朱德祥代数与几何讲义

—— 第1卷 ——

朱德祥　著

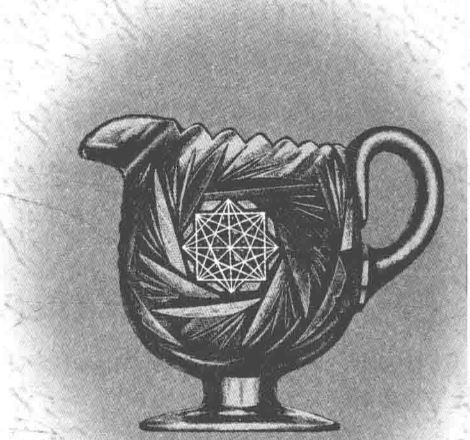
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ZHUDEXIANG DAISHU YU JIHE JIANGYI

朱德祥代数与几何讲义

第1卷

朱德祥 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

该书是昆明师范学院数学系1951—1957年使用的自编讲义.1954年经教育部批准，作为全国高等师范院校交流教材.作者为国立清华大学十级(1934—1938)杰出校友、著名几何学家、数学教育家朱德祥教授.本书共六章，分别论述：行列式、线性方程解法、线性方式、二次方式、直线之投影几何、平面及空间之投影几何.

该书可作为高等院校数学与应用数学专业的教学参考用书，也可作为数学爱好者学习射影几何的参考资料.

图书在版编目(CIP)数据

朱德祥代数与几何讲义.第1卷/朱德祥著.—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2017.4

ISBN 978-7-5603-6184-0

Ⅰ.①朱… Ⅱ.①朱… Ⅲ.①代数-高等学校-教学参考资料②几何-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O15 ②O18

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第211429号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 杜莹雪
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张12.5 字数128千字
版 次 2017年4月第1版 2017年4月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-6184-0
定 价 38.00元

前　　言

1° 此書係以 René Garnier 氏所著代數與幾何 (Leçons d'Algèbre et de Géométrie, Gauthier-Villas, Paris) 上中兩册為藍本加以增删寫成．一九五一年開始在昆明師範学院數学系試教．

2° 前四章係代數預備知識，祇作徵引之便，讀過高等代數的可以不讀．

3° 倘時间不敷，可略去一部份材料，比方略去 5·23，5·44，6I·8，7I（而將其中重要概念分散在 7II 中講），8I·10，8II·4 的 4°，5°，6°，9·9，9·11，10·11，11·7，12·3，12·4，13·10—13·104，大致無損於系统上的啣接．

4° 每一章必須配合適当習題，能聯繫平面幾何及解析幾何尤佳．書中例題較少，宜適当增加．

5° 編者学識淺薄，錯误必难免，敬希教正．

朱德祥

一九五一年八月於昆明師範学院

此項講義前擬譯初等幾何学講義，於一九五四奉中央人民教育部批准，作為高等師範学校交流教材，寄各师範学院及师範专修科．

◎ 目录

第一章　行列式

1.1　逆序(inversion)，類(class).　将n個數或指標1，2，3，…，n依任何次序全體無重複地寫出，称為此n個指標之一排列(permutation). 由高中代數，此等排列共$n!$個.

排列1，2，3，…，n係依自然次序寫出，任取其中兩指標，恒小者居前，大者居後. 取此以為正常次序. 若小者居後而大者居前，則曰一逆序. 例如在排列3214中，共有32，31，21三逆序.

n文字之$n!$個排列，可分為兩類. 一類為奇排列，其中任一排列之逆序數為奇數；一類為偶排列，其中任一排列之逆序數為偶數.

定理. 在n指標之任一排列中，互換兩指標，則此排列變類.

