青年自学丛书

数　学

上海人民出版社

青年自学丛书

数　学

（下　册）

上海师范大学数学系　编

上 海 人 民 出 版 社

青年自学丛书
数　学
（下册）
上海师范大学数学系　编
上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）
福建人民出版社重印
福建省新华书店发行　邵武县印刷厂印刷
开本787×1092 1/32 印张9.75 字数212,000
1975年11月第1版 1977年12月福建第1次印刷
统一书号：13171·156　定价：0.52元

毛主席语录

马克思主义包含有自然科学，大家要来研究自然科学，否则世界上就有许多不懂的东西，那就不算一个最好的革命者。

马克思主义的哲学认为十分重要的问题，不在于懂得了客观世界的规律性，因而能够解释世界，而在于拿了这种对于客观规律性的认识去能动地改造世界。

农村是一个广阔的天地，在那里是可以大有作为的。

《青年自学丛书》编辑说明

伟大领袖和导师毛主席教导我们：“**知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。**”广大知识青年，响应毛主席的号召，奔赴农村，奔赴祖国的边疆，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对普及大寨县，建设社会主义新农村作出了贡献，一代革命青年正在茁壮成长。

在英明领袖华主席的领导下，我国广大青年，继承毛主席遗志，高举毛主席的伟大旗帜，坚持党在社会主义历史阶段的基本路线，抓纲治国，继续革命，为建设社会主义的现代化强国而奋斗。按照毛主席关于“**要关怀青年一代的成长**”的教导，为了适应广大上山下乡知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、文学、自然科学的一些基本知识。我们希望，这套丛书的出版，能对知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高政治觉悟和科学文化水平，在又红又专的道路上阔步前进。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出批评和建议，以便改进。

上海人民出版社

目　录

第七章　抛物线、二次函数和一元二次方程

第一节　抛　物　线

一、什么是抛物线

恩格斯指出：**"数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。"**物体抛射出去后在空中运动的轨迹，使我们得到抛物线的概念．在不考虑空气阻力的情况下，炮弹的弹道曲线；菜农浇水时从水管里喷射出来的水流；打篮球时球在空中的运动轨迹等等，都是抛物线的一段．下面我们以飞机空投物资问题为例，来引进抛物线的方程．

为支援抗洪斗争，我人民解放军空军某部奉命把抗洪物资空投到某村庄．假设投掷物品时，飞机的高度为 h，飞行沿着水平方向，速度是 v．那么飞机应该在和村庄的水平距离多远的地方将物品掷下(空气阻力略去不计)？

我们以投掷时飞机所在的位置为坐标原点，过原点的水平线为 x 轴，以飞机飞行的方向为 x 轴的正向；过原点的铅垂线为 y 轴，以向下方向为正(图 7-1)．设经过时间 t 后，掷下物品到达位置 $P(x, y)$．

我们知道，掷下的物品在空中运动所经的路线，是由两方面的因素决定的．当物品离开飞机时，一方面由于惯性的作

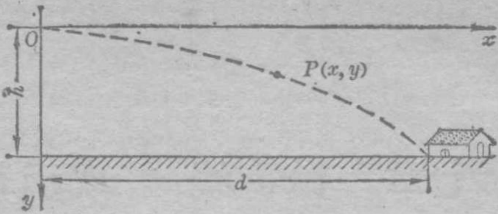


图 7-1

用，飞机给它一个水平速度，使它沿着飞机飞行的方向作等速运动，它的速度就是飞机的速度 v. 因此在时刻 t，空投物品在水平方向移动的距离是

$$x=vt. \tag{1}$$

另一方面，由于重力的作用，使空投物品向下作等加速运动. 在时刻 t，物品落下的距离 y，由力学原理知道，应该是

$$y=\frac{1}{2}gt^2, \tag{2}$$

其中 g 是重力加速度.

(1)和(2)式就是描写空投物品运动过程的方程. 当时刻 t 取某一确定值时，由(1)和(2)式可以算出空投物品 P 在这一时刻的位置的坐标 x 和 y. 随着时刻 t 的不断变化，点 P 的位置就相应地连续变动. 这样，动点 $P(x, y)$ 就描绘出空投物品的运动轨迹.

现在我们来消去变量 t，得到 x 和 y 的直接关系式. 由(1)式得

$$t=\frac{x}{v},$$

代入(2)式，得

$$y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2,$$

即

$$x^2=2\frac{v^2}{g}y. \tag{3}$$

(3)式就是在任一时刻，点 P 的坐标 x 和 y 所要满足的运动轨迹方程，其中 v，g 是常数.

