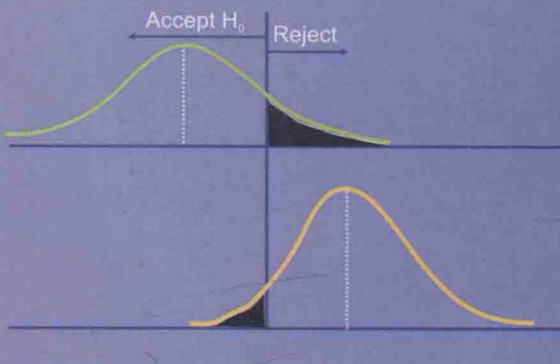
高等学校数学教材系列丛书

# 概率论与数理统计

## （第二版）

*Probability and Mathematical Statistics*




温小霓　王光锐　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学

# 概率论与数理统计

## （第二版）

温小霓　王光锐　编著

西安电子科技大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

**概率论与数理统计**/温小霓，王光锐编著. —2 版.
—西安：西安电子科技大学出版社，2016.12
(高等学校数学教材系列丛书)
ISBN 978-7-5606-4294-9

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①温… ②王 Ⅲ. ①概率论—高等学校—教材
②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ. ①O21

**中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 275726 号**

策　　划　李惠萍
责任编辑　李惠萍
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467
邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com
电子信箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西天意印务有限责任公司
版　　次　2016 年 12 月第 2 版　2016 年 12 月第 15 次印刷
开　　本　850 毫米×1168 毫米　1/32　印张 18
字　　数　217 千字
印　　数　62 001～65 000 册
定　　价　20.00 元
ISBN 978-7-5606-4294-9/O

**XDUP 4586002-15**

# 内 容 简 介

本书包括了概率论和数理统计的基本内容：随机事件与概率，随机变量与概率分布，随机变量的数字特征，随机向量；抽样和抽样分布，参数估计，假设检验，方差分析及回归分析。

本书叙述清楚，简明易懂，重点突出，只要求读者具有微积分和线性代数的知识即可学习本书内容。

本书可供高等院校相关专业学生及电大、网络教育、自学考试等有关层次学生使用，也可作为相关技术人员的自学参考书。

# 前　　言

本书可作为高等院校相关专业"概率论与数理统计"课程的教材。在编写中力求突出重点，深入浅出；对基本概念、重要公式和定理注重其实际意义的解释说明，便于同学们自学。

本书分为两个部分：第一部分为概率论部分，由王光锐教授负责编写；第二部分为数理统计部分，由温小霓教授负责编写。本次修订由温小霓教授负责。修订时注意保持了上一版简明易懂的特色，适当增加了部分内容，强化了应用，使内容讲述更加清楚。概率论部分课内约需 28 学时，数理统计部分课内约需 20 学时，总计约需 48 学时学完全书。各章章末附有习题，书末附有习题答案，可供同学们参考。

在成书过程中得到了西安电子科技大学出版社领导和同志们的大力支持，在此表示衷心的感谢。

由于时间仓促和水平所限，书中缺点和不足之处在所难免，恳请大家批评指正。

编　者

2016 年 10 月

# 目　录

## 第一部分　概　率　论

## 第二部分 数 理 统 计

# 第一部分 概率论

## 引　言

自然界里人们观察到的现象，可以分为两大类：一类称为确定性现象；另一类称为随机现象。所谓确定性现象，是指在一定条件下必然会发生的现象。例如在一个标准大气压下水在 100℃ 时必然沸腾，物体在重力作用下必然会下落，等等。这一类现象在观察之前是可以预言的，它的结果是确定的。研究这类确定性现象中的数量关系，常常采用的数学手段是代数、几何以及微积分等方法。所谓随机现象，是指在一定条件下可能发生也可能不发生的现象。例如从一大批同类产品中任意抽取一个产品，抽到的是合格品还是不合格品；抛掷一枚硬币，结果是正面向上还是背面向上；某射手射击一次是击中 10 环还是没有击中 10 环；等等。这些现象只有在观察后才能知道它的结果，事先由于它出现哪个结果的不确定性，因而其结果是无法预言的。是不是随机现象就没有规律可循呢？人们通过反复地观察和实践，发现它们具有明显的统计规律性。例如，从一大批产品中任意抽取一个产品，抽到合格品或不合格品是随机的，然而，当重复抽取时，合格品率是稳定的。又如对靶进行射击，观察命中点的分布，当射

击次数很多时，就会发现离靶心越近，分布越密，等等。由此可见，个别随机现象的出现是偶然的，事前无法进行断言，而在大量重复观察或重复试验时，随机现象中隐伏着一些必然的规律，我们就称之为随机现象的统计规律性。

