通大学理学院, 北京, 100044)

摘要: 树图是非常有用的一类图. 本文刻画了 (邻接) 树图分别为 P_n, C_n, K_n 的图类并且讨论了 (邻接) 树图的平面性.

关键词: 树图; 邻接树图; 同构; 平面图

MR(2000) 主题分类: 05C38; 05C10 / **中图分类号:** O157.5

文献标识码: A **文章编号:** 1000-0917(2009)02-0220-07

本文中未解释的概念参见 [1] 和 [2]. 设 e 为图 G 的一条边, $G-e$ 表示从 G 中去掉 e 生成的子图. $G \cdot e$ 表示 G 中将 e 的两端点合二为一所得图, 称为边的收缩. 从连通图 G 可以构造树图 $T(G)$ 如下: 其点集为图 G 的所有生成树, 两点之间有边当且仅当对应的生成树仅有一边不同. 如果两点之间连边不仅要求对应的生成树只有一条不相同的边并且这两条边在 G 中还必须相邻, 则称所得到的图为邻接树图, 用 $A(G)$ 来表示. 从定义可知, 若连通图 G 中含有环和割边, 删去环和收缩割边得到的新图的邻接树图和树图分别与 G 的邻接树图和树图同构. 记号 $G = H$ 表示图 G 与 H 同构. 所以, 若无特殊说明, 在讨论 (邻接) 树图的同构时, 文中出现的图均为无环无割边的图.

树图在计算机科学和电网络设计中有着广泛的应用. Cummins^[3] 讨论了树图的 Hamilton 图. 刘^[4] 讨论了简单连通树图的连通性质. 任韩等^[5] 又揭示了连通图的树图和邻接树图都是上可嵌入的. 本文着重研究树图的同构性以及一些刻画.

定义图 B_n 表示两个节点 n 条重边的图. C_n 表示 n 个节点的圈. P_n 表示 n 个节点的路. 给定两个图 $G(V_1, E_1)$ 以及 $H(V_2, E_2)$, 定义 $G \oplus H$ 表示将 G 中一点 u 与 H 中一点 v 合而为一, 边保持不变所得图. 该图含有 $|V_1| + |V_2| - 1$ 个节点, $|E_1| + |E_2|$ 条边. $G \times H$ 表示图 G 和 H 的乘积图, 定义为: $V(G \times H) = \{(u, v) | u \in V_1, v \in V_2\}$ 且 $E(G \times H) = \{((u_1, v_1), (u_2, v_2)) | (u_1, u_2) \in E_1 \text{ 且 } v_1 = v_2 \text{ 或者 } (v_1, v_2) \in E_2 \text{ 且 } u_1 = u_2\}$.

定理 1 若 G 与 $A(G)$ 同构, 则 G 为 C_n 或 G 为单节点无边图.

证明 按照邻接树图的定义, 邻接树图都是简单图. 所以我们在简单图的范围内来考虑问题. 另一方面, $A(G)$ 中的节点为 G 中的树, 所以图 G 是连通的并且至少存在一棵树, 也即 $m \geq n - 1$, 其中 m 表示图中边的数目, n 表示图中顶点个数. 接下来考虑简单连通图. 根据点边关系分为下面四种情形来讨论.

情形 1 $m < n$, 即 $m = n - 1$. 此时 $A(G)$ 中只有一个节点, 于是在 $A(G)$ 中只有一个节点且无边. 所以若 G 与 $A(G)$ 同构, 图 G 也只能是单节点无边图.

收稿日期: 2007-10-09. 修改稿收到日期: 2008-05-22.

基金项目: 国家自然科学基金 (No. 10771225).

E-mail: * werling@ruc.edu.cn; erlingwei@sina.com

情形 2 $m = n$. 若 G 与 C_n 同构, G 为 n 长圈 C_n , 则 $A(C_n) = C_n$. 若 $G \neq C_n$, 则 G 中一定存在悬挂点. 于是 $|V(A(G))| < n$, 这时 G 不可能与 $A(G)$ 同构.

情形 3 $n < m < 2n$. 设 T 为 G 的任意一棵树, 则 T 为删去 G 中至少两条边 e_1, e_2 得到. $T + e_i (i = 1, 2)$ 为一基本圈. 在该基本圈中设与 e_i 相邻的边分别为 f_{i1}, f_{i2} . 显然 $T + e_i - f_{ij} (i = 1, 2; j = 1, 2)$ 为 G 的树且在 $A(G)$ 中与 T 相连. 这样, $\forall v \in V(A(G)), d(v) \geq 4$. 即 $\delta(A(G)) \geq 4$. 于是, $|E(A(G))| \geq 2|V(A(G))|$. 在这种情形下, G 不可能与 $A(G)$ 同构.

情形 4 $m \geq 2n$. 设 T 为 G 的一棵树, 则 T 为删去 G 中至少 $n+1$ 条边 $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ 得到. $T + e_i (i = 1, 2, \dots, n+1)$ 为基本圈. 在该基本圈中设与 e_i 相邻的边分别为 f_{i1}, f_{i2} . 显然 $T + e_i - f_{ij} (i = 1, 2, \dots, n+1; j = 1, 2)$ 为 G 的树. 这样, $|V(A(G))| \geq 2(n+1) > n$. 所以, G 不可能与 $A(G)$ 同构.

综上所述, 定理得证.

推论 1 若 G 中含一 n 长圈, 则 $A(G)$ 中一定也含一 n 长圈.