设投掷物品时，飞机和村庄的水平距离为 d. 为了准确地把物品投送到村子里，村庄的坐标 (d, h) 就应该适合于(3)式:

$$d^2=\frac{2v^2}{g}h.$$

这就是说，飞行员应该当飞机和村庄的水平距离为

$$d=v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

时投下物品.

在数学里，我们一般地把(3)式这种类型的方程，写成形如

$$x^2=\pm 2py$$

或

$$y^2=\pm 2px \quad (p>0)$$

的形式. 这些方程的特征是：只含有一个变数的二次项和另一个变数的一次项. 它们所确定的曲线叫做抛物线. 而这些方程叫做抛物线的标准方程.

练习

在上例中，如果飞机在投掷物品时的飞行高度 $h=490$ 米，飞机沿水平方向飞行的速度 $v=150$ 米/秒，求在图 7-1 的坐标系中，被投掷物品的轨道曲线方程. 为使物品准确地投入村庄，飞机应在和村庄的水平距离多远的地方将物品投下(重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2，空气阻力略去不计).

$\left[x^2=\frac{225000}{49}y\text{, 1500米.}\right]$

二、抛物线的形状

我们虽然已经知道抛物线的大体形状，但认识还有待于深化．上述飞机投掷物品的轨道曲线，只是抛物线的一段．要比较全面地掌握某种曲线的几何性质，一个重要的方法是根据曲线的方程来探讨．下面我们以方程

$$x^2=2py \tag{1}$$

为例，对抛物线的形状作进一步的讨论．

1．在方程(1)中，以$(-x)$代替x，方程不变．这就是说，如果点(x, y)是抛物线(1)上的一点，那么点$(-x, y)$也在这抛物线上．所以这抛物线是轴对称图形，它的对称轴就是y轴．我们说，这抛物线关于y轴对称（图7-2）．

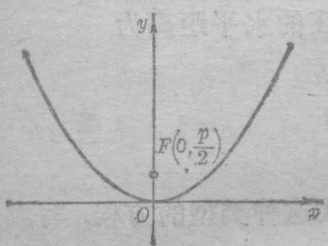


图 7-2

2．抛物线和它的对称轴的交点，叫做抛物线的顶点．抛物线(1)的对称轴（即y轴）的方程是$x=0$．那么，顶点的坐标，就是抛物线方程(1)和它的对称轴的方程$x=0$所组成的方程组的解．我们把$x=0$代入(1)式，得$y=0$．即抛物线(1)以坐标原点为顶点．

3．在方程(1)中，左边

$$x^2\geqslant 0,$$

因而右边也应满足

$$2py\geqslant 0.$$

因为常数p是正数，所以必有$y\geqslant 0$．由此可知，整个抛物线(1)都在$y\geqslant 0$的半平面内（即x轴的上方）．

4．对于$y\geqslant 0$的任一值，可得

$$x=\pm\sqrt{2py}.$$

从上式知道，当 y 的值增大时，x 的绝对值也随着增大．因此，抛物线(1)向左上方和右上方无限伸展，形成一条向上开口的曲线．

5．y 轴上的点 $F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$ 叫做抛物线的焦点．方程(1)中的常数 p，确定了焦点 F 的纵坐标，因此我们把 p 叫做焦点参数．

【例1】 画抛物线 $x^2=3y$，并求它的焦点坐标．

解：根据对抛物线 $x^2=2py$ 的讨论可知，抛物线 $x^2=3y$ 的顶点在原点，对称轴是 y 轴，抛物线在 x 轴的上方，向上开口．用描点法可以把它的图象画出来．将原方程变为

$$y=\frac{x^2}{3},$$

可作出下面的数值表：

x	0	±1	±2	±3	±4	…
y	0	$\frac{1}{3}$	$1\frac{1}{3}$	3	$5\frac{1}{3}$	…

根据上表数据，在直角坐标系内描点，并用平滑的曲线按从左到右的顺序连接各点，便得到图 7-3 所示的抛物线．

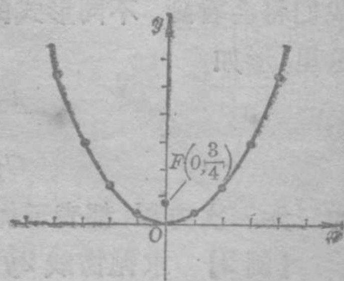


图 7-3

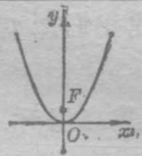
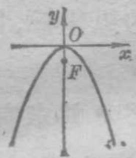
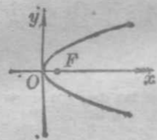
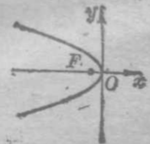
因为 $2p=3$，$\frac{p}{2}=\frac{3}{4}$，所以焦点的坐标是 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$．