概率论是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，它是现代数学的重要分支之一。它不仅有自己独特的概念与方法，与其它数学分支又有紧密的联系。

目前，概率论的方法在工业、农业、军事、医学、电子、公用事业、经济管理及尖端科学等各个领域中都有着广泛的应用。因此，对每一个科学工作者或科技人员来说，掌握这门学科具有重要的现实意义。

# 第一章　排列与组合

排列组合是计量的工具，就是俗话说的“数数”的方法。例如五个球队进行单循环赛，共要进行多少场比赛；又如一周六天，有三门课，每天上一门，不能连续两天上同一门课，课表有多少种不同的排法，等等。在计算比赛场次和课表排法这些“数”时，是有一定规律的。这就是本章所要讨论的内容。它也是学习概率论和数理统计必须具备的知识。

下面首先介绍一个基本原理——乘法原理。

**例 1**　设从 $A$ 地出发到 $B$ 地去，必须经过 $C$、$D$ 两地。而 $A$ 到 $C$ 有两种走法，$C$ 到 $D$ 有三种走法，$D$ 到 $B$ 有两种走法(见图 1-1)，问从 $A$ 到 $B$ 共有几种不同的走法？

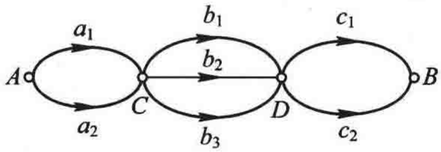



图　1-1

**解**　我们把所有走法排列如下：

$a_1b_1c_1$　$a_1b_1c_2$　$a_1b_2c_1$　$a_1b_2c_2$　$a_1b_3c_1$　$a_1b_3c_2$

$a_2b_1c_1$　$a_2b_1c_2$　$a_2b_2c_1$　$a_2b_2c_2$　$a_2b_3c_1$　$a_2b_3c_2$

显然，共有 $2\times3\times2=12$ 种不同的走法。

一般地，若要完成一件工作必须经过 $k$ 个步骤，而完成第一个步骤有 $n_1$ 种方法，完成第二个步骤有 $n_2$ 种方法，……，完成第 $k$ 个步骤有 $n_k$ 种方法，那么完成这件工作共有：$n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$ 种方法。这就是**乘法原理**。

**例 2** 某厂有甲、乙、丙三个车间，分别有职工 100、120 和 150 人。厂里要选举三名代表，并规定需从甲、乙、丙三个车间各选一名，问共有多少种可能的选举结果？

**解** 要完成这个选举必须经过三个步骤，即先从甲、乙、丙三个车间各选一名代表，再应用乘法原理计算。由于甲车间选一名代表有 100 种选法，类似地，乙车间有 120 种选法，丙车间有 150 种选法。所以选举三名代表共有：$100\times120\times150=1\ 800\ 000$ 种可能的选举结果。

## 1.1 排 列

在日常生活或科学实验中，我们常常需要把一些不同的事物按一定顺序排列起来。例如，我们要试验三个不同小麦品种 $A_1$、$A_2$、$A_3$ 的好坏，需要安排在三块试验田上试种，这就有若干个不同的安排方法(方案)。可以把 $A_1$ 安排在第一块试验田，$A_2$ 安排在第二块试验田，$A_3$ 安排在第三块试验田，记为 $A_1A_2A_3$；也可以把 $A_1$ 安排在第一块试验田，$A_3$ 安排在第二块试验田，$A_2$ 安排在第三块试验田，即 $A_1A_3A_2$；如此，还可以得到 $A_2A_1A_3$，$A_2A_3A_1$，$A_3A_1A_2$，$A_3A_2A_1$ 共六种安排方法。这就是排列问题。下面给出它的定义。

**定义** 把 $n$ 个不同的事物(称元素)按某种顺序排成一列称为**排列**。

### 1.1.1 全排列

将 $n$ 个元素进行排列，若每个排列中所有 $n$ 个元素全需出现且每个元素都只出现一次，则这样的排列称为**全排列**。

对于一个元素 $A$，显然只有一种排列。两个元素 $A$、$B$ 共有两种排列法，即 $AB$ 和 $BA$。三个元素 $A$、$B$、$C$ 的全排列共有 6 种，

即 $ABC$、$ACB$、$BAC$、$BCA$、$CAB$ 和 $CBA$。对于三个元素的全排列，我们可以看成有三个步骤：第一步要从三个元素中任选一个元素放在第一位置上；第二步要从剩下的二个元素中任选一个元素放在第二位置上；第三步把最后剩下的一个元素放在第三位置上。于是，因为第一位置上有 3 种选法，第二位置上有 2 种选法，第三位置上只有 1 种选法，再根据乘法原理，三个元素 $A$、$B$、$C$ 的全排列共有 $3\times2\times1=3!=6$ 种。

