XIANXING DAISHU

线性代数

（第四版）

杜之韩 刘丽 吴曦 编著

行列式的性质　行列式按行(列)展开定理
矩阵及其运算　矩阵的初等变换与矩阵的秩
向量组的线性关系　向量组的秩　齐次线性方程组解的结构
线性空间　维数、基与坐标　标准正交基
相似矩阵与矩阵对角化　实对称矩阵的对角化
标准形　正定二次型
线性规划数学模型　层次分析数学模型

Southwestern University of Finance & Economics Press
西南财经大学出版社

杜之韩 刘丽 吴曦

线性代数

（第四版）

XIANXING DAISHU

Southwestern University of Finance & Economics Press
西南财经大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/杜之韩,刘丽,吴曦编著. —4版. —成都:西南财经大学出版社,2016.12
ISBN 978-7-5504-2768-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①杜…②刘…③吴… Ⅲ.①线性代数—高等学校—教材
Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第306035号

线性代数(第四版)
杜之韩 刘丽 吴曦 编著

责任编辑:廖术涵
封面设计:穆志坚
责任印制:封俊川

出版发行	西南财经大学出版社(四川省成都市光华村街55号)
网　　址	http://www.bookcj.com
电子邮件	bookcj@foxmail.com
邮政编码	610074
电　　话	028-87353785　87352368
照　　排	四川胜翔数码印务设计有限公司
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	170mm×240mm
印　　张	16.25
字　　数	285千字
版　　次	2017年1月第4版
印　　次	2017年1月第1次印刷
印　　数	1—3000册
书　　号	ISBN 978-7-5504-2768-6
定　　价	35.00元

第四版前言

本书于2003年1月问世,作为经济类、管理类专业本科线性代数教材已在西南财经大学的学生中使用过十二届。其间曾出版过修订版与第三版。较之于前三版,第四版主要的变动是:

(1)对某些概念的陈述做了调整,使之更精确、完整。

(2)在行列式、矩阵等有难度的章节中增加了例题。

(3)对各章节的习题做了部分的增减。

感谢十三年来使用过本教材的所有老师与同学,他们在授课或学习中提出的宝贵意见使本教材日臻完善。

第四版的修订工作主要由赵建容、吴曦、韩本山完成。

编　者

2016年12月于柳林

第三版前言

本书于2003年1月问世，作为西南财经大学经济类专业本科线性代数课程教材已在两个年级的学生中使用过两遍。其间曾出版过以订正疏漏及印刷错误为主的修订本。较之于前两版，此次第三版中的主要变动是：

(1)在每章的复习题中增添了填空题和选择题，用以训练学生适应目前各类考试(包括研究生入学考试)中普遍采用的此类题型。

(2)将原来复习题中个别较难的题以星号"*"标出，并增加了部分带星号"*"的习题。对于此类习题，读者初学时可以将其跳过而不会影响后面的学习。

(3)将第六章中化二次型为标准型的两种方法的讲授顺序作了调整：先讲正交变换法，再讲配方法，以使第五章、第六章的逻辑衔接更为紧密；对定理6.6作了调整，并给出了证明。

(4)对部分文字叙述方式做了改进。

感谢使用本书的老师、同学们，感谢他们对本书提出的极好的意见和建议。在教材建设中精益求精将是我们永远的追求。

编　者

2004年12月于光华园

前　言

本书是根据教育部高等学校财经类专业核心课程“经济数学基础”教学大纲并参考近年经济、管理类硕士研究生入学统一考试数学考试大纲编写而成的，可供学时数为50~60的高等财经院校本科各专业的“线性代数”课教学使用，亦可供有志于学习本课程的自学者选用。

编者以长期的经济数学教学之经验积累对本课程的逻辑结构及内容的详、略、取、舍作了精心的安排，使之更利于课程的讲授与学习。在习题的编排上采取分节编题，每章有综合复习题的编题方式，使读者自然地融入一个由浅入深、循序渐进的学习过程之中，以获得更佳的学习效果。此外，本书选用了较多的近年考研试题，希望它能对有志于考研的读者有所帮助。

本书是编者通力合作的结果：杜之韩具体执笔第一、二、七章并负责全书的统稿；吴曦执笔第三、四章；刘丽执笔第五、六章并参与了部分统稿工作。

本书的写作得到了西南财经大学教务处及经济数学系领导的热情鼓励与支持。经济数学系副主任孙疆明副教授审阅了部分书稿并提出了中肯的意见，经济数学系老师对本书的编写提供了许多有益的建议，杜若昀为本书原稿的录入付出了辛劳，编者对此表示诚挚的谢意。