推论 2 若 G 与 $T(G)$ 同构, 则 G 为单节点无边图或者 C_3 .

显然, 邻接树图是树图的生成子图. 所以, 当邻接树图中的节点数或边数较图 G 的节点数或边数大时, 树图中的节点数或边数也大于图 G 的节点数或边数, 这时图 G 与其树图不可能同构. 结合定理 1 的后两种情形来看, 若 G 与 $T(G)$ 同构, 只需要考虑 G 为单节点无圈图或者 C_n 的情形. 而 $T(C_n)$ 为 n 阶完全图 K_n , 故得此推论.

再讨论不同图的树图的同构性.

引理 1 若 H 为 G 的子图, 则 $A(H)(T(H))$ 也是 $A(G)(T(G))$ 的子图.

由邻接树图 (树图) 的定义可得.

定理 2 $T(B_2)$ 与 $A(B_2)$ 同构, 且为 P_2 . 除此之外, 不存在图 G 使得 $A(G)$ 或 $T(G)$ 为路.

换句话说, $P_n (n \geq 3)$ 非树图, 也非邻接树图.

证明 首先, 由 $A(C_n) = C_n$ 可知, 若 $A(G)$ (或 $T(G)$) 为路, G 中一定不含长度大于 2 的圈. 接下来考虑非简单图. 因为我们考虑的是不含环及割边的图, 当图 $G = B_n$ 时, $A(B_n) = T(B_n) = K_n$. 所以 $A(B_2) = T(B_2) = P_2$. 当 $G = B_2 \uplus B_2$ 时, 其 (邻接) 树图为 C_n . 再由引理 1, 可得该定理.

实际上, 如果允许图中有环及割边, (邻接) 树图为 P_2 的图可以有无穷多个. 例如任给一棵树, 树的一条边用 B_2 代替; 或者在任一个节点处添加任意个环, 其 (邻接) 树图都是 P_2 . 这些图都具有共同特征, 即去环收缩割边后得图 B_2 .

引理 2 $A(G \uplus H) = A(G) \times A(H)$.

证明 设 $T_1, T_2, \dots, T_m$ 以及 $T^1, T^2, \dots, T^n$ 为 G 和 H 的所有生成树. 则 $G \uplus H$ 的所有生成树为 $T_i \cup T^j$, 其中 $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ 且 T_i 与 T^j 中有一个公共点, 从而连通, 为树. 由邻接树图的定义, $(T_i \cup T^j, T_i \cup T^k) \in E(A(G \uplus H))$ 当且仅当 $(T^j, T^k) \in E(A(H))$, $(T_i \cup T^k, T_j \cup T^k) \in E(A(G \uplus H))$ 当且仅当 $(T_i, T_j) \in E(A(G))$. 当 $i \neq j, k \neq l$ 时, $(T_i \cup T^k, T_j \cup T^l) \notin E(A(G \uplus H))$, 因为这两棵树中至少有两条不同边. 于是, 该推论得证.

特殊地, $A(B_2 \uplus G) = P_2 \times A(G)$, $A(B_n \uplus G) = K_n \times A(G)$.

引理 3 $T(G \uplus H) = T(G) \times T(H)$.

证明 同引理 2. 特殊地, $T(B_2 \uplus G) = P_2 \times T(G)$, $T(B_n \uplus G) = K_n \times T(G)$, $T(C_n \uplus G) = K_n \times T(G)$.

定理 3 若 $A(G)$ 为 C_n , 则 G 为 C_n , $B_2 \uplus B_2$ 或 B_3 .

证明 首先, 图 G 一定为含圈图, 否则 $A(G)$ 为单节点图. 接下来分两种情形来证明该定理.

情形 1 若 G 为简单图. 设 T 为一棵生成树, $T+e$ (e 为非树边) 一定包含圈, 设为 C . $T+e-e_i$ 是 $A(G)$ 中的节点, 其中 e_i 为基本圈 $T+e$ 中的边, 且这些节点构成 $A(G)$ 中的一圈, 设为 TC . 如果图 G 中存在边 $f \neq e$ 使得 $T+f$ 也包含一圈 $C' (\neq C)$. $T+f-f_i$ 也是 $A(G)$ 中的节点, f_i 为基本圈 $T+f$ 中的边, 且这些节点也构成 $A(G)$ 中的一圈, 设为 TC' . 显然, $V(TC) \neq V(TC')$. 即 $A(G) \neq C_n$. 也即边 f 不存在. 另一方面, 图 G 中无割边, 所以图 G 为圈.

情形 2 G 中含重边. 若 G 中包含长度 ≥ 3 的圈 C , 且 C 上某边为重边. 令 $G_1 = C \cup e$, 显然, $A(G_1)$ 中包含两个边不交的圈. 所以, G_1 不可能是 G 的子图. 若 G 中不含长度 ≥ 3 的圈, 则 $G = B_{n_1} \uplus B_{n_2} \uplus \dots \uplus B_{n_m} \uplus C_{p_1} \uplus C_{p_2} \uplus \dots \uplus C_{p_q}$. 已知 $A(B_n) = K_n$, 所以 $A(B_3) = C_3$. 并且若 $A(G)$ 为 C_n , 则 G 中不含 $B_n (n > 3)$, 并且 G 也不包含 $B_3 \uplus B_2$, $B_2 \uplus B_2 \uplus B_2$ 以及 $B_2 \uplus C_n$ 作为子图, 因为 $A(B_3 \uplus B_2) = P_2 \times C_3$, $A(B_2 \uplus B_2 \uplus B_2) = P_2 \times C_4$, $A(B_2 \uplus C_n) = P_2 \times C_n$. 若 $G = B_2 \uplus B_2$, $A(G) = C_4$. 综上所述, 定理得证.