證：先假定互換之兩指標為連接的，書此排列為$AijB$，其中A，B表指標之集合，若i或j居於排列之極端，則A或B可以不存在. 互換i與j，排列變為$AjiB$. 經此互換以後，A，B中之指標與i及j之相互位置未變，A或B自身各指標之相互位置，亦均未變. 因之若ij為正常次序，則$AjiB$之逆序數增1；若ij為逆序，則$AjiB$之逆序數減1. 總之$AijB$與$AjiB$異類.

次設互換之兩指標間隔以p個指標，表之為$AiBjC$，其中A或C可以不存在. 先將i逐次與B中p個指標互換得$ABijC$，再互換i，j得$ABjiC$，末將B中p個指標與j逐次互換得$AjBiC$. 如是共變類$p+1+p=2p+1$次，故$AiBjC$與$AjBiC$不同類.

定理. n指標之排列中，奇偶兩類排列之個數相等.

證：以P表偶排列數，I表奇排列數．在各偶排列互換指定之兩指標，例如1而2，因之得如數之奇排列．今証此等奇排列互異．設p，p'為兩互異偶排列，互換1而2後，成為奇排列i，i'．則$i\neq i'$．蓋1，2以外，必有一指標在p而p'中佔不同之位置（否則p而p'非全同即異類）．因之此指標在i而i'中所佔之位置亦異．$\therefore\ i\neq i'$．故 $I\geq P$．

倣此亦有 $P\geq I$．$\therefore\ P=I$．

1·2 行列式定義．將n^2個元（element）書為n行（row）及n列（column）（橫者為行，豎者為列）如下

$$\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix},$$

稱為n級行列式（determinant of order n），以之表$n!$個項之代數和．所謂項，乃形如$(-1)^{\alpha+\beta}a^{\alpha_1}_{\beta_1}a^{\alpha_2}_{\beta_2}\cdots a^{\alpha_n}_{\beta_n}$之乘積，其中行指標$\alpha_k$及列指標$\beta_k$均為$1,2,\cdots,n$之一排列，而$\alpha$表行指標$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$中之逆序數，$\beta$表列指標$\beta_1\beta_2\cdots\beta_n$中之逆序數．可知每一項含每一行之一元及每一列之一元，且僅一元．

給定兩項T及T'，若至少有一元現於T而不現於T'，因之亦至少有一元現於T'而不現於T，則稱T而T'為相異的．由此定義，凡n元盡同僅其次序不同者，此等項概視為同一項，蓋

其數值相等也．欲证之，祇需驗明 T 而 T′ 所冠之符號 $(-1)^{\alpha+\beta}$ 及 $(-1)^{\alpha'+\beta'}$ 相同足矣．T 中因子次序之任何變更，恒可由互換連接之兩因子而得．而每次互換，α 而 β 變為 $\alpha\pm1$ 而 $\beta\pm1$，故 $\alpha+\beta$ 變為 $\alpha+\beta+2$ 或 $\alpha+\beta$ 或 $\alpha+\beta-2$．$\therefore (-1)^{\alpha+\beta}=(-1)^{\alpha'+\beta'}$．

於是不妨將行指標或列指標依自然次序排列之，而不變項之值．故任一項可寫呈兩種形式：

$$(-1)^{\alpha'}a_1^{\alpha_1'}a_2^{\alpha_2'}\cdots a_n^{\alpha_n'} \quad 或 \quad (-1)^{\beta'}a_{\beta_1'}^1 a_{\beta_2'}^2\cdots a_{\beta_n'}^n.$$

任一種寫法，均表明行列式共有 $n!$ 個項，其中半數冠以(+)號，半數冠以(−)號．在 $a_1^1a_2^2\cdots a_n^n$ 一項中，α 及 β 均為零，稱為行列式之主項(principal term)，其各元佔行列式之主對角線(principal diagonal)．