此外还要感谢西南财经大学出版社的鼎力帮助，没有他们的努力，本书是难以以现在的面貌展现在读者面前的。

限于学识，本书的不当甚至谬误之处在所难免，望同仁及读者不吝指教。

编　者

2002.10于光华园

目　录

1 n 阶行列式

线性代数的研究对象之一是较初等数学中的二元一次方程组、三元一次方程组更为一般的，由 m 个方程组成的含有 n 个变量的一次方程组．今后我们称之为 n 元线性方程组．行列式是在对线性方程组的研究中开发出来的一种重要工具．通过本章的学习，我们将看到，正是行列式工具的引入，才使得由 n 个方程组成的 n 元线性方程组的解以极其完美的形式展现于人们面前．随着本书内容的展开，我们还将看到，行列式还有超越线性方程组的更为广泛的应用．

§1.1 n 阶行列式

§1.1.1 排列及其奇偶性

为了给出 n 阶行列式的定义须引入排列的概念．

称 n 个不同元素的全排列为一个 **n 级排列**．本书论及的主要是自然数特别是前 n 个自然数的排列．显然，前 n 个自然数可构成 $n!$ 个不同的 n 级排列，其中 $n! = 1\times 2\times\cdots\times n$. 通常记作

$$i_1 i_2\cdots i_n,\text{其中 } i_k(k=1,2,\cdots,n)\in\{1,2,\cdots,n\} \tag{1.1}$$

设 i_s 和 i_t 为 n 级排列(1.1)中任意两个数，且有 $s<t$. 若 $i_s>i_t$，则称数对 (i_s,i_t) 构成一个**逆序**，否则称 (i_s,i_t) 构成一个**顺序**．称一个 n 级排列中的逆序总数为此排列的**逆序数**，记作 $\tau(i_1 i_2\cdots i_n)$．当一个排列的逆序数为奇数时，称此排列为**奇排列**；当一个排列的逆序数为偶数时，称此排列为**偶排列**．依此，n 级排列"$1\ 2\ \cdots\ n$"中任何数对都不构成逆序，故有 $\tau(1\ 2\ \cdots\ n)=0$，且此排列为偶排列．今后称此排列为前 n 个自然数的**自然排列**．n 级排列"$n\ \overline{n-1}\ \cdots\ 3\ 2\ 1$"中任何数对都构成逆序，故有

$$\tau(n\ \overline{n-1}\ \cdots\ 3\ 2\ 1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}$$

易知,当 $n = 4k(k = 1,2,3\cdots)$ 或 $n = 4k + 1(k = 0,1,2,\cdots)$ 时此排列为偶排列;当 $n = 4k + 2$ 或 $n = 4k + 3(k = 0,1,2\cdots)$ 时此排列为奇排列. 对于任意给定的一个 n 级排列,可以通过依次计数其逆序数来确定其奇偶性.

例 1 试确定 5 级排列(1)52413 及(2)53412 的奇偶性.

解 (1) 此排列中构成逆序的数对依次为(5,2),(5,4),(5,1),(5,3),(2,1),(4,1),(4,3). 于是 $\tau(52413) = 7$,从而 52413 是奇排列.

(2) 此排列中构成逆序的数对依次为(5,3),(5,4),(5,1),(5,2),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2). 于是 $\tau(53412) = 8$,从而 53412 是偶排列.

我们注意到,例 1 中排列(2) 是由排列(1) 交换其排在第二和第五位的两个数 2 和 3 的位置而得到的. 结果(1),(2) 两个排列具有不同的奇偶性. 其实这里蕴藏着一个一般的规律性.

一般地,将一个 n 级排列中某两个数交换位置称作对该排列施行的一次**对换**. 特别地,若交换的是相邻两个数,则称作**相邻对换**. 我们有以下的结论:

定理 1.1 经一次对换,排列改变其奇偶性.

证明 先考虑相邻对换的情形.

设 n 级排列 $i_1\cdots i_m abj_1\cdots j_l$ 经相邻对换变成

$$i_1\cdots i_m baj_1\cdots j_l$$

显然,这一变化只使 a,b 两数间的"序" 发生变化:若(a,b) 为逆序,则(b,a) 为顺序;若(a,b) 为顺序,则(b,a) 为逆序. 其余任意两数间的序都保持不变. 这样,两个排列的逆序数恰相差 1. 从而相邻对换改变了排列的奇偶性.

再考虑非相邻对换的情形.