需要指出的是, 图 $B_{n_1} \uplus B_{n_2} \uplus \dots \uplus B_{n_m}$ 实际上是一类图, 并且可能不同构, 但是其 (邻接) 树图同构. 例如 $B_2 \uplus B_2 \uplus B_2$ 存在如图 1 所示的两类图.



图 1 $B_2 \uplus B_2 \uplus B_2$

还需要说明的是, 该定理同定理 2 情形一样, 也未考虑环与割边. 如果允许有环及割边, 满足条件的图也有无穷多. 例如, 从 C_n 或者 $B_2 \uplus B_2$ 的各个节点引出一棵树, 并且每个节点处可添加任意个环; 任意一棵树的一条边用 B_n 来代替. 也即, 给定图 G , 若 $A(G)$ 为 C_n , 去掉 G 中的环边 (如果存在), 收缩其中的割边后, 得到的图一定同构于 C_n , $B_2 \uplus B_2$ 或者 B_3 .

推论 3 若 $T(G)$ 为 C_n , 则 G 为 C_3 , B_3 或 $B_2 \uplus B_2$.

证明 因为 $A(G)$ 是 $T(G)$ 的子图, 再加上定理 3 的证明, $A(G)$ 的点、边数一定大于等于 G 中的点、边数. 所以只需验证定理 3 中的图是否满足该推论即可. 事实上, $T(C_n) = K_n$. 该推论得证.

定理 4 若 $A(G) = K_n (n \geq 3)$, 则 $G = C_3$ 或 B_n .

证明 1) 图 G 中一定不含长度大于等于 4 的圈. 否则设 $C = \{e_1 e_2 e_3 e_4\}$ 为 G 中一圈, G 中一定存在包含边 e_2, e_3, e_4 的树 T , 同时也可构造包含边 e_1, e_2, e_4 的树 T' . 在 $A(G)$ 中, T 与 T' 不相邻.

2) 若 G 中包含 C_3 . 显然, $A(C_3) = C_3 = K_3$. 若 $C_3 = \{e_1 e_2 e_3\}$ 上某边为重边, 不妨设 e_4 为 e_1 的重边, 得包含边 $e_1 e_3$ 的树 T 以及包含边 $e_2 e_4$ 的树 T' , 而 T 与 T' 在 $A(G)$ 中不相邻. 若 G 为 $C_3 \uplus G_1$, G_1 中至少存在两个不同树 T_1, T_2 , 则存在 G 中的树 $T_1 \cup \{e_1, e_2\}$ 以及 $T_2 \cup \{e_2 e_3\}$, 其在 $A(G)$ 中不相邻. 也即, 若 $A(G) = K_n$, G 或为 C_3 或者不以 C_3 为真子图.

3) 图 G 中如果只含 2 长圈. 显然, $A(B_n) = K_n$. 而 $A(B_n \uplus B_n)$ 中有不相邻的点.

综上所述, 定理成立.

与定理 2, 定理 3 一样, 该结果也是在去掉环, 收缩割边意义下同构于 C_3 或者 B_n .

推论 4 若 $T(G)$ 为 $K_n (n \geq 3)$, 则 $G = B_n$ 或 C_n .

证明 图 G 中一定不含边不交的圈. 否则设 C_1, C_2 为图 G 中两个边不交的圈. 在圈 C_1, C_2 中分别去掉两条不同边, 得树 T_1, T_2 以及 T_3, T_4 . 图 G 中包含 T_1, T_4 以及 T_2, T_3 的树在树图中不相邻.

若图不含边不交的圈, 则图 G 一定存在一子图, 该子图同构于图 G_1 , G_1 为一个圈 C (长度 ≥ 3) 再加一条直径. 参考图 2 分两种情形分析. 左图中, 包含粗线表示的边 (P_1, P_2, e) 的树以及包含细线和直径 (P_3, P_2, f) 的树在树图中不相邻. 右图中, 包含粗线边 (P_1, P_2) 以及细线边 (P_3, e) 的树在树图中不相邻. 若图 G 中不含长度大于等于 3 的圈, 由推论 3 及定理 4 的证明, 知只有 B_n 满足 $T(B_n) = K_n$. 得该推论.

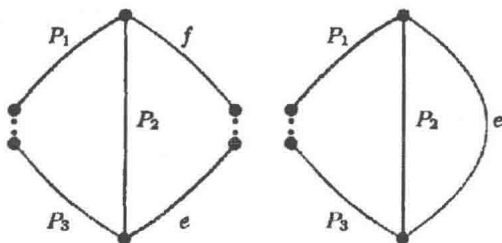


图 2 G_1

与上述定理及推理一样, 该推论以及推理 3 也是在去掉环边收缩割边的意义下成立.

从上面的分析可知, 存在两个不同构的图, 其 (邻接) 树图同构. 例如 $C_3 \uplus B_2$ 和 $B_2 \uplus B_3$, 其树图都是 $C_3 \times P_2$. 又例如图 1 所示的两个图. 但是同构的图中都有非简单图. 由引理 2 及引理 3 可知, 对于不含割边且不同构的简单图 G, H , 其 (邻接) 树图可能是同构的 (当 G 或 H 不对称时, 可得 (邻接) 树图不同构的若干图).