至是，設行列式之值為 D，則 D 為 $n!$ 項之代數和：

$$\begin{aligned}D&=\sum(-1)^{\alpha+\beta}a_{\beta_1}^{\alpha_1}a_{\beta_2}^{\alpha_2}\cdots a_{\beta_n}^{\alpha_n}\\&=\sum(-1)^{\alpha'}a_1^{\alpha_1'}a_2^{\alpha_2'}\cdots a_n^{\alpha_n'}\\&=\sum(-1)^{\beta'}a_{\beta_1'}^1a_{\beta_2'}^2\cdots a_{\beta_n'}^n\end{aligned}$$

為簡便計，有時以行列式之第一行以表之：

$$D=|a_1^1\,a_2^1\cdots a_n^1|,$$

或更簡書為

$$D=|a_j^i|.$$

1.3　互換行列．定理．換行(列)為列(行)，行列式之值不變．

證：設

$$D=\begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_1 & a^n_2 & \cdots & a^n_n \end{vmatrix},\quad D'=\begin{vmatrix} a^1_1 & a^2_1 & \cdots & a^n_1 \\ a^1_2 & a^2_2 & \cdots & a^n_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^1_n & a^2_n & \cdots & a^n_n \end{vmatrix},$$

欲证 $D=D'$，可命 $b^i_j=a^j_i$，则

$$D'=\sum(-1)^\alpha b^{\alpha_1}_1 b^{\alpha_2}_2\cdots b^{\alpha_n}_n=\sum(-1)^\alpha a^1_{\alpha_1} a^2_{\alpha_2}\cdots a^n_{\alpha_n}$$

$$=D.$$

其实此定理已隐含在行列式之定義中，因定義中行与列实佔同等地位也.

1·4 互換两行(或列). 定理. 互換两行(列)，则行列式變號.

證：由1·3，就两列互換證明之即足. 令

$$D=\left|a^1_1\ a^1_2\cdots a^1_p\ \cdots\ a^1_q\ \cdots\ a^1_n\right|.$$

互換第 p, q 两列得

$$D'=\left|a^1_1\ a^1_2\ \cdots a^1_q\cdots\ a^1_p\ \cdots\ a^1_n\right|.$$

令

$$b^i_j=a^i_j,\quad j\neq p\text{ 或 }q,$$

$$b^i_q=a^i_p,\quad b^i_p=a^i_q.$$

则 $$D=\sum(-1)^\alpha a^{\alpha_1}_1\cdots a^{\alpha_p}_p\cdots a^{\alpha_q}_q\cdots a^{\alpha_n}_n.$$

但於 T 之每一項

$$T=(-1)^\alpha a^{\alpha_1}_1\cdots a^{\alpha_p}_p\cdots a^{\alpha_q}_q\cdots a^{\alpha_n}_n,$$

可使 D' 中之一項

$$T'=(-1)^{\alpha+1}b_1^{\alpha_1}\cdots b_{p-1}^{\alpha_{p-1}}b_p^{\alpha_q}b_{p+1}^{\alpha_{p+1}}\cdots b_{q-1}^{\alpha_{q-1}}b_q^{\alpha_p}b_{q+1}^{\alpha_{q+1}}\cdots b_n^{\alpha_n}$$

而之相当．其前面所冠符號$(-1)^{\alpha}$而$(-1)^{\alpha+1}$之所以不同，蓋因上指標α_k之排列不同類(1.1)．$\therefore\ T'=-T$．

D而D′各由$n!$個項組成，而其項彼此異號，故$D'=-D$．

推論．若行列式中兩行（列）之元全同，則其值為零．

蓋若互換此兩行，則由上知D變為$-D$．但因此兩行全同，故互換等於未換．即$-D=D$．因之$D=0$．

1.5 行列式之展開式．因D中每項含第p行之一元且僅一元(1.2)，可將D中所有含a_k^p之項集在一起，書其和為$A_k^p a_k^p$，A_k^p表若干乘積之和，此等乘積不含第p行或第k列之元(1.2)．因D含$a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p$，故可書

$$D=A_1^p a_1^p+\cdots+A_k^p a_k^p+\cdots+A_n^p a_n^p.$$

此稱為就第p行之元展開行列式．此展開式對於$a_1^p, a_2^p, \cdots, a_n^p$為線性方式(linear form)，而$A_k^p=\dfrac{\partial D}{\partial a_k^p}$．