上面只讨论了抛物线 $x^2=2py$ 的形状，它的顶点在原点，焦点在

y 轴的正半轴上，曲线是向上开口的．方程

$$x^2=-2py,\quad y^2=2px,\quad y^2=-2px$$

所确定的曲线，也都是以坐标原点为顶点的抛物线，只是它们在坐标系中的相对位置不同，开口方向也不同．现在把抛物线的四种标准方程和它们的图形列表如下(其中 $p>0$)：

图　形				
方　程	$x^2=2py$	$x^2=-2py$	$y^2=2px$	$y^2=-2px$
焦　点	$F\left(0,\ \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0,\ -\frac{p}{2}\right)$	$F\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2},\ 0\right)$

上面这类方程，例如

$$x^2=2py,$$

移项，得

$$x^2-2py=0,$$

它们都含有两个变数，并且变数的最高次数是二次，叫做二元二次方程．一般的二元二次方程具有下面的形式：

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$$

我们将会看到，不同形式的二元二次方程，确定不同的曲线．这里，形如

$$Ax^2+Ey=0$$

或

$$Cy^2+Dx=0$$

的二元二次方程，都表示抛物线．

【例 2】 求抛物线 $2y^2+9x=0$ 的焦点的坐标，并且画出图形．

解：原方程就是

$$y^2=-\frac{9}{2}x.$$

这是以 x 轴为对称轴，向左开口的抛物线．这里 $2p=\frac{9}{2}$，$\frac{p}{2}=\frac{9}{8}$．所以它的焦点的坐标是 $\left(-\frac{9}{8},0\right)$．

按照 $x=-\frac{2y^2}{9}$，作下面的数值表：

y	0	±1	±2	±3	±4	…
x	0	$-\frac{2}{9}$	$-\frac{8}{9}$	-2	$-3\frac{5}{9}$	…

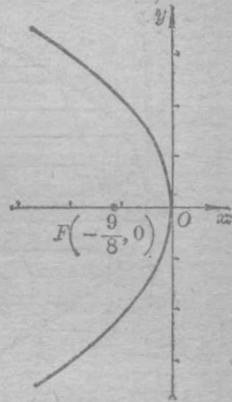
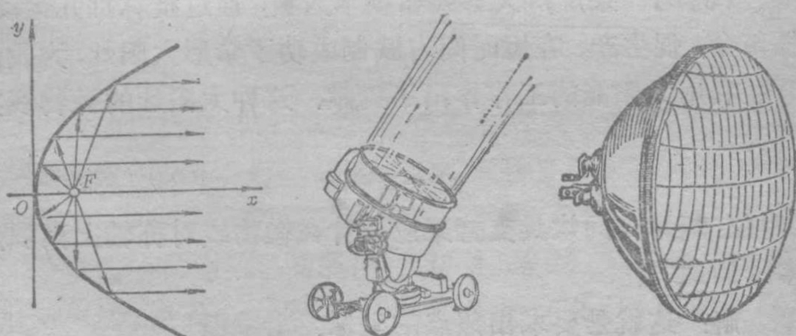


图 7-4

根据上表数据，就可以画出如图 7-4 所示的抛物线．

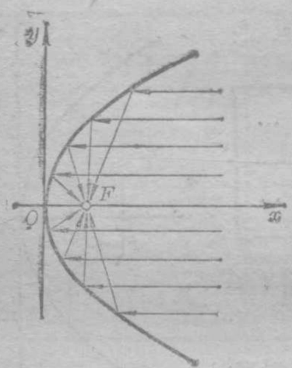
抛物线绕对称轴旋转，就形成抛物面．如果将点光源放在抛物线的焦点 F 处［图 7-5(1)］，它射出的光线经过抛物面的反射，就变成与对称轴平行的一束平行光线．根据这个道理，探照灯与汽车前灯的反光曲面都是做成抛物面的［图 7-5(2)、(3)］．