从上文的讨论可知, 当 (邻接) 树图为 C_n, K_n 时, 原图若限制为无环无割边的简单图, 则原图是唯一确定的. (邻接) 树图不保持二部性. 即当 G 非二部图时, 树图 $T(G)$ 也非二部图. 若 G 是二部图, $A(G)(T(G))$ 不一定仍是二部图. 反之, 若 $A(G)$ 为二部图, 则 G 一定是二部图.

接下来讨论 (邻接) 树图的平面性. 图 G 上的一个细分指的是这样一个运算, 将 $G(V, E)$ 点集变为 $V \cup \{w\}$, 边集变为 $(E \setminus \{(u, v)\}) \cup \{(u, w), (w, v)\}$. 如果一个图可以从另一个图经过一系列细分得到, 则称它们同胚. 著名的 Kuratowski 定理刻画了平面图图的充要条件.

定理 5^[6] 图 G 是平面图当且仅当 G 无同胚于 $K_{3,3}$ 或 K_5 的子图.

引理 4 若 H 与 G 的某一子图同胚, 则 $A(H)$ 与 $A(G)$ 的某子图同胚.

证明 设 H 经一次细分得到图 H' , 即 H 中边 (u, v) 被路 (u, w, v) 代替后得图 H' . H' 所有生成树分为两类: $T^1 = \{T | (u, v) \notin E(T)\}$ 以及 $T^2 = \{T | (u, v) \in E(T)\}$. 将 H' 的生成树相应地分为三类: $T^{11} = \{T | (u, w) \in E(T), \text{但是 } (w, v) \notin E(T)\}$, $T^{12} = \{T | (u, w) \notin E(T), \text{但是 } (w, v) \in E(T)\}$ 以及 $T^{2'} = \{T | (u, w), (w, v) \in E(T)\}$. 实际上, T^{11}, T^{12} 中的树为 T^1 中的树分别添加边 (u, w) 和 (w, v) 所得, $T^{2'}$ 中的树为 T^2 中树将边 (u, v) 替换为 $(u, w), (w, v)$ 所得. 于是, 可以建立一一对应 $f: T^1 \rightarrow T^{11}, g: T^1 \rightarrow T^{12}, h: T^2 \rightarrow T^{2'}$. 在邻接树图 $A(H)$ 中, 若 $T_1, T_2 \in T^2$

且 $(T_1, T_2) \in E(A(H))$, 那么 $(h(T_1), h(T_2)) \in E(A(H'))$, 其中 $h(T_1), h(T_2) \in T^{2'}$. 若存在树 $T_1, T_2 \in T^1$ 且 $(T_1, T_2) \in E(A(H))$, 那么 $(f(T_1), f(T_2)) \in E(A(H'))$, $(g(T_1), g(T_2)) \in E(A(H'))$, 其中 $f(T_1), f(T_2) \in T^{11}$, $g(T_1), g(T_2) \in T^{12}$. 若存在树 $T_1 \in T^1, T_2 \in T^2$ 且 $(T_1, T_2) \in E(A(H))$, 由邻接树图的定义, T_1 一定包含一条不属于 T_2 但是或者与点 u 或者与点 v 关联的边. 若 T_1 中包含与 u 关联的边, 那么 $(f(T_1), h(T_2)) \in E(A(H'))$. 若 T_1 中包含与 v 关联的边, 那么 $(g(T_1), h(T_2)) \in E(A(H'))$. 可见, $A(H')$ 中包含与 $A(H)$ 同胚的子图. 该引理得证.

实际上, 设 H 经一次细分得图 H' . 引理 4 中的边再并上集合 $E_0 = \{(f(T), g(T)) | T \in T^1\}$ 为 H' 的所有边.

推论 5 若 H 与 G 的某一子图同胚, 则 $T(H)$ 与 $T(G)$ 的某子图同胚.

证明同引理 4.

定理 6 给定图 G ,

(1) 若 $A(G)$ 为平面图, 则 G 同构于 $B_n (n \leq 4)$, $B_2 \cup B_n (n = 2, 3)$, $B_2 \cup B_2 \cup B_2$, $C_n \cup B_2$, C_n 或者 $C_n + e$, 这里 $C_n + e$ 表示 e 为 C_n 上的一条重边的图.

(2) 若 $T(G)$ 为平面图, 则 G 同构于 $B_n (n \leq 4)$, $B_2 \cup B_n (n = 2, 3)$, $B_2 \cup B_2 \cup B_2$, $C_3 \cup B_2$, $C_n (n \leq 4)$ 或者 $C_3 + e$.

证明 按照图中所含圈的数目分情形来证. 若图 G 只含一个圈, 则图 $G = C_n$. 由邻接树图定义, $A(C_n) = C_n$ 为平面图. 即 n 长圈 C_n 的邻接树图为平面图. 而 $T(C_n) = K_n$, 当 $n \geq 5$ 时 $T(C_n)$ 为非平面图. 即图 H 的邻接树图为非平面图. 从而 H 的树图也是非平面的. 所以, 当 $n \leq 4$ 时, $A(C_n)$ 以及 $T(C_n)$ 均为平面图. 下证图 G 至少包含两圈的情形.