欲定此等係數A_k^p，先就特例A_n^n研究之．在

$$D=\sum(-1)^{\alpha}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}}a_n^{\alpha_n}$$

中，令$\alpha_n=n$，則可知

$$A_n^n=\sum(-1)^{\alpha}a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_{n-1}^{\alpha_{n-1}},$$

$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1})$為$(1,2,\cdots,n-1)$之一排列．但$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1},\alpha_n)$之逆序數，而$(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n-1})$之逆序數同．故$A_n^n$實即在D中劃去$a_n^n$所在之行而列所得之$n-1$級行列式：

$$A_n^n=\begin{vmatrix} a_1^1 & \cdots & a_{n-1}^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}.$$

再論通款A_j^i．為此，可將a_j^i移置於末行末列．以大寫字母表諸元之長方表，

$$\left.\begin{vmatrix} A & E & B \\ F & a_j^i & G \\ C & H & K \end{vmatrix}\right\}n-i\text{行} =(-1)^{n-i}\begin{vmatrix} A & E & B \\ C & H & K \\ F & a_j^i & \underbrace{G}_{n-j\text{列}} \end{vmatrix} =(-1)^{n-i}(-1)^{n-j}\begin{vmatrix} A & B & E \\ C & K & H \\ F & G & a_j^i \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} A & B & E \\ C & K & H \\ F & G & a_j^i \end{vmatrix}.$$

故由上之特例，立得

$$A_j^i=(-1)^{i+j}\begin{vmatrix} A & B \\ C & K \end{vmatrix}.$$

最後之行列式，即在D中剔去a_j^i元所在之行與列而得，稱為相當於a_j^i之子式或子行列式(minor)；而A_j^i則稱為相當於a_j^i元之餘因式(cofactor)．

1.6 由行列式對於一行(列)之元為線性的推得之結果． 在1.5吾人已知，就一行(列)之元而展開行列式，其結果對於此行(列)之元為線性的．

今設一普遍線性方式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n,$$

則顯有

$$f(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)=f(x_1,\cdots,x_n)+f(y_1,\cdots,y_n),$$

$$f(kx_1,\cdots,kx_n)=kf(x_1,\cdots,x_n).$$

將此等結論應用於行列式，遂得：

1° 將行列式某行(列)之元同以一數λ乘之，則其結果等於以λ乘此行列式．例如

$$D=|\lambda a_1'\ \ a_2'\ \cdots\ a_n'|=\lambda|a_1'\ \ a_2'\ \cdots\ a_n'|.$$

2° 若行列式某行(列)之元各為p個數之和，則此行(列)可視為p個偏行(列)之和，而行列式等於p個行列式之和，即依次以p個偏行(列)替代該行(列)而得者．例設所言為第一列而$p=2$，則

$$D=|b_1'+c_1'\ \ a_2'\ \ a_3'\ \cdots\ a_n'|=|b_1'\ a_2'\ a_3'\cdots a_n'|+|c_1'\ a_2'\ a_3'\cdots a_n'|.$$

3° 上兩法合併用之遂得

$$|(a_1'+\lambda_2a_2'+\lambda_3a_3'+\cdots+\lambda_na_n')\ \ a_2'\ \ a_3'\cdots a_n'|=|a_1'\ a_2'\ a_3'\cdots a_n'|.$$

因左端可變為p個行列式之和，其中除見於右端者外，各因有兩列全同而為零．故在一行(列)之元中加以同數乘他一行(列)之相當元，行列式之值不變．此性質在計算行列式之數值時，甚為有用．