(1)　(2)　(3)

图 7-5

反过来，平行光线经过抛物面的反射，就会聚在焦点[图7-6(1)]．太阳灶就是根据这个原理设计的[图7-6(2)]．它的形状就象一把倒放的雨伞，这个凹形伞面是一个抛物面．太阳光经抛物面的反射，聚光在焦点．因此，焦点处温度很高，如将炊具放在焦点位置，就可烧水、煮饭．



(1)


(2)

图 7-6

【例 3】 某厂广大工人和技术人员，通过批林批孔运动，抓革命，促生产，在短时间内试制成功了伞形太阳灶，为我国开展利用太阳能的工作作出了贡献．这种太阳灶的抛物线方程为

$$y^2=2600x$$

(单位：毫米)，问炊具支持架应设计在抛物线对称轴上离顶点多远的地方？

解：这就是要求出焦点的坐标．由方程

$$y^2=2600x$$

可得

$$2p=2600,$$

即

$$\frac{p}{2}=650.$$

所以焦点的坐标是(650, 0). 即炊具支持架应设计在抛物线对称轴上离顶点 650 毫米处.

【例 4】 汽车前灯的反光曲面，是将抛物线围绕它的对称轴旋转而成的抛物镜面. 它的抛物线图形如图 7-7 所示(单位：毫米). 要使光线经过反射后成为平行光束，灯泡应放在什么位置?

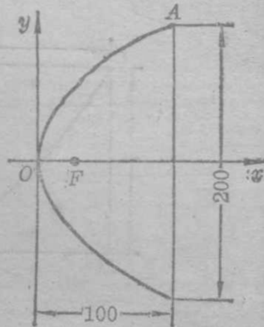


图 7-7

解：由抛物线的光学特性我们知道，这也是要求出焦点 F 坐标的问题. 为此，我们先求抛物线的方程. 在图 7-7 所示的坐标系里，这抛物线的方程具有形式

$$y^2=2px.$$

把点 A 的坐标(100, 100)代入这方程，得

$$100^2=2p\times100,$$

因此

$$p=50.$$

所以焦点的坐标是(25, 0). 即灯泡应装在离灯底 25 毫米处.

抛物线的图形，可以象例 1 那样根据方程来画. 另外我们再介绍一种几何画法.

设求作的抛物线拱的宽(即开口处)是 $2b$，高是 h. 作长方形 $ABCD$，使 $DA=2b$，$AB=h$(图 7-8). 取 DA 的中点 O. 把线段 OA 和 AB 分成相同的等分(图中都是 5 等分，分点越多越精确). 连接点 O 和 AB 上的各分点 B_1, B_2, B_3, $\cdots$，得

OB_1, OB_2, OB_3, …. 过 OA 上的各分点 A_1, A_2, A_3, …, 作 OA 的垂线, 它们顺次和 OB_1, OB_2, OB_3, … 相交于 P_1, P_2, P_3, … 各点. 用平滑的曲线连接 O, P_1, P_2, P_3, …, B 各点, 就得到所求抛物线拱的一半. 再利用抛物线的对称性, 可画出拱形的另一半.

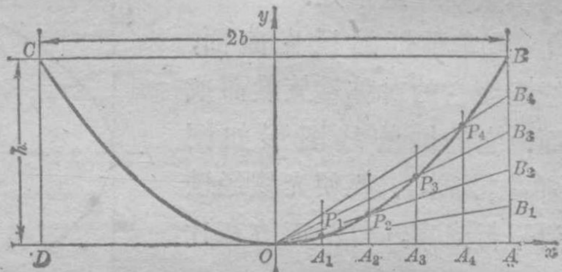


图 7-8

为什么这样画出来的曲线是抛物线呢? 我们以点 P_1 为例来说明.

在图 7-8 中, 取直线 DA 为 x 轴, O 为原点, 建立直角坐标系. 这样, 点 B 的坐标是 (b, h).

设点 P_1 的坐标是 (x, y). 由

$$\triangle OA_1P_1 \backsim \triangle OAB_1,$$

得

$$\frac{A_1P_1}{AB_1}=\frac{OA_1}{OA},$$

就是

$$\frac{y}{AB_1}=\frac{x}{b},$$

所以

$$y=AB_1\frac{x}{b}. \qquad (1)$$

又从作图方法知道

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{OA_1}{OA},$$