情形 1 若 G 的圈边全不交且圈长都 ≥ 3 . 图的连通性可知, G 中必存在两个圈 C^1, C^2 , 长分别设为 m, n 且 $C^1 \cap C^2 = \{v\}$. 设该子图为 H . 由引理 2, $A(H) = C_m \times C_n$, 非平面图, 其树图自然也是非平面的.

情形 2 若图中存在含有相同边且圈长都 ≥ 3 的两个圈 C^1, C^2 , 最简情形为 $C^1 \cap C^2 = \{e\}$. 设这两个圈分别标号为 $(e, 1, 2, \dots, n)$ 以及 $(e, a, b, \dots, w, x)$. 记该图为 H . 则 $A(H)$ 包含同胚于 $K_{3,3}$ 的子图. 由定理 5 知 $A(G)$ 非平面图, 自然 $T(G)$ 也是非平面的. 同胚于 $K_{3,3} = (V_1, V_2, E)$ 的子图见表 1.

	$e1$	$a2$	eb
$e2$	$(e2, e1)$	$(e2, a2)$	$(e2, e3, \dots, en, ex, ew, \dots, ec, eb)$
ea	$(ea, e1)$	$(ea, na, n-1a, \dots, 3a, a2)$	(ea, eb)
$a1$	$(a1, e1)$	$(a1, a2)$	$(a1, 1b, eb)$

表 1

在表 1 中, $1e$ 表示 H 中去掉边 e 和 1 后所得树, 余同. 第一行表示 $K_{3,3}$ 中的点集 V_1 , 第一列表示 $K_{3,3}$ 中的点集 V_2 , (i, j) 元 $(i, j \geq 2)$ 表示一条边或路, 边或路的端点为 $(i, 1)$ 元与 $(1, j)$ 元.

情形 3 C_n 上某边为二重边 (设 a, b 为重边, 圈为 $(a, 1, 2, \dots, n-1)$). 其邻接树图为图 3 所示的图 H (共有 $2(n-1)$ 个三度点), 该图是平面图. 由推论 4 及引理 4, 当 $n \geq 5$ 时, 其树图非平面. 当 $n = 4$ 时, 其树图中也存在同胚于 $K_{3,3}$ 的子图 (如表 2 所示, 各元素含义同表 1), 故其树图非平面. 当 $n = 3$ 时, 其树图为轮图 W_4 , 是平面图.

	a1	ab	b2
a2	(a2, a1)	(a2, ab)	(a2, b2)
b1	(b1, a1)	(b1, ab)	(b1, b2)
a3	(a3, a1)	(a3, ab)	(a3, b3, b2)

表 2

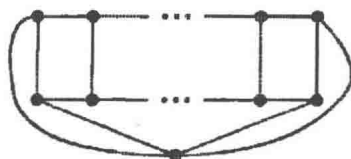


图 3 H

情形 4 图 G 中存在子图 H . H 同构于 C_n 上某边为三重边 (设 a, b, c 为重边, 圈为 $(a, 1, 2, \dots, n-1)$). 其邻接树图为非平面图, 与 $K_{3,3}$ 同胚的子图见表 3 (各元素含义同表 1) 所示, 其树图自然也是非平面的.

	abc	bcl	acn
abl	(abl, abc)	(abl, bcl)	(abl, ab2, \dots, abn, acn)
acl	(acl, abc)	(acl, bcl)	(acl, ac2, \dots, acn)
bcn	(bcn, abc)	(bcn, bcl)	(bcn, acn)

表 3

情形 5 G 为 $C_n \cup B_2$. 其邻接树图为梯形图 $P_2 \times C_n$, 是平面图. 由推论 4, 当 $n \geq 5$ 时, 其树图非平面. 当 $n = 4$ 时, 其树图为 $K_4 \times P_2$, 非平面. 当 $n = 3$ 时, 其树图为梯形图 $C_3 \times P_2$, 是平面图.

情形 6 若 G 包含子图 $C_n \cup B_3$, 其邻接树图为 $C_3 \times C_n$, 是非平面的.

情形 7 图 G 具有形式 $B_{n_1} \cup B_{n_2} \cup \dots \cup B_{n_m}$. 已知 $A(B_3 \cup B_3)$ 为 $C_3 \times C_3$, 非平面图. $A(B_2 \cup B_n)$ 为 $P_2 \times K_n$, 故当 $n \geq 4$ 时, 非平面图. 当 $n = 2, 3$ 时, 其邻接树图和树图分别为 C_4 及 $P_2 \times C_3$, 都是平面图. $A(B_n) = K_n$, 故当 $n \geq 5$ 时, 非平面的; 当 $n = 2, 3, 4$ 时, 邻接树图和树图均为平面的. $A(B_2 \cup B_2 \cup B_2) = T(B_2 \cup B_2 \cup B_2) = P_2 \times C_4$, 可见 $B_2 \cup B_2 \cup B_2$ 的邻接树图和树图都是平面图, $A(B_2 \cup B_2 \cup B_3) = C_4 \times C_3$, 非平面的. 自然其树图也是非平面的.

综合上述所有情形可知该定理成立.

并且再次指出, 本定理也是去掉环边以及收缩割边的意义下成立.

从上述定理 6 可以看出, 对简单图类来说, 只有 C_n 的邻接树图是平面图, 其余所有简单图 (无环无割边) 的邻接树图都是非平面. 关于树图, 只有 C_3 和 C_4 的树图是平面图, 其余所有简单图 (无环无割边) 的树图都是非平面的.