1.7 應用． 1° Vandermonde氏行列式． 下列所示為四級Vandermonde氏行列式，茲示如何應用以上之理論，以分解其因子．

$$\Delta=\begin{vmatrix} a^3 & a^2 & a & 1 \\ b^3 & b^2 & b & 1 \\ c^3 & c^2 & c & 1 \\ d^3 & d^2 & d & 1 \end{vmatrix}.$$

就第一行展開之，得 a 之三次式，顯見其根為 b, c, d. 故

$$\Delta=(a-b)(a-c)(a-d)K,$$

K 表 Δ 中 a^3 之係數，故即 a^3 之子式：

$$K=\Delta'=\begin{vmatrix} b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \\ d^2 & d & 1 \end{vmatrix}.$$

施上法於 Δ' 得

$$\Delta'=(b-c)(b-d)\Delta'',$$

$$\Delta''=\begin{vmatrix} c & 1 \\ d & 1 \end{vmatrix}=c-d.$$

$$\therefore \quad \Delta=(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d).$$

仿此，於 $n+1$ 級 Vandermonde 氏行列式有公式

$$\begin{vmatrix} a^n & a^{n-1} & a^{n-2} & \cdots & a^2 & a & 1 \\ b^n & b^{n-1} & b^{n-2} & \cdots & b^2 & b & 1 \\ c^n & c^{n-1} & c^{n-2} & \cdots & c^2 & c & 1 \\ d^n & d^{n-1} & d^{n-2} & \cdots & d^2 & d & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k^n & k^{n-1} & k^{n-2} & \cdots & k^2 & k & 1 \\ l^n & l^{n-1} & l^{n-2} & \cdots & l^2 & l & 1 \end{vmatrix} \begin{aligned} &=(a-b)(a-c)(a-d)\cdots(a-l) \\ &\quad\times(b-c)(b-d)\cdots(b-l) \\ &\quad\times(c-d)\cdots(c-l) \\ &\quad\cdots\cdots \\ &\quad\times(k-l). \end{aligned}$$

2° 四面體之體積. 設四面體之一頂点在正交坐標系之原点，其他三頂点分別記為 1, 2, 3，以 (x_k, y_k, z_k) 為坐標，$k=1, 2, 3$. 體積 $V=\frac{1}{3}$(底面積)×高. 取平面 (123) 為底面，即以 (123) 表其底面積. 此平面之方程為

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

x 之係數為

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix},$$

其值等於在 yz 平面上以 (y_1, z_1), (y_2, z_2), (y_3, z_3) 為頂点之三角形面積之兩倍；但此三角形即三角形 (123) 在 yz 面之投影. 故若以 α, β, γ 表平面 (123) 法線之方向角，則 x 之係數 $=2(123)\cos\alpha$. 仿此

$$y \text{之係數} = 2(123)\cos\beta, \quad z \text{之係數} = 2(123)\cos\gamma.$$

故上之平面方程為

$$x\cdot 2(123)\cos\alpha + y\cdot 2(123)\cos\beta + z\cdot 2(123)\cos\gamma - |x_1\, y_1\, z_1| = 0.$$

以 2(123) 除之，即呈法線式 (normal form)

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

其中

$$p = \frac{|x_1 y_1 z_1|}{2(123)}$$

表自原点至平面 (123) 之距離，即四面體之高. 故

$$V = \frac{1}{3}(123)\cdot p = \frac{1}{6}|x_1 y_1 z_1| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

若四面體之頂点為 $P_k(x_k, y_k, z_k)$，$k=1,2,3,4$，則可平移坐標軸，使新原点為頂点 P_1，則

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

1.8 Laplace氏展開法則．茲推廣1.5就一行(列)之元而展開行列式之法．先將子式之概念推廣之．

定義：在一 n 級行列式中，依自然次序取 k 行及 k 列，組成一 k 級子式 D'_k．刪去 D'_k 之元所佔之行與列，另得一 $n-k$ 級子式 D''_{n-k}．D'_k 與 D''_{n-k} 稱為互為餘子式(complementary minors).