设 n 级排列

$$i_1\cdots i_r ak_1\cdots k_s bj_1\cdots j_t \tag{1.2}$$

经非相邻对换变成新排列

$$i_1\cdots i_r bk_1\cdots k_s aj_1\cdots j_t \tag{1.3}$$

这一变化亦可通过一系列的相邻对换实现:将原排列中的数 a 依次与其后的 $k_1\cdots k_s\ b$ 作相邻对换(共 $s + 1$ 次) 变成排列

$$i_1\cdots i_r k_1\cdots k_s baj_1\cdots j_t \tag{1.4}$$

再将数 b 依次与其前面的 $k_s\cdots k_1$ 作相邻对换(共 s 次). 这样,经 $2s + 1$ 次相邻对换,排列(1.2) 变成排列(1.3),其间经历了 $2s + 1$ 次奇偶性的变化,从而最终改变了排列的奇偶性.

推论 在全部 n 级排列中($n \geqslant 2$),奇排列、偶排列各占一半.

证明　设全部 n 级排列中，奇排列、偶排列个数分别为 s 和 t. 因为将每个奇排列的前两个数作对换，即可得到 s 个不同的偶排列，从而 $s \leqslant t$；同理可得 $t \leqslant s$. 于是 $s = t$，即奇偶排列各占一半.

最后我们指出，容易验证，任意 n 级排列都可经过有限次对换变成自然排列.

§1.1.2　n 阶行列式定义

定义 1.1　将 n^2 个数依(1.5)式排列并标记：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

称(1.5)为一个 n 阶行列式(其中横向排列的 n 个数构成行列式的**行**，纵向排列的数构成行列式的**列**. 行列式中的数 a_{ij} 又称**元素**. 其第一下标和第二下标分别表示此元素所处的行和列，依次简称**行标**和**列标**)，它表示取自不同行及不同列的元素的全部 $n!$ 个乘积的代数和，即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.6}$$

特别地，1 阶行列式 $|a_{11}| = a_{11}$.

称行列式的自左上角至右下角的对角线为行列式的**主对角线**，另一条对角线为**次对角线**.

依定义 1.1，(1.6)式右端和式(称之为行列式的**展开式**)中每一项符号的确定规则是：当该项中的因子(即行列式中的元素)的行标依次成自然排列时，若其列标所构成的 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列，则该项赋予正号，否则赋予负号. 符号“$\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$”表示对全部 n 级排列求和.

例 2　2 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12}a_{23}a_{31}$$

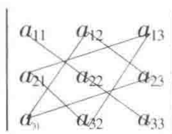
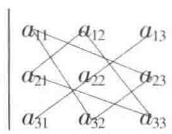
$$+ (-1)^{\tau(312)} a_{13}a_{21}a_{32} + (-1)^{\tau(321)} a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$+ (-1)^{\tau(132)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

事实上,由于2、3阶行列式的展开式分别只有2项和6项,其符号规律比较容易掌握,读者不妨自己总结并牢记. 下图展示了3阶行列式中正项与负项的构成规则:

正项: 　负项: 

例3　设

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

试证明 $x_1 = \dfrac{D_1}{D}, x_2 = \dfrac{D_2}{D}$ 是二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

的解.

证明　将 x_1, x_2 中的 D, D_1, D_2 依行列式定义展开后代入方程组验证即得(详细计算留给读者来完成).

事实上还可以证明这是方程组的唯一解. 而且,对于含有 n 个方程的 n 元线性方程组亦有类似的结果,我们将在 §1.4 中对此作详细讨论.

例4　计算下列行列式:

$$(1) D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \qquad (2) D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 (1) 因行列式展开式中每一项都是行列式中来自不同行且不同列的元素的乘积,乘积中只要有一个因子是零此项就是零,而此 5 阶行列式中可能的非零元素唯有 a、b、c、d、e 5 个,它们恰来自不同的行与列,故得

$$D=(-1)^{\tau(14532)}abcde=-abcde.$$

(2) 依定义 1.1,此行列式的展开式中有众多的零项,其可能的非零项必具以下形式(略去其符号,下同)

$$a_{11}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

因上述项中已有来自行列式第一列的因子 a_{11},故 a_{2j_2} 只能是 a_{22},a_{23},$\cdots$ a_{2n} 中的某一个,但其间只有 a_{22} 可能是非零的,于是行列式可能的非零项为

$$a_{11}a_{22}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

类似上述分析最终不难推得,行列式(2) 的可能的非零项只有 1 项:$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 从而得

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

今后称形如(2) 的行列式为**下三角行列式**. 上述计算表明,下三角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

最后,我们不加证明地给出 n 阶行列式的如下等价定义:

定义 1.2

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{1.7}$$

有兴趣的读者可以通过证明(1.6),(1.7) 式右端的展开式完全相同从而证明定义 1.2 与定义 1.1 完全等价.

习题 1.1

1. 试确定下列各排列的奇偶性:

(1) 453162;　　(2) 7146523;

(3) $13\cdots(2k-1)24\cdots(2k)$,($k$ 为自然数).