参考文献

- [1] 刘彦佩. 图的可嵌入性理论, 科学出版社, 北京, 1994.
- [2] Bondy, J.A., Murty U.S.R., Graph Theory With Applications, London: Macmillan, 1976.
- [3] Cummins, R.L., Hamilton circuits in tree graphs, *IEEE Trans., circuit theory*, 1966, 13: 82-96.
- [4] Liu G., The connectivities of adjacent tree graphs, *Acta. Math. Appl. Sinica*, 1984, 3: 313-317.

- [5] 黄坤阳, 任韩, 连通图的(邻接)树图的上可嵌入性, 泉州师范学院学报, 2005, 23: 6-10.
[6] Kuratowski, C., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.*, 1930, 15: 271-283.

The Isomorphism and Planarity of (adjacent) Tree Graph

WEI Erling¹, LIU Yanpei

(1. School of Information, Renmin Univeristy of China, Beijing, 100872, P. R. China; 2. School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing, 100044, P. R. China)

Abstract: The (adjacent) tree graph is a kind of useful graphs. In this paper, it is characterized whose (adjacent) tree graph is P_n , C_n or K_n . And the planarity of (adjacent) tree graphs is discussed.

Key Words: tree graph; adjacent tree graph; isomorphic; planarity

一类图的亏格

邵泽玲^{①*}, 刘彦佩^②^① 河北工业大学数学系, 天津 300401^② 北京交通大学数学系, 北京 100044

E-mail: zelingshao@tom.com

收稿日期: 2008-01-11; 接受日期: 2009-01-16; *通信作者

国家自然科学基金(批准号: 10571013)资助项目

摘要 在刘提出的联树模型的基础上, 更广泛未必具有对称性的图类的亏格问题可以得到解决. 本文中, 我们得到了一类具有比较弱对称性的新图类的亏格. 作为推论亦得到了完全三部图 $K_{n,n,l}$ ($l \geq n \geq 2$) 的亏格. 此处所用方法比已知用来计算图的亏格问题的方法, 如电流图等, 更直接且可用线性时间算法实现.

关键词 曲面 联树 嵌入 亏格

MSC(2000) 主题分类 05C10

1 引言

确定图的亏格问题是拓扑图论的基本问题, 且已被 Thomassen^[1] 证明是 NP-困难的. 然而, 目前已知结果主要是关于特定的对称性比较好的图类, 参看 [2-6]. 证明的方法主要是利用商嵌入以电压图 (或对偶地, 电流图) 的形式来构造最小亏格嵌入. 2003 年, 刘彦佩^[7] 提出了图的嵌入联树模型 ([8] 体现了这种思想), 建立了图的联树和嵌入之间的一一对应关系. 从而图的嵌入可用其联树, 进而其关联曲面来表示. 在联树模型的基础上, 更广泛的未必具有对称性图类的亏格问题便于得到解决. 本文得到了一类新的具有比较弱对称性的图类的亏格. 作为推论, 完全三部图 $K_{n,n,l}$ ($l \geq n \geq 2$) 的亏格亦得到. 此处所用方法比已知用来计算图的亏格问题的方法, 如电流图等, 更直接且可用线性时间算法实现.

本文所考虑的图皆连通图. 曲面 S 是指无边界的 2-维紧流形, 且可看作平面上的一个偶数条边的正多边形, 每边分配一方向且两两成对, 将同一对边依同方向粘合为一所得到的. 进而, 可定向曲面可用满足下面条件的表示正多边形的字母循环序 P 来表示:

条件 1 若 $a \in P$, 则 $a^- \in P$.

条件 2 若 $a \in P$, 则 a 和 a^- 在 P 上恰出现一次.

设 $o(S)$ 为曲面 S 的亏格, S 为曲面集, 且 $o_{\min}(S) = \min_{S \in S} o(S)$. 所谓曲面集 S 上的初等变换^[9], 即指如下三种运算:

El.0 $\forall S \in S, S = Aaa^-B, A \neq 0$ 且 $B \neq 0 \iff S = AB$.

引用格式: 邵泽玲, 刘彦佩. 一类图的亏格. 中国科学 A. 2009, 39(9): 1055-1064
Shao Z L, Liu Y P. The genus of a type of graph. Sci China Ser A, 2009, 52. DOI: 10.1007/s11425-009-0078-7

El.1 $\forall S \in \mathcal{S}, S = AabBb^-a^-C \iff S = AaBa^-C.$

El.2 $\forall S \in \mathcal{S}, S = AaBCa^-D \iff S = BaADa^-C.$

如果两个曲面 S_1 和 S_2 可以通过一系列初等变换从一个得到另一个, 我们称 S_1 和 S_2 是等价的^[9], 用 $S_1 \sim S_2$ 表示. 注意 S_1 和 S_2 具有相同的可定向性及亏格.

引理 1.1^[9] $AaBbCa^-Db^-E \sim ADCBEaba^-b^-$, 其中 $a, b, a^-, b^- \notin ABCDE$.

引理 1.2^[7] 设 S_1 和 S_2 为曲面且 $a, b \notin S_2$, 若 $S_1 \sim S_2aba^-b^-$, 则 $o(S_1) = o(S_2) + 1$.