当 $k=1$ 時，D'_k 即 D 之一元，而 D''_{n-k} 即該元之子式．

選 k 行(列)為"展開行"(列)．不妨設所選者為起始之 k 行，蓋無損於理論之普遍性．就前 k 行用可能方法以作各子式 D'_k，並從而決定其餘子式 D''_{n-k}．Laplace法則謂行列式 D 為形如下式之和：

$$D=\sum \pm D'_k D''_{n-k},$$

其中正負號如何決定，詳見下文．

由定義，

$$D=\sum(-1)^{\alpha} a^1_{\alpha_1} a^2_{\alpha_2} \cdots a^k_{\alpha_k} a^{k+1}_{\alpha_{k+1}} \cdots a^n_{\alpha_n},$$

α 表指標 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 之逆序數．將前 k 個指標 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ 以漸增之次序重新排列之，記為 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$．其餘 $n-k$ 個 α_i 亦如之，記為

$\beta_{h+1},\cdots,\beta_n$. 指標$\alpha_i$之逆序數$\alpha$可以下式表之

$$\alpha=H+J+K,$$

H表排列$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h)$之逆序數，J表$(\alpha_{h+1}\alpha_{h+2}\cdots\alpha_n)$之逆序數，K表從前後兩排列各取一數所能得之逆序數．故

$$D=\sum(-1)^{H+J+K}a^1_{\alpha_1}\cdots a^h_{\alpha_h}a^{h+1}_{\alpha_{h+1}}\cdots a^n_{\alpha_n}.$$

(A) 暫使$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_h$固定，則H，K亦隨之固定．將D中所有含排列$(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h)$之項集在一起，並括出公因子$(-1)^{H+K}a^1_{\alpha_1}a^2_{\alpha_2}\cdots a^h_{\alpha_h}$，得

$$\sigma=(-1)^{H+K}a^1_{\alpha_1}a^2_{\alpha_2}\cdots a^h_{\alpha_h}\sum(-1)^J a^{h+1}_{\alpha_{h+1}}\cdots a^n_{\alpha_n}.$$

$\sum$號下之和，即行列式D''_{n-h}：

$$\begin{vmatrix} a^{h+1}_{\beta_{h+1}} & \cdots & a^{h+1}_{\beta_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^n_{\beta_{h+1}} & \cdots & a^n_{\beta_n}\end{vmatrix}=D''_{n-h}.$$

故D中之項之含有固定的$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_h$者，其和為

$$\sigma=(-1)^{H+K}a^1_{\alpha_1}a^2_{\alpha_2}\cdots a^h_{\alpha_h}\cdot D''_{n-h}.$$

(B) 任意排列$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_h$，設$(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_h')$為其一排列．或可言$\beta_1\beta_2\cdots\beta_h$暫仍固定，其一排列為$(\alpha_1\cdots\alpha_h)$，其另一排列為$(\alpha_1'\cdots\alpha_h')$．察D中之項之含有$a^1_{\alpha_1'}\cdots a^h_{\alpha_h'}$者．顯見對於此等項，H已變，K未變，$D''_{n-h}$亦未變（因各$\beta$未變也）．故此等項之和為

$$\sigma'=(-1)^{H'+K}a^1_{\alpha_1'}\cdots a^h_{\alpha_h'}\cdot D''_{n-h}.$$

將如是之和$\sigma,\sigma',\cdots$相加，得

$$\begin{aligned}\tau&=(-1)^K\left\{\sum(-1)^H a^1_{\alpha_1}a^2_{\alpha_2}\cdots a^h_{\alpha_h}\right\}D''_{n-h}\\&=(-1)^K D'_h D''_{n-h}\end{aligned}$$

總言之，D中之項相當於固定的$(\beta_1\beta_2\cdots\beta_h)$者（注意，此時