一般地，$n$ 个不同元素的全排列的种数是 $n!$，这是因为要组成一个 $n$ 个元素的全排列有 $n$ 个步骤，第一步要从 $n$ 个元素中任选一个放在第一位置上，有 $n$ 种选法；第二步要从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个放在第二位置上，有 $n-1$ 种选法；……；第 $n$ 步是要从最后剩下的一个元素中选一个放在第 $n$ 位置上，显然这一步只有唯一的一种选法。根据乘法原理，于是 $n$ 个元素的全排列共有

$$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\cdot2\cdot1=n!$$

种。通常我们用 $P_n$ 来表示 $n$ 个不同元素的全排列种数，因此有

$$P_n=n! \tag{1.1}$$

### 1.1.2　选排列

从 $n$ 个不同的元素 $A_1$、$A_2$、…、$A_n$ 中任取 $m(m\leqslant n)$个进行排列，称为**选排列**。通常用 $A_n^m$ 表示这样的排列种数。

求 $A_n^m$ 的方法与求 $P_n$ 的方法类似。每一个选排列要选 $m$ 个元素放在 $m$ 个位置上去，即有 $m$ 个步骤。第一步是从 $n$ 个元素中任选一个放在第一位置上，有 $n$ 种选法；第二步是从剩下的 $n-1$ 个元素中任选一个放在第二位置上去，共有 $n-1$ 种选法；……；第 $m$ 步是从剩下的 $n-(m-1)$个元素中任选一个放在第 $m$ 个位置上去，共有 $n-(m-1)=n-m+1$ 种选法，故由乘法原理知

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} \tag{1.2}$$

**例 1** 由 1～5 这 5 个数字能组成多少个不同的三位数？（每个数字在同一个三位数中只能用一次。）

**解** 这是一个选排列问题，结果为

$$A_5^3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

**例 2** 某厂举行技术表演赛，共有 6 名男工和 4 名女工参加。比赛后按各人得分多少排列名次。假定他们的得分各不相同。试问：(1) 可能有多少种不同的排法？(2) 如果将男工和女工分开排列名次，可能有多少种不同的排法？

**解** (1) 10 名工人按得分多少排列名次，是一个全排列问题。共有 10！=3 628 800 种排法。

(2) 6 名男工按得分多少排列名次，有 6！种排法；4 名女工按得分多少排列名次，有 4！种排法。根据乘法原理知男女工各自排列名次，共有

$$6! \times 4! = 17\ 280$$

种不同的排法。

### 1.1.3 有重复的排列

从 $n$ 个不同的元素中有放回地取出 $m$ 个元素的排列，由乘法原理知共有

$$\underbrace{n \times n \times \cdots \times n}_{m\text{ 个}} = n^m \tag{1.3}$$

种排法。

**例 3** 电话机的按键盘上有 0～9 共 10 个数字。若电话号码由 6 位数字组成(首位数可以是 0)，试问此电话机共可拨出多少个不同的电话号码？

**解** 由于电话号码的各位数可从键盘上重复按出，故这是一

个有重复的排列问题。共有

$$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$$

个不同的电话号码。

## 1.2 组 合

在排列中，我们不仅要注意排列里的元素，而且还要注意到它们的次序。也就是说，在排列中，即使所含元素相同，但只要次序不同就认为是不同的排列。然而，在实际问题中，有时只需考虑参加排列的元素而无需考虑它们的次序。例如从 1000 件产品中任取 3 件，问有几种取法(结果不放回)，这类问题就是组合问题。

**定义** 从 $n$ 个不同元素 $A_1$、$A_2$、…、$A_n$ 中任取 $m(m \leqslant n)$ 个组成一组而不论它们的排列次序如何，称每个组为一个**组合**。

我们用 $C_n^m$ 表示从 $n$ 个元素中任取 $m$ 个进行组合的数目。如何求 $C_n^m$ 呢？事实上排列和组合之间是有一定关系的。

从 $n$ 个元素中取 $m$ 个进行排列，可以看成是：先取 $m$ 个元素进行组合，然后再对这 $m$ 个元素进行全排列。所以，由乘法原理知这些排列的总数应为 $C_n^m \cdot m!$，即

$$A_n^m = C_n^m \cdot m!$$

故

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{1.4}$$

关于组合还可从另一个角度来看：从 $n$ 个不同元素中任取 $m$ 个进行组合，也可以看成是把 $n$ 个元素分成两组：甲组为 $m(m \leqslant n)$ 个，乙组为 $n-m$ 个，这样的不同分法共有