图 G 在曲面 S 上的嵌入 (早期文献中称胞腔嵌入) 是指存在一个 1-1 连续映射 $\tau: G \rightarrow S$, 使得 $S - \tau(G)$ 的每一个连通分支皆拓扑等价于一开圆盘. 若曲面 S 是可定向的, 则称嵌入为可定向的. 两个嵌入 $\tau_1: G \rightarrow S$ 和 $\tau_2: G \rightarrow S$ 称为相同的, 若存在一同胚 $h: S \rightarrow S$ 使得 $h\tau_2 = \tau_1$; 否则, 不同. 图 G 所能嵌入可定向曲面的最小亏格, 称为 G 的最小亏格或亏格, 以 $\gamma(G)$ 示之.

定理 1.3^[2,5] $\gamma(K_{m,n}) = \lceil \frac{(m-2)(n-2)}{4} \rceil, m, n \geq 2$.

为计算图的最小亏格, 下面引进图的联树模型.

给定图 $G = (V, E)$ 的支撑树 T , 把每条余树边 (u_i, v_i) 劈分为两条半边 $(u_i, \bar{u}_i)$ 和 $(v_i, \bar{v}_i)$, 其中 $1 \leq i \leq \beta$ (β 为 Betti 数), 从而构成 G 上的一新树 $\hat{T} = (V + V_1, E(T) + E_1)$; 其中 $E_1 = \{(u_i, \bar{u}_i), (v_i, \bar{v}_i) | 1 \leq i \leq \beta\}$ 且 $V_1 = \{\bar{u}_i, \bar{v}_i | 1 \leq i \leq \beta\}$. 令 $\sigma = \{\sigma_v | v \in V\}$ 为图 G 的旋, 其中 σ_v 表示与节点 v 关联的边的循序. 则 $\hat{T}_\sigma$ 决定了 $\hat{T}$ 在平面上的一个嵌入.

用带有不同指标 $+$ (常略之) 或 $-$ 的字母 a_i 来标注半边 $(u_i, \bar{u}_i)$ 和 $(v_i, \bar{v}_i)$, 其中 $1 \leq i \leq \beta$. 给定图 G 的旋, 把树 $\hat{T}$ 的半边标注带指标的字母得到的图称为 G 的一个联树^[7], 记作 $\hat{T}_\sigma^+$.

在 $\hat{T}_\sigma^+$ 上, 依照给定方向 (顺时针或逆时针) 记录标注半边的带指标的所有字母 a_j 或 a_j^- , 其中 $j \in \{1, 2, \dots, \beta\}$ 且 $1 \leq j \leq \beta$, 所得到的是由 2β 个字母形成的循序, 它表示曲面, 故称为图 G 的关联曲面^[10]. 两个关联曲面若具有相同的循序及指标, 则称为相同的. 否则, 不同. 从而图在曲面上的嵌入可用其关联曲面来表示. 依赖图 G 的旋所得关联曲面的集合不依赖于支撑树的选择.

定理 1.4^[5] 给定图 G 的一支撑树, 则 G 的嵌入与关联曲面之间存在一一对应关系.

为了得到最小亏格的关联曲面, 则把关联曲面进行逐层分段, 从而在层分割上建立一种运算, 可把一个曲面变换到另一个曲面, 直至最小亏格的关联曲面. 为描述方便, 首先设 v^0 是图 G 的支撑树 T 的节点且满足 $d_T(v^0) > 1$. 对 T 的任意节点 u , u 和 v^0 由唯一的路连接. 对图 G 的关联曲面 S 进行逐层分段. 第 0 层只含一个层段, 即 S , 用 S_{v^0} 示之. 假设 $N(v^0) = \{v_1^1, v_2^1, \dots, v_{l_1}^1\}$, 然后分割 S_{v^0} 成 l_1 部分便得第 1 层, 即 $S_{v^0} = \langle S_{v_1^1} S_{v_2^1} \cdots S_{v_{l_1}^1} \rangle$, 其中 $S_{v_j^1}$ ($1 \leq j \leq l_1$) 被称为关关节点 v^0 的层段. 第 $k-1$ 层表示为 $\langle S_{v_1^{k-1}} S_{v_2^{k-1}} \cdots S_{v_{l_{k-1}}^{k-1}} \rangle$. 对于 $S_{v_j^{k-1}}$, 令

$$N(v_j^{k-1}) \cap \{u \mid d(u, v^0) = k, u \in T\} = \{v_{t_{j-1}+1}^k, v_{t_{j-1}+2}^k, \dots, v_{t_j}^k\},$$

其中 $t_0 = 0, t_k = l_k$. 则 $S_{v_j^{k-1}} = \langle S_{v_{t_{j-1}+1}^k} S_{v_{t_{j-1}+2}^k} \cdots S_{v_{t_j}^k} \rangle$, 其中 $S_{v_{t_{j-1}+m}^k}$ ($1 \leq m \leq t_j - t_{j-1}$) 被称为关关节点 v_j^{k-1} 的层段. 进而, 分割第 $k-1$ 层即得第 k 层为

$$\langle S_{v_1^k} S_{v_2^k} \cdots S_{v_{t_1}^k} S_{v_{t_1+1}^k} S_{v_{t_1+2}^k} \cdots S_{v_{t_2}^k} \cdots S_{v_{t_{(j-1)}^k}+1}^k \cdots S_{v_{t_j}^k} \cdots S_{v_{t_{(l_{k-1})}^k}+1}^k S_{v_{t_{(l_{k-1})}^k}+2}^k \cdots S_{v_{l_k}^k} \rangle.$$

每一层段皆可分为其它层段直至层段 S_{v_x} 为止, 其中 v_x 是 T 的满足 $d_T(v_x) = 1$ 的节点且 S_{v_x} 由标注与 v_x 关联的半边的字母组成, 且此处每一字母亦称关联节点 v_x 的层段. 依照给定图 G 的旋, 与同一节点关联的任两个层段皆可交换其前后位置, 使得每次交换都可使一关联曲面变换到另一关联曲面. 则在层分割上的这种运算被称为调位^[10], 以 $S \rightarrow S'$ 示之. 因此对任意关联曲面作一系列调位运算可得具有最小亏格的关联曲面.