2. 试确定 i、j,使下面的(前 8 个自然数的)8 级排列成为偶排列:

(1) $i45178j3$;　　(2) $8i13j765$.

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} x & -1 & 2 \\ 1 & x & 3 \\ 2 & -2 & x \end{vmatrix}$ (4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & x & -1 \\ 3 & 0 & x \end{vmatrix}$

(5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

(6) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$

(7) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$

(8) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

§1.2　行列式的性质

根据行列式的定义,一个 n 阶行列式的展开式有 $n!$ 项. 不难想见,当 n 较大时,这是一项多么烦冗的计算! 于是,揭示行列式的计算规律,并利用这些规律来简化行列式的计算,便成为行列式研究的重要课题.

下面依次给出行列式的5条性质及其推论,以揭示对一个行列式实施的哪些变动不会改变行列式的值,哪些变动会使行列式的值发生规律性变化,以及行列式具有什么特征时其值为零.

设 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称将 D 中的行、列依次互换后所成的行列式为 D 的**转置行列式**. 记作 D^T. 即有

$$D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 1　$D^T=D$.

证明　设行列式 D^T 中位于第 i 行、第 j 列的元素为 b_{ij}. 则有

$$b_{ij}=a_{ji}\qquad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

于是,由定义 1.1

$$\begin{aligned} D^T &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn} \end{aligned}$$

再由定义 1.2,$D^T=D$.

性质 1 表明,行列式中行与列的地位完全相当,因而下面给出的行列式有关行的性质对列亦成立,以下不再一一说明.

性质 2　将 D 中两行元素对调变成行列式 D_1,则 $D_1=-D$.

证明　设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

将第 s 行与第 t 行对调变成

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{t1} & b_{t2} & \cdots & b_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} \quad (1 \leqslant s < t \leqslant n)$$

则，由假设有

$$b_{sj}=a_{tj},b_{tj}=a_{sj},b_{ij}=a_{ij}(i \neq s,t;j=1,2,\cdots,n)$$

由定义 1.1

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{tj_t}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

注意，上面第三个等号右端的和式中每一项的因子（即行列式 D 的元素）的行标已成自然排列，而列标所成的 n 级排列与该项前面的符号因子 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$ 中的 n 级排列刚好相差一次对换，从而 $(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}=-(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_t\cdots j_n)}$，于是得

$$D_1=-\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_t\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_t}\cdots a_{tj_s}\cdots a_{nj_n}=-D$$

将性质 2 用于有两行完全相同的行列式 D 上：互换 D 中相同的两行，得 $D=-D$，从而 $D=0$. 我们将此结果叙述成如下的推论：

推论 若行列式 D 中有两行完全相同,则 $D=0$.

性质 3 行列式中某行的公共因子可以提到行列式外面来. 即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD_1$$

证明 由定义 1.1

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}=kD_1 \end{aligned}$$

推论 1 若行列式 D 中某行元素全为零,则 $D=0$.

推论 2 若行列式 D 中某两行的对应元素成比例,则 $D=0$.

性质 4 若行列式 D 中某行的每个元素都是两数之和,则 D 可依此行拆成两个行列式 D_1 与 D_2 之和,即有

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=D_1+D_2$$

读者可利用定义 1.1 自己给出性质4 的证明. 根据性质 4 及性质 3 的推论 2,容易得出行列式计算中应用最多的下面的性质:

性质 5 将行列式中某行元素的 k 倍加到另一行的相应元素上,行列式的值不变. 即有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1}+ka_{t1} & a_{s2}+ka_{t2} & \cdots & a_{sn}+ka_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式的性质何以能简化行列式的计算？请看以下例题.

例 1　计算上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

解　注意到 D 的转置行列式 D^T 恰是下三角行列式,由 §1.1 例 4 得

$$D = D^T = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

即上三角行列式等于其主对角线上元素的乘积.

至此我们看到,上、下三角行列式都等于其主对角线元素的乘积. 这一结果在行列式计算中常被人们加以利用.

为了清楚地反映行列式的变化过程,特规定以下记号：

“$r_i \leftrightarrow r_j$” 表示将行列式的第 i、j 行对调；

“$r_i + kr_j$” 表示将行列式的第 j 行的 k 倍加到第 i 行；

此外约定,对行列式的列施行的类似变化只须将上述记号中的字母“r” 换作“c”.

例如,“$c_2 - 3c_4$” 表示将第 4 列的(-3) 倍加到第 2 列;“$c_4 + c_1 + c_2 + c_3$” 表示将第 1、2、3 列都加到第 4 列上去.

例 2　计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$