注 用符号 $\langle \rangle$ 来标注层段, 只表示内部层段可交换前后位置, 并不会改变关联曲面本身. 当层段中只含一个字母时, $\langle \rangle$ 通常省略.

为了更加明晰联树等定义, 参看示例完全三部图 $K_{2,2,4}$, 其支撑树在图 1(a) 中用黑线表示, 其联树见图 1(b). 用 b_j^{i-1} 标注余树边 $u_i v_j$, 用 a_{j+1}^k 标注 $w_k v_j$, 用 a_1^k 标注 $w_k u_2$, 其中 $i, j = 1, 2$ 且 $k = 1, 2, 3$. 则其关联曲面可表示为

$$S = a_3^1 a_3^2 a_3^3 b_2^{0-} b_2^{1-} a_2^1 a_2^2 a_2^3 b_1^{0-} b_1^{1-} a_1^1 a_1^2 a_1^3 b_1^0 b_1^1 b_1^2 a_1^{1-} a_2^{1-} a_3^{1-} a_1^{2-} a_2^{2-} a_3^{2-} a_1^{3-} a_2^{3-} a_3^{3-}.$$

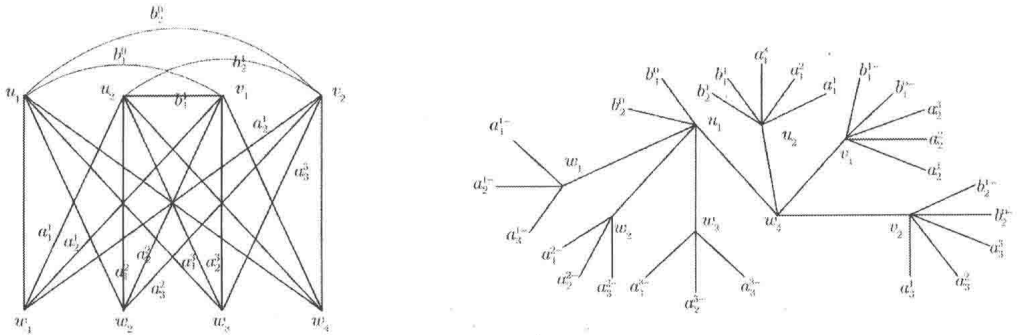


图 1 $K_{2,2,4}$ (a) 及其一联树 (b)

设 $S = \langle S_{u_1} \rangle$. 则

$$S = \langle S_{u_1} \rangle = \langle S_{w_4} b_1^0 b_2^0 S_{w_1} S_{w_2} S_{w_3} \rangle = \langle \langle S_{v_2} S_{v_1} S_{u_2} \rangle b_1^0 b_2^0 S_{w_1} S_{w_2} S_{w_3} \rangle.$$

其中 $S_{v_2} = \langle a_3^1 a_3^2 a_3^3 b_2^{0-} b_2^{1-} \rangle$, $S_{v_1} = \langle a_2^1 a_2^2 a_2^3 b_1^{0-} b_1^{1-} \rangle$, $S_{u_2} = \langle a_1^1 a_1^2 a_1^3 b_1^0 b_1^1 b_1^2 \rangle$, $S_{w_3} = \langle a_1^{1-} a_2^{1-} a_3^{1-} \rangle$ 且 $i = 1, 2, 3$. 显然, 给一定联树, $K_{2,2,4}$ 的关联曲面亦可表示为

$$S = \langle \langle \langle a_3^1 a_3^2 a_3^3 b_2^{0-} b_2^{1-} \rangle \langle a_2^1 a_2^2 a_2^3 b_1^{0-} b_1^{1-} \rangle \langle a_1^1 a_1^2 a_1^3 b_1^0 b_1^1 b_1^2 \rangle \rangle b_1^0 b_2^0 \langle a_1^{1-} a_2^{1-} a_3^{1-} \rangle \langle a_1^{2-} a_2^{2-} a_3^{2-} \rangle \langle a_1^{3-} a_2^{3-} a_3^{3-} \rangle \rangle.$$

经过一系列调位运算后,

$$S \rightarrow S' = \langle b_1^{0-} a_2^3 a_2^2 a_2^1 b_1^{1-} \rangle \langle b_1^1 a_1^1 a_1^2 a_1^3 b_1^2 \rangle \langle b_2^{1-} a_3^3 a_3^2 a_3^1 b_2^{0-} \rangle b_2^0 \langle a_3^{1-} a_1^{1-} a_2^{1-} \rangle \langle a_2^{2-} a_1^{2-} a_3^{2-} \rangle \langle a_3^{3-} a_1^{3-} a_2^{3-} \rangle b_1^0,$$

即具有最小亏格的关联曲面.